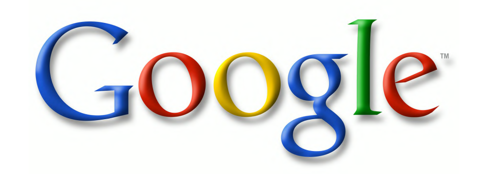
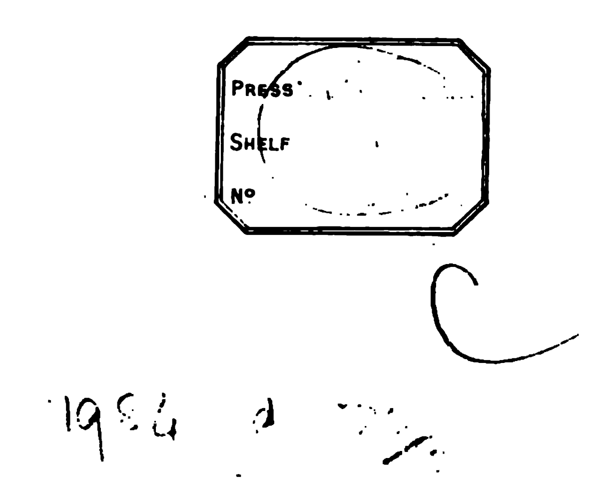







PRESS
SHELF
Nº

COURS

DE

PHYSIQUE

CONDITIONS DE LA PUBLICATION

Le tome premier du **Cours de Physique** forme un volume de mille p
publié en 2 parties (Physique Moléculaire).

Prix du tome I. . . . . 28 fr.

Le tome II sera également publié en 2 parties.

En vente la 1[re] partie : **Acoustique**.

Un fascicule de 300 pages. Prix. . . . . 9 fr.

L'OUVRAGE COMPLET FORMERA QUATRE VOLUMES

4814-81. — Corbeil. Imprimerie Crété.

COURS

DE

PHYSIQUE

PAR

J. VIOLLE

DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE

TOME II

USTIQUE ET OPTIQUE

PREMIÈRE PARTIE

ACOUSTIQUE

ec 163 figures dans le texte.



PARIS

G. MASSON, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, Boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Médecine

M DCCC LXXXVIII

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME II

ACOUSTIQUE

CHAPITRE I

NATURE ET CARACTÈRES DU SON

CHAPITRE II

INTERVALLES MUSICAUX

CHAPITRE III

PROPAGATION DU SON

CHAPITRE IV

INTERFÉRENCES DU SON

CHAPITRE V

TUYAUX SONORES

CHAPITRE VI

CORDES VIBRANTES

CHAPITRE VII

VERGES VIBRANTES

CHAPITRE VIII

MEMBRANES ET PLAQUES

CHAPITRE IX

COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES

III. — COMPOSITION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE ET D'UNE TRANSLATION.

IV. — RÉSONNANCE.

CHAPITRE X

INTENSITÉ. — TIMBRE

I. — INTENSITÉ.

II. — TIMBRE.

COURS
DE PHYSIQUE

ACOUSTIQUE

CHAPITRE PREMIER

NATURE ET CARACTÈRES DU SON

324. Nature du son. — L'acoustique (ἀκούω, entendre) a pour objet l'étude du son.

Sous le rapport physique, le son peut se définir un mouvement vibratoire excité dans un corps et transmis à l'oreille par une suite non interrompue de milieux pondérables élastiques [1].

Le son est un mouvement vibratoire de la matière. — Par mouvement vibratoire d'un point, on entend un mouvement dans lequel le point, écarté de sa position d'équilibre, y revient, la dépasse, y revient en sens contraire pour la dépasser de nouveau jusqu'à regagner sensiblement son lieu de départ, et ainsi de suite. Chaque déplacement complet, aller et retour, constitue une oscilla-

(1) C'est presque exactement la définition d'Aristote : Γίνεται δ'ὁ κατ' ἐνεργείαν ψόφος ἀεί τινος πρός τι καὶ ἔν τινι· πληγὴ γάρ ἐστιν ἡ ποιοῦσα. (Le son, en acte, se produit toujours d'un corps vers un autre et dans quelque autre : c'est un choc qui le détermine.) Aristote, *De l'âme*, VIII, 2.

tion d'après la définition adoptée pour le mouvement pendulaire, le type des mouvements vibratoires.

Que tout corps émettant un son soit le siège d'un mouvement vibratoire de l'ensemble de ses parties, c'est ce qui tombe immédiatement sous les sens. On *voit* les déplacements d'une corde, d'une verge, d'un diapason qui résonnent, ou du moins, par l'effet de la persistance des impressions sur la rétine, on perçoit en même temps tous ces déplacements, trop rapides pour être saisis isolément : la corde se transforme ainsi en un fuseau translucide, presque

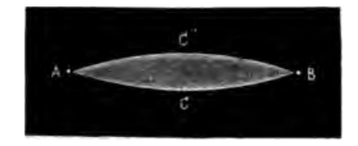


Fig. 1

transparent dans la région la plus large; la verge s'épanouit en éventail; chaque branche du diapason s'élargit à sa partie supérieure. Les mouvements d'un verre à boire que l'on vient de heurter, d'un timbre sur lequel on a frappé, d'un diapason dont on a séparé brusquement les deux branches, sont sensibles au *toucher;* et, dès que le contact de la main a fait cesser la vibration, le son

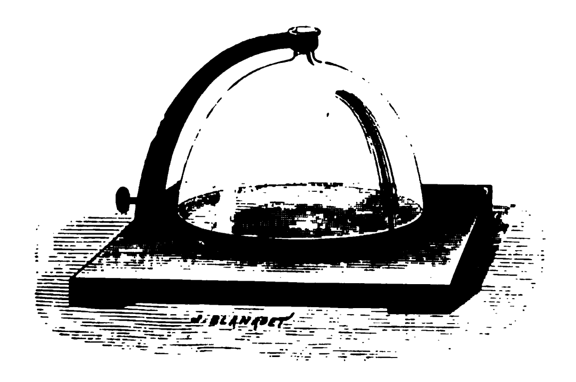


Fig. 2

s'éteint. En amenant une pointe au voisinage d'une cloche qui sonne, on *entend* une série de chocs résultant des renflements et

des aplatissements successifs de la cloche. On peut faire la même expérience au moyen d'un pendule approché de la cloche qui le

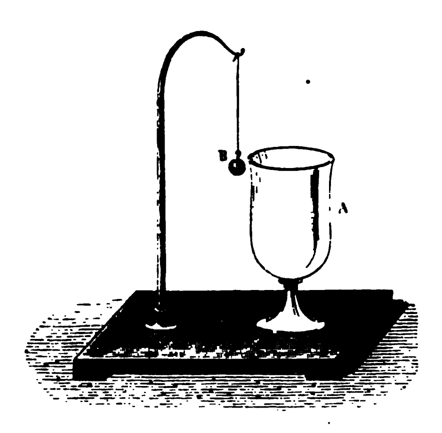


Fig. 3

projette au loin ; un effet semblable s'observe avec un diapason, avec une verge. Les sautillements du sable sur une membrane

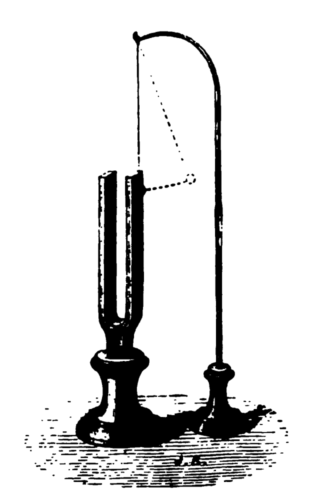


Fig. 4

introduite dans un tuyau sonore attestent les mouvements vibratoires du fluide intérieur. Nous apprendrons plus tard à pénétrer davantage la nature de ces mouvements. Leur existence dans

tous les cas où un corps rend un son est suffisamment établie par les faits qui viennent d'être rappelés.

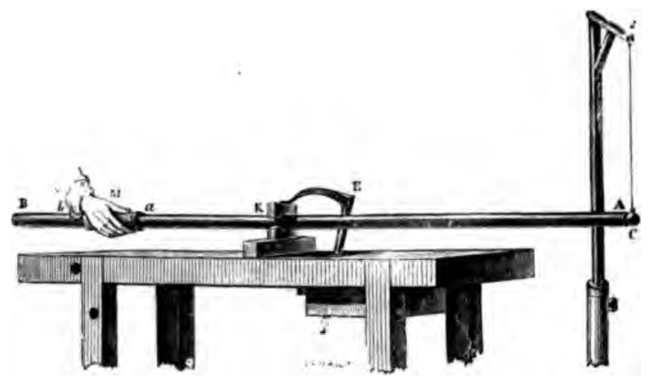


Fig. 5

Le son exige, pour se transmettre à l'oreille, une suite non interrompue de milieux élastiques pondérables. — On vérifie sans peine la deuxième partie de la définition relative à la nécessité d'un

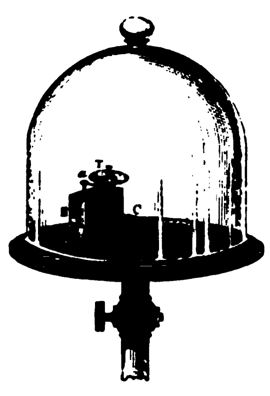


Fig. 6

milieu ou d'une suite continue de milieux pondérables entre le corps sonore et l'oreille. Otto de Guericke (¹) suspendit par un fil (²)

(¹) OTTO DE GUERICKE, *loc. cit.*
(²) Il est nécessaire d'isoler aussi parfaitement que possible la sonnerie, soit en la faisant reposer sur un épais coussin de ouate, soit plutôt en la soutenant par un fil; sinon, le son ne disparaît pas.

une sonnerie à l'intérieur d'un récipient qu'il réunit à sa machine pneumatique; il constata que le son allait s'affaiblissant à mesure qu'on enlevait l'air, et finissait par ne plus s'entendre. Papin (¹) fit l'expérience devant les membres de la Société royale de Londres au moyen d'un sifflet ajusté à l'entrée du réci-

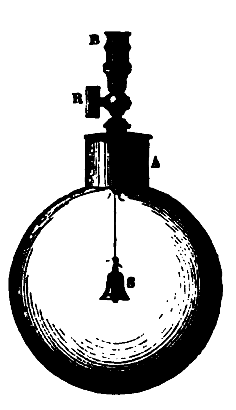


Fig. 7

pient; et Hawksbee la répéta avec un ballon renfermant une clochette (²).

De ce que l'air est le véhicule ordinaire du son, il ne faudrait pas conclure qu'il soit seul capable de le transmettre. Si, à l'exemple de Biot (³), on laisse rentrer dans le ballon d'Hawksbee un gaz quelconque, une vapeur (quelques gouttes d'éther introduites par le robinet et vaporisées immédiatement), on rétablit aussitôt le son avec une intensité d'autant plus marquée que la densité du fluide élastique est elle-même plus grande.

Otto de Guericke, rappelant que les poissons s'enfuient au moindre bruit, comme ils viennent au son de la cloche ou du sifflet

(¹) Papin, *Procès-verbal de la séance de la Société royale du 23 février* 1685, dans Birch, *History of the Royal Society*, IV. London; 1757.

(²) Il fit aussi l'expérience inverse en comprimant de l'air dans le ballon et en montrant que le son devient alors plus intense (Hawksbee, *Phil. Trans.*, 1705). Hawksbee, qui succéda à Hooke comme *curator of experiments* à la Société royale, a réuni ses recherches dans son livre *Physico-mechanical experiments*. London; 1709.

(³) Biot, *Traité de physique*, II, 4. Paris; 1816.

quand ils sont apprivoisés, en concluait que les liquides sont propres à transmettre le son. En effet, la tête dans l'eau, on entend parfaitement le roulement lointain des galets ; on distingue même les paroles prononcées dans l'air, mais fort affaiblies, une partie seulement du son franchissant la surface de séparation des deux milieux. Les solides élastiques conduisent également bien le son : l'oreille collée au sol distingue de très loin le bruit du canon, le roulement d'une voiture, le piétinement des chevaux. La conductibilité sonore du bois est remarquable : le léger choc de la tête d'une épingle contre l'une des extrémités d'une longue poutre de sapin se perçoit nettement à l'autre extrémité. Au contraire, les corps dénués d'élasticité, tels que la ouate, le coton, le duvet, la sciure de bois, transmettent mal le son. Les tapisseries étouffent les bruits, et une portière de tissu épais empêche complètement d'entendre ce qui se passe dans la pièce voisine.

Ces faits vulgaires montrent que le son peut être transmis plus ou moins parfaitement par tout milieu pondérable élastique. Mais il ne se propage pas dans le vide. Le vide est absolument muet. Les espaces célestes sont éternellement silencieux, et les cataclysmes les plus effrayants d'un monde ne peuvent être entendus par le reste de l'univers.

325. Qualités du son. — Le son est donc un mouvement vibratoire général de la matière pondérable. Un tel mouvement peut présenter des variétés à l'infini, comme amplitude, comme durée de l'oscillation, comme forme même de la trajectoire parcourue par chaque point du système vibrant. A ces différentes conditions correspondent les diverses qualités du son : l'*intensité*, la *hauteur*, et le *timbre*.

326. Intensité. — L'intensité dépend visiblement de l'amplitude des vibrations : plus la corde a été attaquée vivement par l'archet, plus le battant a frappé violemment la cloche, plus le son est intense : en tout cas, à mesure que les oscillations décroissent, il faiblit quoique conservant même hauteur, et il s'éteint avec le mouvement.

327. Hauteur. — La hauteur du son, ou sa tonalité, est déterminée par le nombre des vibrations.

Expérience du P. Mersenne. — Le P. Mersenne tendit une corde de chanvre assez longue (30 mètres) pour que l'œil en suivît aisément les déplacements : elle ne rendait alors point de son, mais on pouvait compter le nombre de ses vibrations dans un temps donné. Il raccourcit ensuite la longueur de cette corde à moitié, et trouva que, dans le même temps, elle effectuait un nombre double d'oscillations. En la réduisant au tiers, au quart....., il vit les oscillations devenir trois, quatre..... fois plus rapides ; et il établit ainsi que, toutes choses égales d'ailleurs, le nombre des oscillations d'une corde est inversement proportionnel à la longueur de cette corde. Quand elle fut suffisamment réduite, la corde émit un son, et ce son, comme on le savait déjà, monta à mesure que la corde devint plus courte. Il fut donc prouvé que la hauteur du son s'accroît lorsque le nombre des vibrations augmente. Ce nombre lui-même peut toujours se déterminer par la longueur de la corde produisant le son. Tel est le principe du *sonomètre*, plus particulièrement appelé *monocorde* quand il ne porte qu'une corde, ce qui suffit pour les expériences actuelles ([1]).

Expérience de Chladni ([2]). — On peut faire la même expérience avec une verge élastique pincée dans un étau, comme celle de la figure 8 : la verge étant d'abord assez longue pour que l'on puisse en compter les vibrations, on constate que le nombre des vibrations exécutées en une seconde est inversement proportionnel au carré de la partie vibrante ; puis, la verge continuant à se raccourcir, il se produit un son de hauteur croissante. Chladni avait même espéré obtenir ainsi des corps sonores à nombres de vibrations connus, au moyen desquels

([1]) Ces expériences sont décrites dans l'énorme in-folio du P. Mersenne, *Harmonie universelle*. Paris ; 1636. D'autre part, la relation entre la hauteur d'un son et le nombre des vibrations est énoncée par Galilée, dans ses *Dialogues sur deux sciences nouvelles*, publiés à Leyde par les Elzevir, en 1638, mais composés bien auparavant. Il est difficile de savoir à qui appartient réellement la première idée de cette relation fondamentale, qui ouvrit à la physique l'étude du son, jusqu'alors uniquement physiologique.

([2]) Chladni, *Traité d'acoustique*, édition française, p. 9. Paris ; 1809.

il aurait pu aisément déterminer le nombre de vibrations d'un son donné quelconque. Mais la loi sur laquelle il s'appuyait

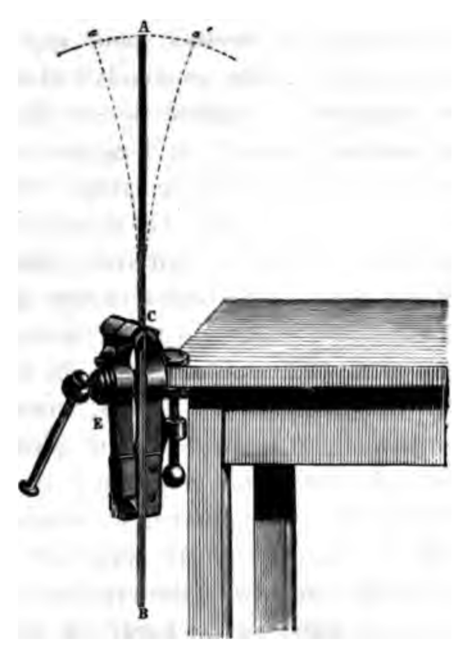


Fig. 8

éprouve dans la pratique des perturbations qui rendent le procédé inexact.

328. Périodicité du mouvement vibratoire constitutif du son. — La méthode du P. Mersenne permet en outre d'observer que les oscillations de la corde sont *périodiques*, en d'autres termes, qu'après un temps toujours exactement le même, et que l'on appelle la *période*, le corps est revenu au même état. Cette périodicité est le vrai caractère du son musical, tandis que le bruit est constitué par une succession d'ébranlements incohérents : c'est ainsi que le fracas de la tempête, le roulement d'une voiture sur le pavé, le bruissement des feuilles dans la forêt, apportent à l'oreille un chaos de sonorités se précipitant et se mêlant sans règles : il n'y a plus à proprement parler de hauteur.

Bruit. — Toutes les fois que le caractère de hauteur reste ainsi obscur, on dit qu'il y a bruit, bien que parfois ce qui empêche de juger de la hauteur soit simplement le peu de durée des vibrations : le bruit du marteau frappant sur l'enclume, du pistolet qui part, de la bouteille que l'on débouche, est véritablement un son dont une oreille attentive saura fixer la hauteur. La qualité fondamentale du son apparaît sans conteste dès que plusieurs de ces bruits se succèdent rapidement. On trouve dans tous les cabinets de physique une série de planchettes qui, jetées à terre les unes après les autres, font entendre la gamme, et un jeu de tubes qu'il suffit de déboucher successivement pour produire l'accord parfait.

Exemples de mouvements périodiques. — Tout en étant périodique, un mouvement peut d'ailleurs affecter les formes les plus variées ; ce sera par exemple le mouvement d'un marteau de forge mû par une roue hydraulique, ou celui d'une balle renvoyée par une raquette, aussi bien que le mouvement d'un pendule oscillant sous l'action de la pesanteur.

Afin de nous représenter nettement ces divers mouvements, traçons dans chaque cas la courbe ayant pour abscisses les temps et pour ordonnées les distances correspondantes du mobile à sa position d'équilibre.

Considérons d'abord le pendule : la formule qui lie les déplacements aux temps (86) est, c désignant une constante,

$$\theta = \alpha \cos ct,$$

ou, si l'on recule de $\frac{\pi}{2c}$ l'origine des temps,

$$\theta = \alpha \sin ct :$$

la courbe représentative est donc une sinussoïde. Sur la figure 9, la période $eg = \frac{2\pi}{c} = \tau$ a été partagée en douze parties égales : le mobile, parti à l'origine de la position d'équilibre e, s'en éloigne jusqu'à l'époque $\frac{3}{12}\tau$, où il atteint son plus grand écart positif α,

puis se rapproche de cette position, y passe à l'époque $\frac{6}{12}\tau$, s'éloigne de nouveau jusqu'à la distance $-\alpha$, revient, et enfin au bout du temps τ est de retour au point de départ ; et les mêmes alternatives recommencent. On se représentera exactement ce mou-

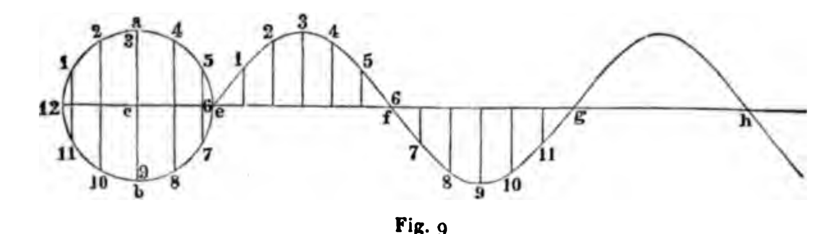


Fig. 9

vement en faisant glisser horizontalement sur la figure une carte percée d'une fente verticale étroite, qui ne laisse voir qu'un point de la courbe : ce point se déplacera le long de la fente comme le mobile sur sa trajectoire ([1]).

La figure 10 fait voir le mouvement du marteau de forge,

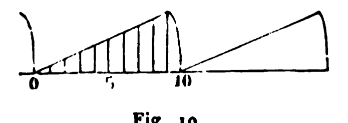


Fig. 10

montant pendant les $\frac{9}{10}$ de la période et retombant brusquement pendant le dernier $\frac{1}{10}$.

Pour la balle lancée par la raquette, la courbe représentative

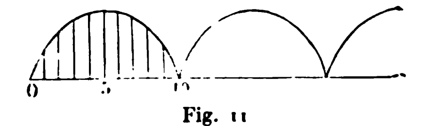


Fig. 11

du mouvement est une série d'arcs de paraboles symétriques par rapport à l'ordonnée maximum (84), le passage d'un arc à l'autre

([1]) On peut aussi se représenter le mouvement du pendule en imaginant qu'un point *a* tourne avec une vitesse constante sur le cercle *c*, supposé placé très loin et de manière à laisser voir seulement sa tranche : le point semblera alors monter et descendre le long du diamètre *ab*, d'un mouvement qui obéira exactement à la même loi que la vibration pendulaire (86).

s'effectuant brusquement au moment où la balle reçoit un coup qui la renvoie vers le haut ([1]).

Toutes ces sortes de mouvements peuvent engendrer des sons, à la seule condition d'être assez rapides. Le mouvement des branches du diapason est un mouvement pendulaire. Le mouvement du marteau de forge représente assez bien celui d'une corde de violon excitée par l'archet (ce dernier mouvement diffère beaucoup de celui de la corde oscillant librement). La balle lancée par la raquette est l'image de l'air chassé de sa position primitive par une impulsion brusque dans la sirène ou la roue dentée.

329. Production du son par une succession rapide de chocs également espacés. — On peut en effet produire directement des sons par une succession régulière et suffisamment rapide de chocs. Ce mode de production, tout en confirmant ce qui précède, aura de plus, en général, l'avantage de nous permettre de connaître immédiatement le nombre des vibrations du son produit.

Crécelle. — Prenons par exemple une crécelle, et faisons-la tourner rapidement : nous entendrons un son continu, ou plus exactement deux sons distincts : l'un, produit par le choc même de la lame vibrante, et qui dépend de la nature de l'instrument, mais qui, pour un instrument donné, n'est affecté en rien par la rapidité de la rotation ; l'autre, dû à la répétition des chocs et réglé par leur nombre. Suivant que la lame vibrante sera dure et épaisse, ou mince et flexible, l'un de ces sons l'emportera sur l'autre ([2]). Il est même facile de faire en sorte que le son dû à la succession des chocs prédomine presque absolument.

Roue dentée. — Tel est le cas avec la roue dentée de Savart ([3]), sorte

([1]) Ces exemples et ces figures sont empruntés à l'ouvrage de M. von HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la musique*, traduction Guéroult. Paris, Masson ; 1868.

([2]) On vérifie le fait avec les deux crécelles de Marloye : dans l'une, le son n'est pas changé par la vitesse de rotation, mais il baisse d'une quinte lorsqu'on ouvre le fond de la crécelle ; avec l'autre, le son monte régulièrement à mesure que la vitesse augmente.

([3]) SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLIV, 337 ; 1830. Déjà Hooke avait fait devant la Société royale de Londres, en 1681, des expériences sur la production du son au moyen des roues dentées ; et Stancari avait montré à l'Académie de Bologne, en 1706, qu'une grande roue, garnie de longs clous sur sa circonférence, donnait, en tournant dans l'air, un son dont la hauteur croissait avec la vitesse de la rotation et dont le nombre des vibrations en une seconde pouvait aisément se calculer, cette vitesse étant connue.

de grande crécelle dont les dents, également espacées, viennent frapper une carte très courte. L'appareil comprend ordinairement quatre roues dentées dont les nombres de dents sont comme les nombres 4, 5, 6, 8 (caractéristiques de l'accord parfait). En impri-



Fig. 12

mant au système différentes vitesses de rotation, en présentant la carte aux différentes roues, on reconnaît aisément, sans mesure aucune, que la hauteur du son croît avec la vitesse ainsi qu'avec le nombre des dents, et par conséquent avec le nombre des vibrations. Le nombre des vibrations doubles du son engendré est en effet égal au nombre des chocs, lequel est lui-même égal au produit du nombre des dents de la roue (1) par le nombre des tours en une seconde. Ce dernier nombre peut se mesurer à l'aide d'un compteur (semblable à celui qui sera décrit à propos de la sirène). Pour les grandes vitesses, Savart préférait se servir d'une deuxième roue, calée sur le même axe que la première, et portant un nombre de dents trente ou quarante fois moindre que celle-ci : le son de cette deuxième roue étant beaucoup plus grave, il était facile d'en prendre l'unisson sur un monocorde, et par suite d'en déterminer le nombre de vibrations, d'où l'on concluait le nombre de tours de la roue. Mais, à ces grandes vitesses, la roue dentée,

(1) En enlevant les dents sur une partie de la circonférence, Savart a reconnu qu'il suffit de laisser deux dents, avec leur écartement primitif, pour que le son, devenu, il est vrai, intermittent, conserve la même hauteur que dans le cas où toutes les dents sont en place ; mais il n'a pas pu déterminer ainsi pendant combien de temps la sensation auditive se prolonge au delà du fait physique qui l'a fait naître.

toujours médiocre au point de vue de la qualité du son, devient tout à fait défectueuse ; l'intensité du son baisse beaucoup, en même temps que la mesure du nombre des vibrations est très incertaine, rien ne prouvant que la carte heurtée par une dent ait eu le temps de revenir à sa position première avant le passage de la dent suivante.

Appareil de Trevelyan. — Un curieux exemple de son produit par une série de chocs nous est offert dans l'expérience dite de Trevelyan [1]. Un prisme triangulaire ou berceau, en laiton, creusé d'une gouttière sur sa face inférieure, est chauffé un peu au-dessus de 100 degrés et posé sur le bord d'un bloc de plomb : un son se produit alors, tandis que le berceau oscille visiblement. Quand l'un des bords de la gouttière touche le bloc, la chaleur apportée au point de contact par le berceau et maintenue en ce point par

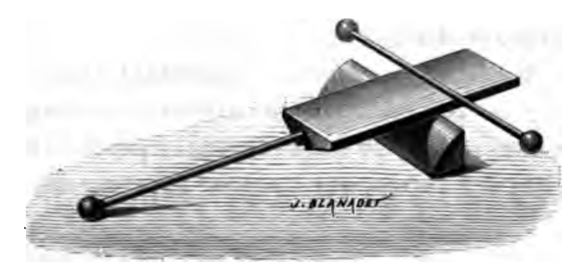


Fig. 13

la mauvaise conductibilité du plomb, y détermine un mamelon qui fait basculer le berceau sur l'autre bord de la gouttière, où le même effet se reproduit. Le berceau est ainsi ballotté alternativement de droite à gauche et de gauche à droite, et la succession des petits coups qu'il frappe contre le plomb engendre un son musical, dont la hauteur baisse, si par une surcharge on ralentit les oscillations. M. Tyndall fait l'expérience avec une pelle

[1] Le fait fut d'abord observé, paraît-il, dans une fonderie de Saxe, en 1805, par un certain Schwartz qui, ayant placé sur une enclume une masse d'argent chaude, fut tout surpris de l'entendre chanter. En 1829, Trevelyan retrouva par hasard le même phénomène en posant un fer à souder sur un morceau de plomb ; il reproduisit l'expérience en la variant, et lui donna sa forme actuelle (Voir Tyndall, *la Chaleur*, 1re édition française, appendice à la leçon IV).

à feu qu'il pose, après l'avoir chauffée, sur deux lames de plomb pincées dans un étau ; une simple bague ou une pièce de mon-



Fig. 14

naie, chauffée et mise de champ sur un morceau de plomb, peut également vibrer et chanter (¹).

Sirène. — Mais l'appareil le plus important dans ce genre est la *sirène*, imaginée par Cagniard de La Tour (²) en 1819.

La pièce essentielle est un disque tournant percé de trous à égale distance les uns des autres, qui viennent successivement se placer

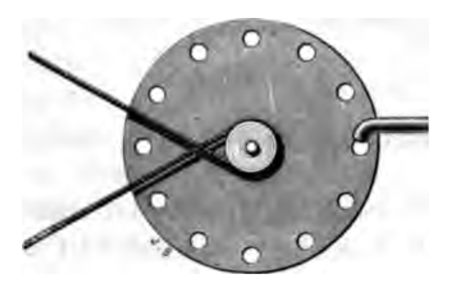


Fig. 15

en regard d'un orifice par lequel s'échappe un courant d'air. A chaque coïncidence des ouvertures, l'air extérieur reçoit un choc qui cesse dès qu'un plein s'est substitué à un vide en face de l'ori-

(¹) Voir TYNDALL, *la Chaleur*, 2ᵉ édition française, p. 100. Paris, Gauthier-Villars ; 1874.

(²) CAGNIARD DE LA TOUR, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XII, XVIII et XXXV ; 1819-27.

fice; ces chocs périodiques, lorsqu'ils se succèdent un peu rapidement, donnent naissance à un son dont la hauteur dépend de la vitesse de rotation communiquée au disque. L'appareil, tel que nous venons de le décrire, est souvent désigné sous le nom de *Sirène de Seebeck*, parce que Seebeck l'a employé en effet sous cette forme



Fig. 16

(avec un disque portant plusieurs rangées de trous) à des recherches sur les éléments des sons complexes.

Dans l'appareil original de Cagniard de La Tour, tel qu'on le

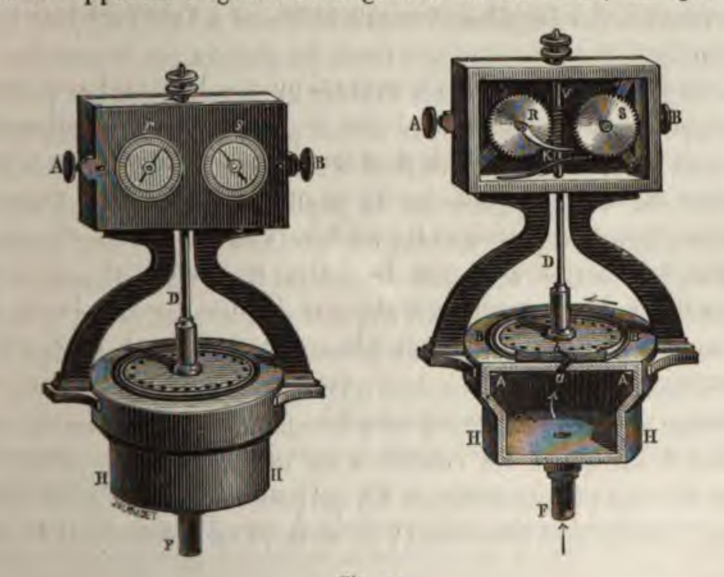


Fig. 17

construit encore aujourd'hui, le mouvement du disque mobile est produit par le courant d'air lui-même : et, pour augmenter la force

motrice, pour accroître en même temps l'intensité du son, on envoie le courant d'air, non par un orifice unique, mais par une série d'orifices disposés de façon à se trouver en même temps tous ouverts ou tous fermés. Ces orifices, en nombre égal à celui des trous du plateau mobile, sont percés dans un plateau fixe AA, formant le couvercle d'une sorte de boîte HH dans laquelle arrive par le tube F l'air d'une soufflerie. Au-dessus du plateau AA, et à très petite distance, est placé le plateau mobile BB, fixé à un axe vertical D, qui peut tourner librement sur les pointes de deux vis le saisissant à ses extrémités. Les trous des deux plateaux sont inclinés en sens contraire dans un plan perpendiculaire au rayon. De cette disposition il résulte que, si les ouvertures des deux plateaux sont d'abord superposées, l'air arrivant par les trous inférieurs *a* vient frapper à peu près perpendiculairement la paroi des trous supérieurs *b*, et pousse le plateau mobile. Celui-ci se mettra donc à tourner avec une vitesse dépendant de la pression de l'air insufflé, et il ouvrira et fermera périodiquement les orifices de sortie de l'air ([1]).

Le nombre des impulsions communiquées à l'air extérieur étant égal au produit du nombre des trous du plateau par le nombre des tours de l'axe, il faut pouvoir évaluer ce dernier nombre pendant un temps donné. A cet effet, la sirène porte en haut un compteur, formé de deux roues dentées R et S : la roue R engrène avec une vis sans fin V, pratiquée sur la partie supérieure de l'axe, et marche d'une dent pour un tour de l'axe. Chaque fois que la roue R a fait un tour entier, un appendice latéral K, fixé à cette roue, vient rencontrer la roue S et la fait avancer exactement d'une dent, un petit ressort placé au-dessous ne laissant échapper qu'une dent à la fois. Si donc la roue R a 100 dents, tandis qu'une aiguille attachée à cette roue comptera les tours, une deuxième aiguille entraînée par la roue S marquera les centaines de tours. Tout ce système est monté sur une plaque verticale AB qui peut recevoir un petit déplacement dans le sens horizontal ; de sorte qu'en pressant sur le bou-

([1]) Quand la sirène va un peu vite, outre le son principal, on entend un son beaucoup plus grave, que l'on appelle le *son d'axe*, et qui provient de ce que l'axe de rotation, n'étant pas exactement un axe principal d'inertie, vient à chaque révolution battre deux fois contre ses supports.

ton A on fait engrener la roue R avec la vis sans fin V; en pressant sur B on désengrène.

La marche d'une expérience est alors la suivante. Le compteur étant hors prise, le son produit par la sirène est amené à la hauteur voulue ([1]), et la pression est réglée de façon à maintenir cette hauteur exactement constante. A un instant donné par un chronomètre, on pousse le bouton A, le compteur entre en mouvement, l'expérience commence. Quand on veut y mettre fin, on presse le bouton B, en même temps qu'on marque l'heure au chronomètre.

Il y a nécessairement au début et à la fin quelque incertitude sur l'époque exacte de la mise en marche et de l'arrêt du compteur; de plus, celui-ci ne marquant que les tours entiers et non les fractions de tours, le nombre total des oscillations doubles du son que l'on observe peut être erroné de $k-1$, k étant le nombre des trous du plateau. On atténuera l'influence de ces causes d'erreur en prolongeant le plus possible la durée de l'expérience. Toutefois, il n'est pas facile de maintenir un peu longtemps le son absolument fixe, ce qui est cependant la condition essentielle d'une mesure précise. On emploiera avantageusement le régulateur de Cavaillé-Coll, sorte de petit soufflet à contre-poids, traversé par le vent de la soufflerie. Pour combattre la tendance du son à monter, on peut également s'aider soit d'un régulateur à ailettes fixé sur la sirène, ainsi que le faisait Cagniard de La Tour (qui, lui, ne se servait pas d'autre soufflerie que de sa bouche), soit d'un régulateur électro-magnétique ([2]), soit simplement d'une faible pression du doigt : ici, comme partout, l'habileté de l'opérateur peut suppléer aux imperfections de l'appareil. Mais pour se mettre complètement à l'abri des variations du

([1]) Pour les sons très élevés, on peut, à l'exemple de Cagniard de La Tour, lancer l'appareil avec un ruban préalablement enroulé sur l'axe comme la ficelle d'une toupie ; il suffit alors de maintenir la vitesse pendant le temps nécessaire à l'expérience.

([2]) M. Bourbouze construit une sirène dont le réglage est fondé sur le ralentissement qu'un aimant apporte à la vitesse d'une masse métallique en mouvement dans le voisinage. Un disque en cuivre rouge, fixé sur l'axe de la sirène, passe entre les deux pôles d'un électro-aimant que l'on peut approcher ou éloigner de façon à en modifier l'action. La sirène étant mise en mouvement au moyen d'un soufflet à émailleur ou d'une trompe, qui fournisse un courant d'air capable de donner un son supérieur à celui que l'on veut mesurer, on approche les pôles magnétiques jusqu'à ce que l'on obtienne le son voulu.

son, le mieux est d'imprimer à la sirène son mouvement de rotation par un moteur indépendant, comme Seebeck l'a fait depuis. M. von Helmholtz a employé à cet effet une petite machine magnéto-électrique, munie d'un régulateur à force centrifuge qui interrompait le courant dès que la vitesse de rotation commençait à dépasser une certaine valeur; il a obtenu ainsi « des sons d'une hauteur extraordinairement constante, rivalisant avec ceux des tuyaux d'orgue les mieux construits ».

Dove a ménagé dans le plateau plusieurs séries de trous pouvant fonctionner à volonté ensemble ou séparément; et M. von Helmholtz, réunissant deux sirènes polyphones de Dove, a combiné un instrument qui se prête à un grand nombre de démonstrations intéressantes. N'oublions pas enfin que la sirène peut parler dans l'eau (c'est l'origine de son nom) : pour cela, il suffit qu'elle soit immergée complètement et alimentée par un courant d'eau sous pression convenable.

330. Mesure de la hauteur d'un son. — L'oreille estime avec beaucoup d'exactitude l'égalité de hauteur de deux sons : deux cordes étant amenées à l'unisson, il suffira de changer très peu la longueur de l'une d'elles pour produire un désaccord sensible. Les appareils précédents (monocorde, sirène, roue dentée) permettent de vérifier que deux sons jugés par nous à l'unisson, le son d'une corde et celui de la sirène, par exemple, battent le même nombre de vibrations, quelles que puissent être d'ailleurs leurs différences d'intensité et de timbre.

En conséquence, ces mêmes appareils serviront à mesurer le nombre de vibrations d'un son donné quelconque. Il suffira de prendre l'unisson de ce son sur le monocorde, sur la sirène ou sur la roue dentée, et de mesurer le nombre des vibrations du son émis alors par l'appareil employé.

Le *monocorde* est commode pour une évaluation rapide de la hauteur d'un son. C'est une corde tendue sur une table entre deux chevalets fixes, et sous laquelle peut se déplacer un troisième chevalet mobile en regard d'une règle divisée. La corde est attachée d'un bout à une cheville fixe, de l'autre à une vis qui règle sa tension. En agissant sur cette vis, on amène la corde, vibrant dans

toute sa longueur, à rendre un son déterminé de hauteur connue (le *la* du diapason par exemple) ; puis, au moyen du chevalet mo-



Fig. 18

bile, on réduit la longueur de la portion vibrante de façon à lui faire rendre le son que l'on veut évaluer. Le rapport de cette longueur à la longueur totale de la corde (entre les deux chevalets fixes) est égal au rapport inverse des nombres de vibrations effectuées par la corde dans les deux cas.

Au monocorde on substituera avantageusement un sonomètre, muni d'une caisse d'harmonie qui amplifie le son, et pourvu

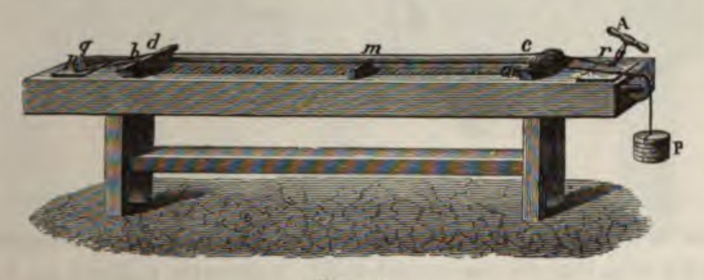


Fig. 19

de plusieurs cordes : l'emploi d'une deuxième corde, mise à l'unisson de la première, permet de vérifier qu'à la fin de l'opération la corde en expérience a bien gardé le son auquel on l'avait accordée.

La *sirène* permet de faire des déterminations plus exactes : elle est beaucoup plus facile à employer et moins sujette à erreur que la *roue dentée* par laquelle Savart avait voulu la remplacer.

331. Méthode graphique. — Le procédé le plus précis pour déterminer le nombre des vibrations d'un son dans un temps donné consiste à faire inscrire au corps sonore lui-même ses vibrations. Un style A, adapté au corps (constitué ici par une tige vibrante T), appuie sur un cylindre enfumé EF, tournant autour d'un axe VD,

parallèle au plan dans lequel s'effectuent les vibrations. L'une des extrémités T de l'axe est filetée et passe dans un écrou fixe, de sorte que, le cylindre tournant et avançant à la fois, la courbe se développe en une spirale dentelée dont chaque sinuosité correspond à une vibration du corps en expérience. Le nombre de vibrations effectuées dans un temps donné s'en déduira immédiatement



Fig. 20

si l'on connaît la vitesse du cylindre. Sans doute il est possible avec des régulateurs convenables (82) d'obtenir, malgré les frottements variables du système, un mouvement de rotation uniforme, et d'en évaluer la vitesse au moyen d'un chronomètre. On peut même faire tracer à un chronomètre pointeur pour chaque seconde une marque sur le cylindre tournant. Mais, outre la difficulté de relever exactement cette marque, on doit toujours craindre que le choc et le frottement de la pointe contre le cylindre n'altèrent la marche du chronomètre ([1]).

Diapason chronographique. — Le vrai moyen d'opérer consiste à mesurer le temps par le nombre de vibrations d'un étalon inscrivant ses vibrations propres, tandis que le corps étudié inscrit conjointement les siennes. Cette méthode d'estimer le temps, base de la

([1]) On évite cette cause d'erreur en employant un signal actionné électriquement par une horloge astronomique; et ce signal vient alors se joindre utilement au tracé du diapason chronographique (346).

chronographie, est due à Thomas Toung [1], qui se servait à cet effet d'une tige vibrante munie d'un style. Duhamel [2] appliqua la méthode à l'étude des vibrations des cordes ; Wertheim [3], le premier, l'employa à déterminer le nombre des vibrations d'un son à l'aide d'un diapason de tonalité connue. La figure 21 représente un compteur graphique, disposé pour l'enregistrement simultané des vibrations d'une corde AB et d'un diapason D. PQ est une tige qui, sous l'action d'une pédale adaptée à sa partie inférieure, pousse une

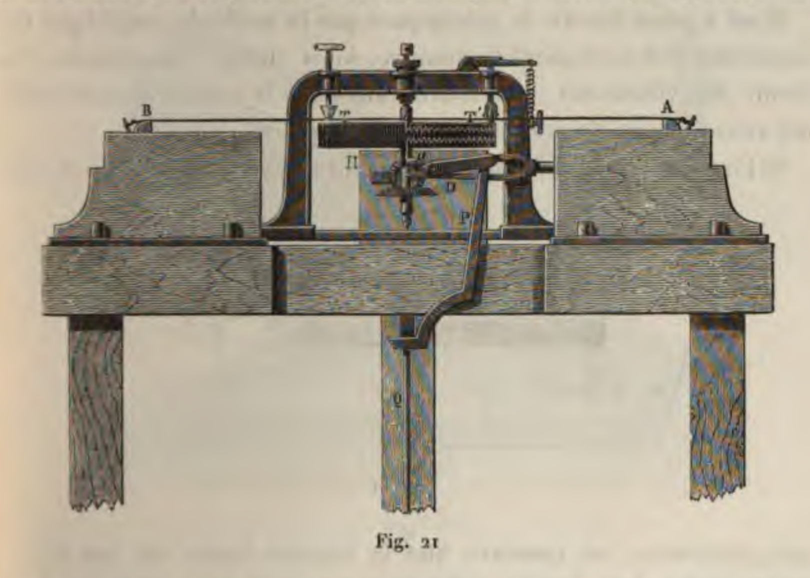


Fig. 21

pièce de bois *a* entre les deux branches du diapason, les écarte violemment, et met l'instrument en vibration. Un style, porté par le diapason, marque alors une ligne sinueuse sur le tambour noirci TT'; un deuxième style, fixé au milieu de la corde, trace une deuxième ligne à peu de distance de la première. Le rapport des nombres de sinuosités des deux courbes entre deux génératrices déterminées du cylindre donnera le rapport des nombres de vibrations effectuées dans un même temps par la corde et par le diapason. On en conclura sans peine le nombre absolu des vibrations de la corde

(1) Young, *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts*, I, 191 ; 1807.
(2) Duhamel, C. R., XI, 15, 810 et 957 ; 1841.
(3) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XII, 385 ; 1844.

pendant une seconde, la tonalité du diapason étant connue. Ici le tambour TT' est mis en mouvement par un mécanisme d'horlogerie H. Mais, la mesure, d'après la méthode, étant ramenée à la détermination du rapport des nombres de sinuosités des deux courbes comprises entre deux génératrices du cylindre, peu importe que le mouvement cylindrique soit uniforme. On pourra sans inconvénient adopter la disposition de la figure 20, et faire tourner le cylindre simplement à la main.

Il est à peine besoin de remarquer que la méthode graphique fait connaître non seulement le nombre, mais encore l'amplitude et la forme des vibrations ; elle fournit ainsi sur la nature du son étudié des renseignements authentiques et complets.

Si l'on observe de cette manière la vibration d'un diapason ébranlé

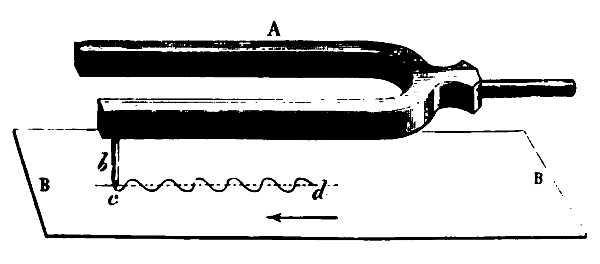


Fig. 21

par percussion, on constate que la courbe tracée est une sinussoïde exacte. Les branches du diapason sont donc animées d'un mouvement pendulaire, ce que confirmera la méthode optique.

Tel est encore sensiblement le mouvement d'une corde dérangée légèrement de sa position d'équilibre et abandonnée ensuite à la seule action des forces moléculaires.

Après la corde ou le diapason, l'inscription directe du mouvement vibratoire n'offre aucune difficulté ; il n'en est pas toujours ainsi. Lorsque par exemple on voudra inscrire les vibrations d'un tuyau sonore, on devra d'abord les recueillir sur un corps capable à la fois de les épouser et d'en tracer le graphique.

Phonautoscope. — Pour cet objet, Scott [1] employait une membrane placée au foyer d'un vaste cornet parabolique A, et suscep-

(1) Scott, *Reports of British Association ;* 1859.

tible d'être tendue plus ou moins fortement à l'aide d'un cadre mobile D l'appuyant contre le bord du cornet. Kœnig ajouta une glissière G, montée sur une vis V et munie elle-même d'une vis V par laquelle on peut exercer telle pression que l'on veut en tel point que l'on choisit de manière que la membrane vibre aisément sous l'influence du son produit à l'entrée du cornet. Un style, formé d'une soie de porc garnie à son extrémité d'une barbe de plume, et fixé à la membrane par une goutte de cire, inscrit en les



Fig. 23

amplifiant les vibrations sur le cylindre C que l'on fait tourner à la main avec une manivelle M. Cet appareil a été d'un bon usage pour l'étude de diverses questions d'acoustique, bien qu'il fût loin de répondre aux espérances de l'inventeur qui pensait y trouver le moyen d'enregistrer la parole d'un orateur. Un son quelconque ne peut en effet s'imposer à une membrane déterminée qu'à la condition d'avoir une intensité exceptionnelle : la membrane ne vibre habituellement que sous l'influence des sons voisins du son spécial pour lequel elle est réglée, et alors la vibration propre de la membrane tend à donner au tracé l'aspect d'une sinussoïde presque absolument régulière.

Phonographe. — Cependant Edison [1] n'eut qu'à modifier légè-

[1] Edison, *Nature;* 1877.

rement l'instrument pour en faire le phonographe, qui permet non seulement d'enregistrer la parole (1), mais de la reproduire ensuite un temps quelconque après l'émission. A cet effet, il a remplacé le papier enfumé par une feuille d'étain tendue sur un cylindre C au-dessus d'une rainure creusée dans le métal, suivant une hélice de même pas que la vis A'; il a substitué à la barbe de plume un style métallique très court, implanté dans un ressort *a* qui l'appuie sur la membrane *m* à l'aide de deux bouts de tube de caoutchouc servant d'étouffoirs; il a enfin constitué la membrane par une mince plaque de tôle, placée au fond d'une embouchure E. L'appareil étant ajusté, si l'on parle en regard de la plaque, en même temps qu'on

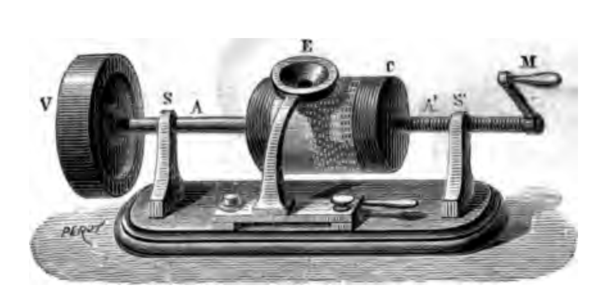




Fig. 24

tourne le cylindre, le style inscrit ses vibrations sous la forme d'un gaufrage qui en conserve tous les détails. Pour reproduire ensuite le son ainsi gravé, il suffit d'écarter le style, de ramener le cylindre au point de départ, de remettre toutes choses en place, et de recommencer le mouvement de rotation dans le sens direct. Le style est alors alternativement soulevé et abaissé par les gaufrages qui se succèdent au-dessous de lui, et la membrane reprend la série des mouvements qu'elle avait reçus de la voix : le son renaît le même — à supposer que la vitesse de rotation ait été exactement reproduite (2) — bien qu'affaibli (3) et nasillard.

(1) En 1864, Barlow présenta à la Société royale de Londres un *logographe*, donnant sur une bande de papier sans fin le tracé à l'encre des sons émis devant une embouchure fermée par une membrane, comme dans l'appareil de Scott.

(2) C'est pour assurer autant que possible la régularité du mouvement que l'on a disposé sur l'extrémité A de l'axe un lourd volant V.

(3) On atténue ce défaut en plaçant sur l'embouchure un cornet destiné à renforcer le son.

332. Limites des sons perceptibles. — Un mouvement vibratoire périodique frappant notre oreille n'entraîne pas nécessairement une perception sonore. Pour être entendu de nous, un son doit être compris entre certaines limites.

La limite inférieure ne semble pas différer beaucoup de 16. C'est le nombre de vibrations que donne le tuyau le plus grave des grandes orgues ; et encore, d'après M. von Helmholtz ([1]), le son fondamental d'un tel tuyau ne se perçoit-il plus guère que comme une suite de secousses isolées : la sensation sonore n'apparaîtrait qu'à environ 30 vibrations. Savart ([2]) avait fixé beaucoup plus bas la limite des sons graves. Il employait à cet effet un appareil connu encore aujourd'hui sous le nom de *barre tournante de Savart*. C'était une barre AB montée sur le grand banc de Savart (fig. 12), à la place de la roue dentée, et pouvant par conséquent recevoir un mouvement de rotation plus ou moins rapide. A chaque demi-révolution, la barre passe à travers une fente rectangulaire CDEF dont elle rase les bords, et produit un bruit d'une intensité assourdissante. Les explosions sont d'abord distinctes quand le mouvement de rotation est très lent ; dès qu'il y a sept ou huit passages à la seconde, le son devient parfaitement continu, en même temps qu'il présente une force et une gravité remarquables. D'après cette expérience, la limite inférieure semblerait donc être 8. Mais Despretz montra qu'en plaçant sur le trajet de la barre une deuxième fente, ce qui doublait le nombre des passages en un même temps, on ne modifiait pas la hauteur du son : ce n'était donc pas le son produit par les 8 chocs que l'on entendait, mais l'un de ces sons supérieurs qui accompagnent presque nécessairement tout son musical, surtout quand celui-ci est dû à des secousses isolées, de durée très courte en comparaison de la période entière de la vibration. Pour éviter l'influence de ces sons supérieurs, il faut prendre des sons aussi simples que possible, par exemple ceux que donnent un tuyau bouché ou une corde chargée d'un disque en son milieu (von Helmholtz) ; mais alors on obtient difficilement une grande intensité, et à ce point de vue les conditions sont moins favorables que dans l'expérience de Savart où, en raison de l'intensité consi-

([1]) Von Helmholtz, *loc. cit.*, p. 222.
([2]) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLVII, 69 ; 1821.

dérable du son produit, il n'est pas impossible que ce soit simplement le premier de ces sons supérieurs, le son 16, que l'on entende, avec une seule fente comme avec deux.

La limite supérieure est encore plus difficile à fixer. Despretz [1], en se servant de diapasons accordés à l'oreille par Marloye suivant les octaves successives, est arrivé à entendre un *ré*^{10} [2] d'environ 38 000 vibrations [3]. Ce nombre, contesté par divers observateurs, a été admis par M. von Helmholtz. D'ailleurs, Wollaston a constaté

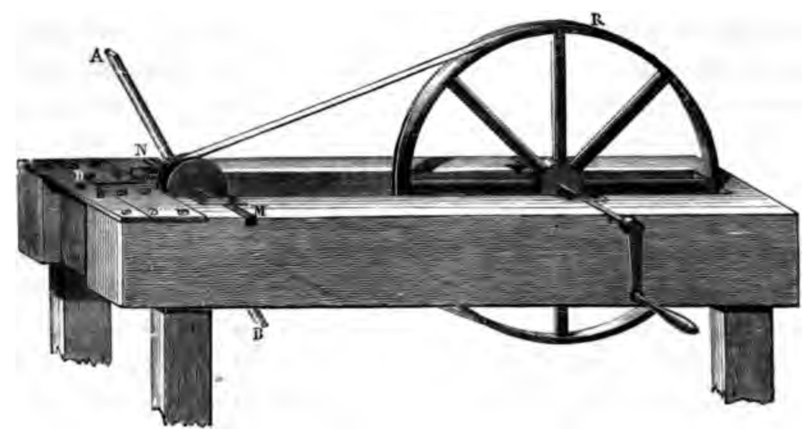


Fig. 25

que bien des personnes n'entendent pas la stridulation aiguë des grillons ni même parfois le pépiement des moineaux. La limite varie donc avec les oreilles.

En résumé, les limites extrêmes des sons perceptibles peuvent être fixées à 16 et 38 000 vibrations doubles par seconde, embrassant un intervalle d'environ 11 octaves.

(1) DESPRETZ, C. R., 1477 ; 1845.

(2) Afin de distinguer les différentes octaves, on les affecte d'indices, ainsi qu'il sera expliqué plus loin.

(3) Pour produire des sons très élevés, on peut encore se servir de cylindres de verre ou d'acier, que l'on fait vibrer longitudinalement ou transversalement. Savart a trouvé par ce procédé 25 000, et Kœnig seulement 20 000 comme limite supérieure. M. Hagenbach fait une jolie expérience à ce sujet : une flamme sensible, convenablement réglée (voir plus loin), étant placée à distance. on attaque avec l'archet successivement les cylindres de Kœnig, par ordre de taille décroissante ; chaque fois la flamme répond, et elle s'agite encore vivement alors que l'oreille placée tout près du dernier cylindre n'entend plus rien.

L'espace comprenant les sons musicaux est beaucoup plus restreint. Si nous laissons de côté l'*ut*$_{-2}$ de 16 vibrations, donné par les plus longs tuyaux d'orgue (le trente-deux pieds ouvert, ou le seize pieds bouché), le son le plus grave utilisé par les musiciens est le *la*$_{-2}$ de 27 vibrations des nouveaux pianos à queue. Le son le plus bas des instruments d'orchestre est le *mi*$_{-1}$ de la contrebasse avec 41 vibrations. Les grands pianos montent jusqu'au *la*$_6$ de 3 500 vibrations, et parfois jusqu'à l'*ut*$_7$ de 4 200 vibrations. On n'emploie que tout à fait exceptionnellement des notes plus élevées, dont l'extrême paraît être le *re*$_7$ de la petite flûte avec 4 700 vibrations par seconde. Les sons d'un bon usage en musique sont en réalité compris entre 30 et 4 000 vibrations dans un intervalle de 7 octaves.

CHAPITRE II

INTERVALLES MUSICAUX

333. Intervalles musicaux. — Bien que, d'après ce qui précède, les limites des sons musicaux soient assez resserrées, il s'en faut encore de beaucoup que tous les sons compris entre ces limites puissent être employés conjointement. Chez tous les peuples et à toutes les époques, dans la mélodie la plus simple comme dans l'harmonie la plus compliquée, les sons procèdent par intervalles déterminés et non d'une façon continue. Cette variation du son par degrés est aussi essentielle que le rythme à la nature même de la musique.

L'observation nous apprend en outre ce fait, que pour le moment nous nous bornons à constater sans chercher à l'expliquer : qu'il s'agisse de deux sons successifs (mélodie) ou simultanés (harmonie), l'oreille n'admet que les combinaisons où le rapport des nombres des vibrations est un nombre simple. Ce rapport définit l'*intervalle* des deux sons d'une façon complètement indépendante de leur hauteur absolue.

A l'unité correspond l'*unisson*.

Le rapport le plus simple ensuite est 2 ; c'est l'*octave ;* octave aiguë si le nombre des vibrations est double, octave grave s'il est moitié,

Vient ensuite le nombre 3, caractérisant la *douzième*, ou *quinte de l'octave ;* puis le nombre 4, définissant la *double octave ;* et ainsi de suite.

Cette série 1, 2, 3, 4, 5, ... constitue ce que l'on nomme la *série harmonique;* et les sons 2, 3, 4, 5, ... s'appellent les *harmoniques* (1) successifs du son 1.

(1) Les Allemands les nomment *tons supérieurs* ou *hypertons*, et cette appellation est peut-être plus convenable, tous les termes de la série n'étant pas vraiment en harmonie avec le son 1.

334. Intervalles consonnants. — Si l'on se borne aux intervalles compris dans l'espace d'une octave, l'application de la loi posée plus haut nous conduit aux intervalles suivants :

$\frac{1}{1}$ unisson,	$\frac{5}{4}$ tierce majeure,
$\frac{2}{1}$ octave,	$\frac{6}{5}$ tierce mineure,
$\frac{3}{2}$ quinte,	$\frac{5}{3}$ sixte majeure,
$\frac{4}{3}$ quarte,	$\frac{8}{5}$ sixte mineure.

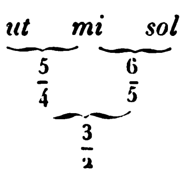
Cette dernière est la limite des consonances, limite qui n'a rien d'absolu. Mathématiquement, il n'y a pas de critérium indiquant où finissent les nombres simples; et, pratiquement, il n'y a pas de séparation tranchée entre les intervalles consonnants et les intervalles dissonants considérés isolément. C'est en réalité de la structure de la gamme que dépend cette séparation. Ainsi en même temps que les sept modes mélodiques des Grecs se réduisaient à nos deux gammes, majeure et mineure, la tierce, d'abord rangée parmi les dissonances, était admise au moyen âge comme consonnance imparfaite, mais on l'excluait encore de l'accord final, où plus tard elle fut introduite sous la forme majeure, tandis que l'on n'employa régulièrement la tierce mineure que vers le milieu du siècle dernier, afin de distinguer nettement le mode faible. L'adoption de la sixte mineure est également toute récente. Sur la plupart des instruments, l'intervalle de septième naturelle $\frac{7}{4}$ sonne au moins aussi bien que la sixte mineure; et cependant les intervalles formés avec le nombre 7 ne sont pas acceptés des musiciens. Cela tient moins à ce que le nombre 7 est trop grand (on en admet de plus grands) qu'à ce fait qu'il est premier, et se trouve ainsi complètement en dehors des autres intervalles de notre gamme. Il y a entre les derniers intervalles consonnants caractérisés par le nombre 5, c'est-à-dire les tierces et les sixtes, et les intervalles dissonants marqués par les nombres supérieurs, mais divisibles par 2, 3 ou 5, tels que la

seconde majeure, une véritable lacune formée par le nombre 7 [1].

Les intervalles dissonants ont d'ailleurs leur raison d'être en ce qu'ils servent de contraste et de préparation aux consonnances. Leur importance s'accroît chaque jour dans la musique moderne, qui ne craint pas de retarder le repos consonnant.

335. Accords. — La règle relative à l'association de deux sons s'étend aux combinaisons de plusieurs sons, ou *accords*. Pour qu'un accord formé de trois sons, ou davantage, soit consonnant, il faut que non seulement les intervalles des différents sons au son fondamental, mais encore les intervalles respectifs de ces sons entre eux soient exprimés par des nombres simples. Sinon, l'harmonie de l'accord sera troublée par quelque dissonance.

Le type des accords consonnants de trois notes est l'*accord parfait majeur*



constitué, comme on le voit, par deux tierces superposées, l'une majeure, l'autre mineure, donnant la quinte.

L'*accord parfait mineur*

$$\underbrace{\underbrace{ut \quad mi\flat}_{\frac{6}{5}} \quad \underbrace{\quad sol}_{\frac{5}{4}}}_{\frac{3}{2}}$$

présente les mêmes intervalles, mais groupés autrement, la tierce mineure en bas. Cette interversion ne suffirait pas à expliquer la

[1] Sans doute ce n'est pas chose impossible que le septième harmonique se crée une place en musique. Il est plus étrange que désagréable; et son étrangeté même vient plutôt de notre défaut d'habitude que de sa nature propre. Mais son emploi régulier ne pourrait s'introduire que par une révolution complète du système actuel (Voir BLASERNA, *Le son et la musique*, p. 78. Paris, Germer-Baillière ; 1879).

différence profonde des deux accords, si elle n'entraînait dans l'accord mineur un certain trouble, comme nous le verrons plus loin (389).

Les seuls accords consonnants de trois notes dans une octave sont

ut	*mi*	*sol*	*ut*	*mi♭*	*sol*
ut	*fa*	*la*	*ut*	*fa*	*la♭*
ut	*mi♭*	*la♭*	*ut*	*mi*	*la*

ou, si l'on écrit au lieu de *ut fa la* et de *ut fa la♭*, sol_{-1} *ut mi* et sol_{-1} *ut mi♭*, et au lieu de *ut mi♭ la♭* et de *ut mi la*, *mi sol* ut_2 et *mi♭ sol* ut_2 (ce qui permet de regarder également les *accords de sixte et de quarte*, et ceux *de sixte et de tierce* comme des renversements des accords fondamentaux, où d'un côté la quinte aurait été baissée, de l'autre la note basse aurait été haussée d'une octave),

ut	*mi*	*sol*			*ut*	*mi♭*	*sol*		
	mi	*sol*	ut_2			*mi♭*	*sol*	ut_2	
		sol	ut_2	mi_2			*sol*	ut_2	$mi♭_2$

ou

4	5	6			10	12	15		
	5	6	8			12	15	20	
		3	4	5			15	20	24

336. Gamme. — La *gamme* est la série des sons compris dans une octave et procédant suivant les intervalles admis.

Gamme diatonique. — Notre gamme actuelle se compose de sept notes (sans compter l'octave), qui sont définies par les nombres suivants, exprimant leurs rapports respectifs à la tonique :

ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	ut_2 [1]
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

ou en nombres entiers,

24	27	30	32	36	40	45	48.

(1) Ces noms des notes de la gamme ont été introduits, au onzième siècle,

Outre les intervalles consonnants définis plus haut, *tierce majeure* $\frac{5}{4}$, *quarte* $\frac{4}{3}$, *quinte* $\frac{3}{2}$, *sixte* $\frac{5}{3}$ et *octave* 2, dont les noms viennent, comme l'on voit, de leur place dans la gamme, nous y trouvons les intervalles dissonants de *seconde majeure* $\frac{9}{8}$ et de *septième majeure* $\frac{15}{9}$.

Toute cette gamme n'est que l'évolution de l'accord parfait majeur: l'accord qui a pour *tonique ut* donne le *mi* et le *sol*; si l'on part de la *dominante sol*, on trouve le *si* et le *ré*; si au contraire on forme un accord se terminant à l'*ut*, on obtient le *fa* et le *la*.

Les rapports des notes deux à deux, ou leurs intervalles successifs, sont :

ut – *ré*	*ré* – *mi*	*mi* – *fa*	*fa* – *sol*	*sol* – *la*	*la* – *si*	*si* – *ut*
$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

par le bénédictin Gui d'Arezzo, qui prit pour chaque note la première syllabe de chacun des vers du commencement de l'hymne à saint Jean : UT queant laxis REsonare fibris MIra gestorum FAmuli tuorum, SOLve polluti LAbii reatum, Sancte Ioannes.

Anciennement les notes étaient désignées par les premières lettres de l'alphabet, les différentes octaves s'écrivant comme il suit :

ABCDEFG abcdefg aabbcc.....

En tête de cette série on ajouta plus tard une note que l'on désigna par Γ, d'où le nom de *gamme* donné à l'échelle musicale. La désignation par lettres est encore usitée en Allemagne et en Angleterre :

Notation française.......	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*
— allemande......	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*
— anglaise........	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*

Pour distinguer les différentes octaves, nous employons simplement des indices. Dans la notation par lettres, on utilise les indices avec les majuscules et les accents avec les minuscules :

ut_{-2}	ut_{-1}	ut_1	ut_2	ut_3	ut_4	ut_5	ut_6	ut_7
C_2	C_1	C	c	c'	c''	c'''	c	c^{v},

le *la* du diapason étant $la_3 = a'$.

Ils forment trois catégories : les *tons entiers majeurs* $\frac{9}{8}$; les *tons entiers mineurs* $\frac{10}{9}$; et les *demi-tons majeurs* $\frac{16}{15}$.

On désigne ces derniers sous le nom de majeurs, pour les distinguer d'un autre intervalle, le *demi-ton mineur* $\frac{25}{24}$, que nous apprendrons bientôt à connaître.

Le ton entier mineur peut être considéré comme formé de la succession d'un demi-ton majeur et d'un demi-ton mineur ; on a en effet

$$\frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{10}{9},$$

et la somme de deux intervalles s'exprime par leur produit, comme un intervalle s'exprime par un quotient.

La distance d'un ton entier majeur à un ton entier mineur est $\frac{81}{80}$. Cet intervalle s'appelle un *comma*. Si on le néglige, on peut dire que la gamme est constituée par la succession de deux tons entiers, un demi-ton, trois tons entiers et un demi-ton. C'est notre gamme majeure, dérivée de la gamme de Pythagore.

Gamme pythagoricienne. — Les degrés de cette gamme étaient définis par les rapports suivants, qui ne renferment que les facteurs 2 et 3 :

	ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut*
	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2 ;
ou	1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2,

en d'autres termes, la gamme pythagoricienne procédait uniquement par quintes. Avait-on adopté cette échelle comme un moyen d'accorder facilement les cordes de la lyre, ou se rattachait-elle à ces harmonies des nombres auxquelles Pythagore avait été initié par les prêtres égyptiens ? Quelle qu'en soit la véritable origine, le principe, simple en apparence, conduisait, pour certains rapports, à des nombres très compliqués. Sans parler de la septième qui, n'étant guère qu'une note de passage, peut sans inconvénient être rapprochée de la tonique, la tierce et la sixte présentent une

complication qui les rend impropres à l'harmonie [1]. Les intervalles pythagoriciens seraient au contraire, d'après MM. Cornu et Mercadier [2], les véritables intervalles de la mélodie.

Pour déterminer la valeur exacte d'un intervalle mélodique ou harmonique, ils l'ont fait exécuter sur un violon, au cours d'une mélodie, ou en harmonie (deux cordes étant accordées ensemble à l'intervalle voulu), et ils ont inscrit successivement les deux notes par un dispositif très ingénieux. Sous le chevalet de l'instrument ils placent une petite lame de laiton mince L, adaptée à l'une des extrémités d'un long fil métallique, soutenu librement dans des bagues de caoutchouc. L'autre extrémité de ce fil est soudée à une lame de clinquant *c*, pincée dans un lourd support S. A cette lame est attachée par un peu de cire une barbe de plume *b* qui appuie sur un cylindre métallique M, recouvert d'un papier enfumé. Quand on fait parler une corde, ses vibrations se transmettent au chevalet, à la lame métallique, au fil, et enfin à la barbe de plume qui vibre

(1) Cette imperfection de la tierce et de la sixte a sans doute pour beaucoup empêché le développement de la musique harmonique chez les Grecs. La substitution de la tierce harmonique $\frac{5}{4}$ à la tierce discordante $\frac{81}{64}=\frac{5}{4}\cdot\frac{81}{80}$ a été sans contredit le progrès le plus important de notre gamme. Déjà au IVe siècle avant J.-C., Archytas donne la vraie valeur $\frac{5}{4}$ de la tierce majeure consonnante dans le mode enharmonique. Didyme, au Ier siècle de notre ère, l'introduit dans le trétrachorde diatonique qu'il divise ainsi

$$\underset{\frac{16}{15}}{\textit{si}\;\;\textit{ut}}\;\;\underset{\frac{10}{9}}{\;\;\textit{ré}}\;\;\underset{\frac{9}{8}}{\;\;\textit{mi}}.$$

Ptolémée dispose autrement ce tétrachorde qu'il appelle syntonique

$$\underset{\frac{16}{15}}{\textit{si}\;\;\textit{ut}}\;\;\underset{\frac{9}{8}}{\;\;\textit{ré}}\;\;\underset{\frac{10}{9}}{\;\;\textit{mi}}.$$

A part l'incertitude sur son partage entre les deux espèces de ton entier, la tierce majeure *ut* : *mi* s'y trouve avec la même valeur $\frac{9}{8}\times\frac{10}{9}=\frac{5}{4}$. Mais les Grecs n'ont pas utilisé cet intervalle comme consonnance. On a commencé au moyen âge à en faire une consonnance imparfaite. Notre gamme ne date réellement que de la fin du XVIe siècle (Zarlin).

(2) Cornu et Mercadier, C. R., 1869-72.

synchroniquement et inscrit sur le cylindre les oscillations de la corde à côté de celles d'un diapason chronographe D. MM. Cornu et Mercadier ont ainsi trouvé les intervalles harmoniques toujours d'accord avec les valeurs de notre gamme actuelle, tandis que les

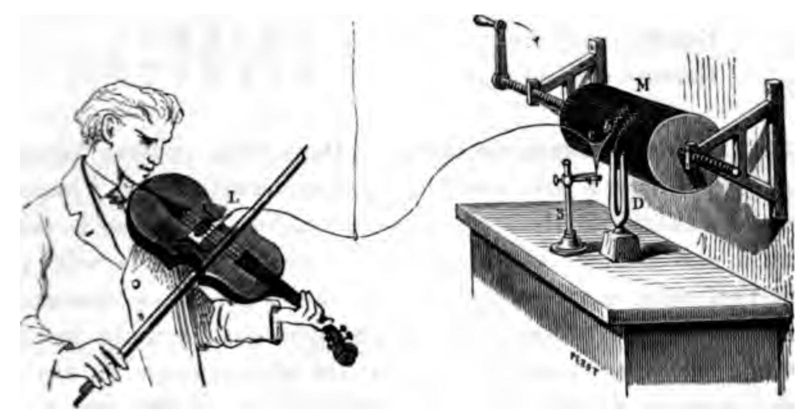


Fig. 26

intervalles mélodiques étaient ceux de la gamme pythagoricienne.

Les intervalles successifs des notes dans la gamme de Pythagore sont :

ut *ré* *mi* *fa* *sol* *la* *si* *ut*

$$\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}$$

Les tons entiers sont tous égaux entre eux et à notre ton entier majeur; les demi-tons, petits et compliqués, occupent les mêmes places que dans notre gamme ordinaire.

Gamme mineure. — La musique actuelle admet une deuxième gamme, caractérisée par la tierce mineure, et appelée en conséquence *gamme mineure*. Elle est composée des rapports suivants :

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 2,$$

dont les intervalles successifs,

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9},$$

sont les mêmes que dans la gamme majeure, mais autrement distribués.

En appelant T et T' les deux tons entiers et *t* le ton entier mineur, on a en effet :

Gamme majeure. . . . . . . T T' *t* T T' T *t*
Gamme mineure. . . . . . . T *t* T' T *t* T T' [1].

337. Changements de tons. — Dans notre système harmonique, la *tonique* a pris une place prépondérante. De là l'importance des changements de ton, non seulement pour placer le morceau à une hauteur convenant à l'instrument ou à la voix qui doit l'exécuter, mais encore pour mettre à profit les ressources que l'on trouve à quitter, puis à reprendre le ton primitif (*modulation*). En ce qui concerne la voix, les changements de ton ne présentent pas de difficulté : on peut toujours chanter un morceau à partir d'une note quelconque, les intervalles ne dépendant pas de la hauteur absolue des sons. Mais, sur la plupart des instruments, la transposition ne peut pas s'effectuer d'une façon aussi simple. Considérons par exemple un instrument à sons fixes, accordé naturellement sur notre échelle musicale actuelle, et supposons que l'on veuille y jouer la gamme majeure en partant d'un *sol*. On aura sur l'instrument :

sol *la* *si* *ut* *ré* *mi* *fa* *sol*
T' T *t* T T' *t* T,

c'est-à-dire (abstraction faite des deux sortes de ton entier au début) la série même des tons et des demi-tons caractéristiques de la gamme majeure, à cela près que le dernier demi-ton se place à l'avant-dernier rang au lieu d'être au dernier. Pour rétablir l'ordre pri-

[1] Telle est du moins la forme de la gamme descendante. En montant, on emploie de préférence la série

T *t* T' T T' T *t*,

composée de la première moitié de la gamme mineure et de la deuxième moitié de la gamme majeure.

mitif (au comma près), il suffira de hausser le *fa* d'un demi-ton mineur ou de le diéser, *diéser* signifiant multiplier par $\frac{25}{24}$, et par suite *bémoliser* multiplier par $\frac{24}{25}$ (¹). Si l'on veut reproduire exactement l'intervalle *si-ut*, il faut tirer le *fa*♯ du *sol* en abaissant celui-ci d'un demi-ton majeur; c'est la règle de Delezenne : pour diéser une note on multiplie par $\frac{15}{16}$ celle qui la suit dans l'ordre diatonique, pour la bémoliser on multiplie par $\frac{16}{15}$ celle qui la précède. L'école Galin-Paris-Chevé, qui professe la gamme de Pythagore, suit la même règle : seulement, comme le demi-ton pythagoricien est $\frac{256}{243}$, on dièse une note en abaissant la note immédiatement supérieure dans le rapport $\frac{243}{256}$ et on la bémolise en élevant de $\frac{256}{243}$; celle qui précède entre deux notes consécutives de la gamme, le dièse est alors plus aigu que le bémol, position admise par la plupart des solfèges publiés de nos jours.

338. Tempérament. — Quelque système que l'on adopte, on ne saurait introduire tous ces dièses et bémols dans un instrument à sons fixes. De cette impossibilité est né le *tempérament*. Après avoir essayé à plusieurs reprises de se contenter d'intervalles approximativement justes, de façon à pouvoir identifier les sons peu différents, on est arrivé à la *gamme tempérée* actuelle, dans laquelle l'octave est partagée en douze intervalles égaux entre eux et égaux par conséquent à $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$. Cet intervalle est pris pour demi-ton; chaque ton entier est regardé comme formé de deux demi-tons; et le dièse d'une note est supposé identique au bémol de la note immédiatement supérieure, ainsi que le montre le tableau suivant, dans lequel la colonne A contient les dièses et bémols suivant la vieille règle d'Aristoxène, encore généralement adoptée il y a cinquante ans, la colonne D, les notes modifiées suivant Delezenne (dans l'intervalle d'un ton entier

(¹) Dans la notation allemande, le dièse s'indique par *is* et le bémol par *es*, l'*e* se supprimant par euphonie après une voyelle : ainsi *ut* ♯ = *Cis*, *ré* ♭ = *Des* et *la*♭ = *As*.

mineur, les deux règles concordent); la colonne C, les notes d'après Chevé :

	GAMME DE PTOLÉMÉE. A	D	GAMME TEMPÉRÉE.	GAMME DE PYTHAGORE. C
ut	$1 = 1{,}00000$		$2^{\frac{0}{12}} = 1{,}00000$	$1 = 1{,}0000$
ut ♯	$\frac{25}{24} = 1{,}04167$	$\frac{135}{128} = 1{,}05469$	$2^{\frac{1}{12}} = 1{,}05946$	$\frac{256}{243} = 1{,}05350$
ré ♭	$\frac{27}{25} = 1{,}08000$	$\frac{16}{15} = 1{,}06667$		$\frac{2187}{2048} = 1{,}06787$
ré	$\frac{9}{8} = 1{,}12500$		$2^{\frac{2}{12}} = 1{,}12246$	$\frac{9}{8} = 1{,}12500$
ré ♯	$\frac{75}{64} = 1{,}17187$		$2^{\frac{3}{12}} = 1{,}18921$	$\frac{32}{27} = 1{,}18519$
mi ♭	$\frac{6}{5} = 1{,}20000$			$\frac{19683}{16384} = 1{,}20136$
mi	$\frac{5}{4} = 1{,}25000$		$2^{\frac{4}{12}} = 1{,}25992$	$\frac{81}{64} = 1{,}26563$
fa	$\frac{4}{3} = 1{,}33333$		$2^{\frac{5}{12}} = 1{,}33484$	$\frac{4}{3} = 1{,}33333$
fa ♯	$\frac{25}{18} = 1{,}38889$	$\frac{45}{32} = 1{,}40625$	$2^{\frac{6}{12}} = 1{,}41421$	$\frac{1024}{729} = 1{,}40467$
sol ♭	$\frac{36}{25} = 1{,}44000$	$\frac{64}{45} = 1{,}42222$		$\frac{729}{512} = 1{,}42383$
sol	$\frac{3}{2} = 1{,}50000$		$2^{\frac{7}{12}} = 1{,}49831$	$\frac{3}{2} = 1{,}50000$
sol ♯	$\frac{25}{16} = 1{,}56250$		$2^{\frac{8}{12}} = 1{,}58740$	$\frac{128}{81} = 1{,}58024$
la ♭	$\frac{8}{5} = 1{,}60000$			$\frac{6561}{4096} = 1{,}60181$
la	$\frac{5}{3} = 1{,}66667$		$2^{\frac{9}{12}} = 1{,}68179$	$\frac{27}{16} = 1{,}68750$
la ♯	$\frac{125}{72} = 1{,}73611$	$\frac{225}{128} = 1{,}75781$	$2^{\frac{10}{12}} = 1{,}78180$	$\frac{16}{9} = 1{,}77778$
si ♭	$\frac{9}{5} = 1{,}80000$	$\frac{19}{9} = 1{,}77778$		$\frac{59049}{32768} = 1{,}80202$
si	$\frac{15}{8} = 1{,}87500$		$2^{\frac{11}{12}} = 1{,}80775$	$\frac{243}{128} = 1{,}89844$
ut	$2 = 2{,}00000$		$2^{\frac{11}{12}} = 2{,}00000$	$2 = 2{,}00000$

Aucun intervalle n'est respecté. L'altération la plus grave porte sur la tierce, dont la différence avec la tierce naturelle s'élève à $\frac{1}{126}$, quantité qui n'est nullement négligeable : on s'en convaincra si l'on remarque que, dans la gamme moyenne du piano, le *mi* est par le fait du tempérament surélevé de 2,5 vibrations [1], tandis que, dans la même gamme, la différence entre la tierce majeure et la tierce mineure, différence suffisante pour changer complètement le caractère d'un morceau, ne monte qu'à 13 vibrations.

339. Diapason normal. — Les valeurs relatives des différentes notes de la gamme étant déterminées, et les gammes procédant par octaves successives, il suffit, pour fixer tous les sons, d'arrêter la valeur absolue de l'un d'eux.

Le son sur lequel se règlent tous les autres est le *la* du diapason, ou la_3.

Jadis ce repère n'était rien moins que fixe. Des mesures de Sauveur, les plus anciennes que l'on ait sur cet objet, il résulte qu'en 1700 le ton ordinaire de l'orgue et du clavecin, à Paris, était de 405 vibrations doubles par seconde. Pendant le dix-huitième siècle, les déterminations oscillent entre 410 et 425. En 1833, Scheibler trouvait, à Paris seulement : à l'Opéra, deux diapasons de 426,5 et 434, aux Italiens et au Conservatoire deux autres de 435 et 440,5. Quelques années plus tard, ces diapasons avaient encore monté; et, en 1857, Lissajous mesurait à l'Opéra 448. Pour arrêter cette progression désordonnée, un décret en date du 16 février 1859 a fixé, en France, le *la* du diapason à 435 vibrations par seconde [2].

La gamme naturelle réglée sur ce *la* est

ut_3	$ré_3$	mi_3	fa_3	sol_3	la_3	si_3	ut_4
261	293,625	326,25	348	391,5	435	489,375	522

[1] La tierce pythagoricienne est alors trop haute de 4 vibrations.

[2] Sauveur puis Chladni avaient pris pour point de départ un ut_3 de 256 vibrations, avec lequel chaque *ut* est une puissance de 2, et qui est encore fréquemment employé par les acousticiens : le la_3 vaut alors 426,66. En Allemagne, depuis la réunion de Stuttgard en 1834, on suit le *la* de Scheibler, battant 440 vibrations, nombre peu différent de celui du *la* français, mais plus commode pour les calculs. En Angleterre, le diapason est d'environ un demi-ton plus haut que chez nous.

et les octaves successives sont :

ut_{-2}	16,3125	ut_4	522
ut_{-1}	32,625	ut_5	1044
ut_1	65,25	ut_6	2088
ut_2	130,5	ut_7	4176
ut_3	261		

Au moyen de ces nombres et des intervalles fixés plus haut, on pourra aisément calculer le nombre de vibrations d'un son quelconque.

340. Logarithmes acoustiques. — Pour tous ces calculs, les intervalles étant des quotients, l'emploi des logarithmes est naturellement indiqué. Nous donnerons donc ci-dessous la table des principaux *logarithmes acoustiques* (on nomme ainsi les logarithmes des différents intervalles musicaux).

Intervalles.		Logarithmes acoustiques.	Intervalles.		Logarithmes acoustiques.
Unisson	1	0,000 0000	Tierce majeure	$\frac{5}{4}$	0,096 9100
Comma	$\frac{81}{80}$	0,005 3950	Quarte	$\frac{4}{3}$	0,124 9387
Demi-ton mineur	$\frac{25}{24}$	0,017 7288	Quinte	$\frac{3}{2}$	0,176 0913
Demi-ton tempéré	$\sqrt[12]{2}$	0,025 0858	Sixte mineure	$\frac{8}{5}$	0,204 1200
Demi-ton majeur	$\frac{16}{15}$	0,028 0287	Sixte majeure	$\frac{5}{3}$	0,221 8488
Ton entier mineur	$\frac{10}{9}$	0,045 7575	Septième mineure	$\frac{9}{5}$	0,255 2725
Ton entier majeur	$\frac{9}{8}$	0,051 1525	Septième majeure	$\frac{15}{8}$	0,273 0013
Tierce mineure	$\frac{6}{5}$	0,079 1812	Octave	2	0,301 0300

Le logarithme de 2 différant peu de 0,300, si on multiplie tous les logarithmes précédents par 2000, on aura les valeurs très approchées des divers intervalles en six-centièmes d'octaves, c'est-à-dire en centièmes de ton. En retranchant de chaque produit le $\frac{1}{300}$

de ce produit même, on trouvera le nombre exact (à moins d'une unité). On obtiendra ainsi immédiatement les valeurs, en centièmes de tons, des intervalles ci-dessus mentionnés :

Unisson	0	Tierce majeure	193
Comma	11	Quarte	249
Demi-ton mineur	35	Quinte	351
Demi-ton tempéré	50	Sixte mineure	407
Demi-ton majeur	56	Sixte majeure	442
Ton entier mineur	91	Septième mineure	509
Ton entier majeur	102	Septième majeure	544
Tierce mineure	158	Octave	600

CHAPITRE III

PROPAGATION DU SON

341. Propagation du mouvement vibratoire dans un milieu élastique. — Quand un ébranlement quelconque est produit en une certaine région d'un milieu élastique, cet ébranlement se communique de proche en proche jusqu'aux parties les plus éloignées.

Un exemple vulgaire de ce fait, exemple déjà signalé par les stoïciens, se présente dans les rides excitées à la surface de l'eau par une pierre qu'on y lance : autour du point frappé se forme une dépression, suivie bientôt d'un relèvement ; puis vallée et montagne se propagent à la surface de l'eau sous l'aspect d'une ride circulaire dont le rayon s'accroît progressivement. Si en même temps on observe quelque objet léger, un brin de paille, flottant à la surface liquide, on le voit au passage de l'onde s'abaisser un instant, puis se soulever, retomber ensuite, sans éprouver d'ailleurs de translation sensible. Ce n'est donc pas l'eau qui se déplace, c'est le mouvement qui progresse, en se transmettant à de nouvelles molécules, tandis que celles qu'il animait auparavant reviennent au repos.

342. Ondes liquides. — D'après les frères Ernest-Henri et Guillaume Weber [1] qui ont fait une étude expérimentale approfondie des ondes liquides, la trajectoire la plus ordinaire d'une molécule y est un cercle. Supposons, pour fixer les idées, que chaque molécule décrive uniformément un tour entier pendant que le mouvement se propage de la molécule o à la molécule 12. Au bout

[1] E.-H. et W. Weber, *Wellenlehre auf Experimente gegründet*. Leipzig ; 1825.

d'un quart de période, la molécule o est arrivée au point le plus bas de sa course, à l'extrémité inférieure du diamètre vertical, les molécules 1 et 2 ont exécuté respectivement $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$ de tour, tandis que les molécules 3 à 12 sont encore immobiles. Après une

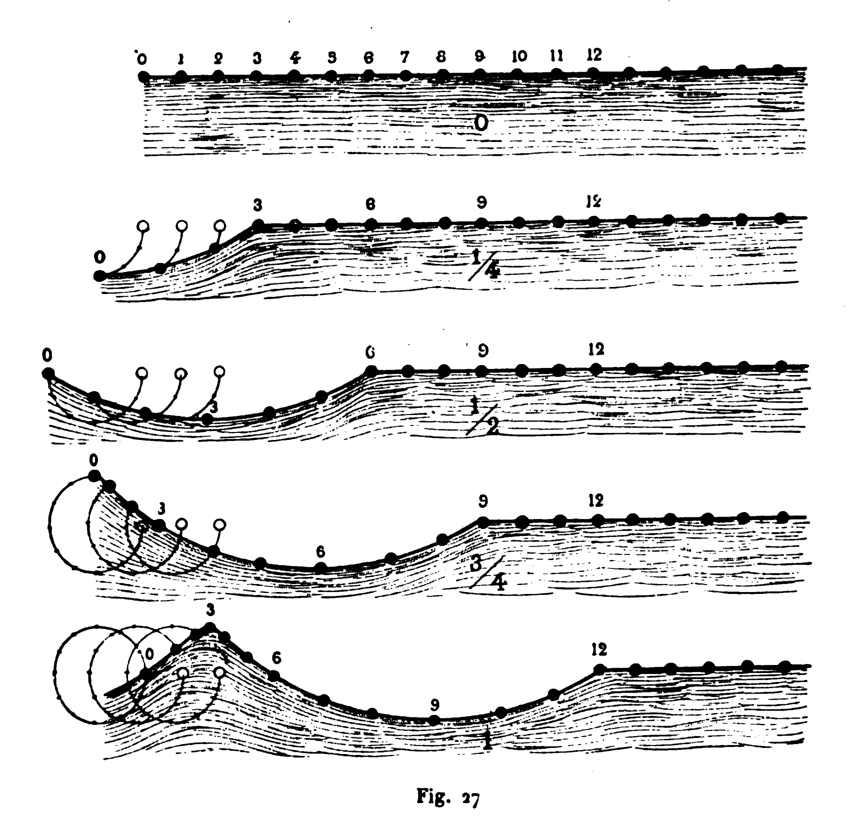


Fig. 27

demi-période, quand le front de l'onde atteint la molécule 6, la molécule o est revenue à son niveau primitif, mais à l'extrémité du diamètre horizontal opposée à son point de départ : l'élongation dans le sens horizontal est alors à son maximum ; les molécules 1 et 2 remontent après avoir décrit les $\frac{5}{12}$ et les $\frac{4}{12}$ de la circonférence ; les molécules 3, 4 et 5, qui ont parcouru les $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$ de leur orbite, sont actuellement dans la situation même où se trouvaient après un quart de période les molécules o, 1 et 2. Une vallée s'est

ainsi dessinée à la surface de l'eau. Une montagne va suivre : une pente a déjà surgi après trois quarts de période ; l'autre versant s'ajoute dans le dernier quart ; et au bout d'une période entière, l'onde est complètement formée et s'étend de o à 12. Elle va se propager ensuite, en présentant toujours le val avec ses molécules écartées et le mont avec ses molécules pressées.

Imaginons maintenant qu'après ce premier tour, la molécule o continue à se mouvoir régulièrement sur son orbite : à la suite de

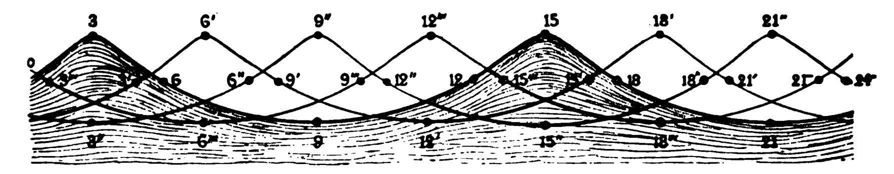


Fig. 28

la première onde vont cheminer d'autres ondes identiques, ainsi que l'indique la figure 28 ([1]).

343. Vibrations longitudinales ; vibrations transversales. — De circulaire qu'elle était, la trajectoire d'une molécule peut devenir elliptique. Elle peut même se réduire à une droite verticale, sur laquelle la molécule se déplace comme se déplaçait sur le diamètre la projection du mobile décrivant un cercle. La montagne devient alors exactement l'inverse de la vallée : le profil de l'onde se compose de deux arcs symétriques de sinussoïde. Quand la direction de la vibration est ainsi perpendiculaire au sens de la propagation du mouvement, la vibration est dite *transversale*. Telles sont, par exemple, celles des cordes d'un violon. La propagation des vibrations transversales s'observe aisément sur une corde élastique et faiblement tendue, de plusieurs mètres de longueur (tube de caoutchouc ([2])

([1]) Le phénomène est en réalité très complexe. Quand un groupe d'ondes se propage sur une eau tranquille, on voit les ondes avancer à l'intérieur du groupe et venir mourir en tête ; la vitesse du groupe est donc moindre que celle des ondes constituantes. M. Boussinesq, lord Rayleigh et M. Gouy ont publié d'intéressantes recherches sur ce sujet.

([2]) Ce sera par exemple un tube de caoutchouc tombant librement du plafond sous l'effort de son propre poids, que l'on aura, s'il le faut, augmenté en remplissant de sable le canal intérieur.

ou spirale de laiton), fixée à un bout et tenue à la main par l'autre bout. Si l'on déplace vivement la main dans un sens perpendiculaire à la direction de la corde, l'ébranlement parcourt la corde entière sous la forme d'une onde nettement visible ; et si l'on imprime avec la main des secousses convenablement rythmées, on voit une série d'ondulations se transmettre très régulièrement jusqu'à l'extrémité la plus éloignée. Ici encore il est bien évident que ce qui se propage c'est le mouvement, tandis que chaque molécule n'éprouve qu'un déplacement transversal.

Au lieu de s'effectuer perpendiculairement à la direction de la propagation, le déplacement des molécules vibrantes peut se produire dans le sens même de la propagation. Tel est le cas de certaines vibrations sonores cheminant dans les solides et de toutes celles qui se propagent dans les liquides et les gaz. C'est assez dire l'importance considérable des vibrations *longitudinales* en acoustique.

344. Propagation d'un ébranlement longitudinal dans un cylindre élastique. — L'expérience de Mariotte avec les sept billes d'ivoire (191) montre d'une manière saisissante le mode

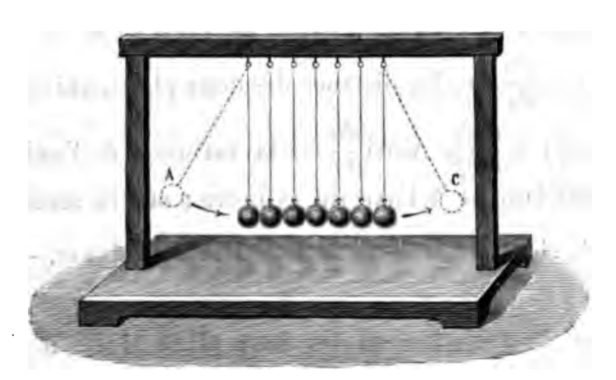


Fig. 29

de propagation d'un ébranlement longitudinal dans un milieu élastique, chaque bille recevant toute la vitesse de la bille précédente, qui rentre désormais au repos, puis transmettant cette même vitesse à la bille suivante : le mouvement progresse ainsi uniformément et sans rétrograder.

Soit une colonne cylindrique d'un milieu élastique quelconque. Un ébranlement a été produit dans une certaine région, les molécules d'une même section orthogonale ayant reçu des déplacements égaux et des vitesses égales parallèlement à l'axe du cylindre, les déplacements et les vitesses variant d'ailleurs d'une section à l'autre suivant une loi quelconque dans toute l'étendue de la région considérée. Les forces élastiques qui résultent du déplacement des molécules directement ébranlées, déterminent le déplacement des molécules voisines, d'où naissent de nouvelles forces élastiques qui déplacent les molécules plus éloignées; et l'ébranlement se propage dans la colonne, toutes les molécules situées dans une même section orthogonale prenant à la fois le même mouvement parallèle à l'axe du cylindre.

Un plan M, situé à la distance x de l'origine, est venu à l'époque t en M', à la distance $x+u$. Un plan infiniment voisin M_1,

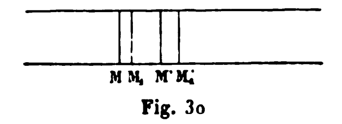


Fig. 30

situé au début à la distance $x+dx$, est venu en M'_1, à la distance $x+dx+u+\frac{du}{dx}dx$. La distance des deux plans, qui était dx, est devenue $dx\left(1+\frac{du}{dx}\right)$. Ainsi $\frac{du}{dx}$ est la variation de l'unité de longueur parallèlement à l'axe du cylindre; ou, la section n'ayant pas changé, si l'on considère la variation de volume, $-\frac{du}{dx}$ est la *condensation* γ.

Par suite de l'écartement des deux plans $M'M'_1$, il s'est développé entre eux une force élastique proportionnelle à la déformation (135), valant en conséquence $E\frac{du}{dx}$ par unité de surface. Cette force élastique étant égale et de signe contraire à celle qui a produit la déformation, celle-ci aura pour expression $-E\frac{du}{dx}$, le signe $-$ indiquant que la force appliquée au plan M est dirigée vers la gauche. Sur un plan N, situé à la distance $x+\delta x$, agit

de même une force extérieure, dirigée vers la droite, et égale à $E\left(\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\delta x\right)$. Sur la tranche MN s'exerce donc, dans le sens

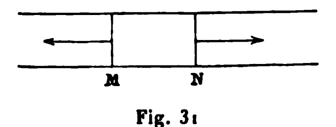


Fig. 31

des x positifs, par unité de surface, une force $E\frac{d^2u}{dx^2}\delta x$. D'autre part, la force agissante, étant égale au produit de la masse par l'accélération, a pour expression $\delta x.D.\frac{d^2u}{dt^2}$, si l'on désigne par D la densité du milieu.

On a donc

$$D\frac{d^2u}{dt^2}=E\frac{d^2u}{dx^2},$$

ou, en posant $a^2=\frac{E}{D}$,

$$\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Cette équation, que nous retrouverons dans l'étude des cordes vibrantes, a pour intégrale générale, donnée pour la première fois par d'Alembert,

$$u=f(x+at)+F(x-at),$$

f et F étant deux fonctions arbitraires.

On en déduit pour la vitesse v et la condensation γ, en un point quelconque x du cylindre et à une époque quelconque t,

$$v=\frac{du}{dt}=af'(x+at)-aF'(x-at),$$

et

$$\gamma=-\frac{du}{dx}=-f'(x+at)-F'(x-at).$$

Les fonctions f' et F' sont définies par les conditions initiales. Les

vitesses et les condensations étant données à l'époque $t=0$ dans toute l'étendue de l'ébranlement initial, les quantités

$$v_0 = af'(x) - aF'(x) = \varphi(x)$$

et

$$\gamma_0 = -f'(x) - F'(x) = -\psi(x)$$

sont des fonctions connues de x ; les fonctions f' et F' sont donc déterminées :

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) + a\psi(x)}{2a},$$

et

$$F'(x) = \frac{-\varphi(x) + a\psi(x)}{2a}.$$

On en conclut

$$v = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+at) + a\psi(x+at) + \varphi(x-at) - a\psi(x-at)\Big],$$

$$\gamma = -\frac{1}{2a}\Big[\varphi(x+at) + a\psi(x+at) - \varphi(x-at) + a\psi(x-at)\Big].$$

Ces équations résolvent complètement la question.

Supposons l'ébranlement initial limité entre les deux sections $x=0$ et $x=l$. Alors les fonctions φ et ψ sont nulles pour toute valeur de la variable plus petite que 0 et plus grande que l.

Nous partagerons l'étendue du cylindre en trois régions :

1° Considérons d'abord un point situé du côté des x positifs au delà de l. Dans un tel point, les termes $\varphi(x+at)$ et $\psi(x+at)$ sont toujours nuls ; les expressions générales de la vitesse et de la condensation se réduisent donc à

$$v = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x-at) - a\psi(x-at)\Big]$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2a}\Big[\varphi(x-at) - a\psi(x-at)\Big].$$

Il en résulte entre la vitesse et la condensation la relation remarquable

$$v = a\gamma.$$

Mais, pour que ces quantités v et γ ne soient pas nulles, il faut que l'on ait

$$l > x - at > 0,$$

ou

$$\frac{x-l}{a} < t < \frac{x}{a}.$$

Ainsi, le point x demeure au repos jusqu'à l'époque $\frac{x-l}{a}$, il entre alors en mouvement pour retomber au repos à l'époque $\frac{x}{a}$, tandis que l'ébranlement se propage au delà, en restant semblable à lui-même puisque la variable $x - at$ présente en chaque point la même série de valeurs de l à o. A une époque t, les seuls points en mouvement sont ceux qui se trouvent compris entre les deux tranches pour lesquelles on a $x - at = l$ et $x - at = 0$. Une onde de longueur l se propage dans le sens des x positifs avec la vitesse constante

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}}.$$

Il est à remarquer que cette vitesse est indépendante de la forme de l'onde, ou de la loi de l'ébranlement initial.

2° Du côté des x négatifs, de o à $-\infty$, les termes $\varphi\,(x - at)$ et $\psi(x - at)$ étant toujours nuls, la vitesse et la condensation ont pour expressions

$$v = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + a\psi(x+at)\right],$$

et

$$\gamma = -\frac{1}{2a}\left[\varphi(x+at) + a\psi(x+at)\right];$$

par suite

$$v = -a\gamma.$$

On retrouve entre la vitesse et la condensation le même rapport constant, au signe près ; et l'on reconnaîtrait aisément que le mouvement se propage du côté des x négatifs avec la même vitesse a, en restant encore à chaque instant enfermé dans une onde de longueur l, mais en présentant dans cette onde des vitesses et

des condensations différentes de celles de la première onde.

3° Dans la région enfin où s'est produit l'ébranlement initial, entre les plans $x = 0$ et $x = l$, l'état d'un point à chaque instant est celui qui résulterait de la superposition des vitesses et des condensations afférentes aux deux ondes dans la position qu'elles occuperaient à cet instant (¹).

Si, au lieu d'un ébranlement unique, on considère un mouvement vibratoire périodique entretenu par une cause quelconque dans une région déterminée du cylindre, en substituant à ce mouvement une série d'ébranlements élémentaires on verra sans peine que le mouvement vibratoire originel donne naissance à deux mouvements vibratoires de même période, se propageant en sens opposé avec la même vitesse a.

Suivons l'un de ces mouvements ; et, pour fixer les idées, imaginons que l'impulsion initiale provienne de l'une des branches d'un diapason placé en face de l'ouverture O d'un long tuyau cylindrique d'axe OX. Supposons qu'au début cette branche se trouve à son plus grand éloignement de l'origine du tuyau : elle va d'abord s'en rapprocher en poussant la tranche d'air adjacente et lui communiquant successivement toute la série des vitesses qu'elle prend elle-même. Cette première tranche, déplacée et comprimée, agira sur une deuxième, qui se comportera de même avec une troisième, et ainsi de suite, les impulsions se transmettant uniformément d'une tranche à la suivante, de sorte que les états élémentaires originels équidistants dans le temps se retrouveront à un même instant équidistants dans l'espace.

Pour représenter l'état de l'air dans chaque tranche, nous porterons en abscisse la distance de cette tranche à l'origine, et en ordonnée la vitesse comptée positivement dans le sens de la propagation du mouvement et négativement en sens contraire. Nous

(¹) Des deux ondes de même longueur mais de conditions différentes, qui se propagent ainsi en sens inverse avec la même vitesse a, il peut arriver que l'une fasse défaut. Il suffit pour cela qu'entre les vitesses et les condensations initiales existe le rapport $\pm a$. En effet, la condition $v = a\gamma$, par exemple, entraîne la nullité de la fonction f ; par suite $\varphi(x) = -a\psi(x)$; l'expression de la vitesse se réduit à $v = -a\psi(x - at)$; et comme pour toute valeur négative de la variable la fonction ψ est nulle, de pareilles valeurs rendront toujours la vitesse nulle. La première onde existera seule.

aurons alors, après 1/4, 1/2, 1 période, les trois courbes ci-contre où se voient éparpillées sur toute la longueur de la colonne trou-

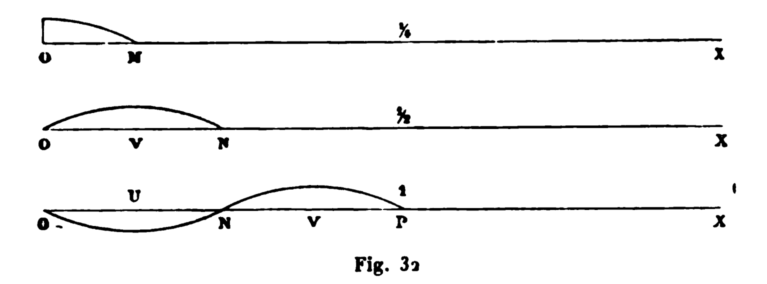


Fig. 32

blée les vitesses qui ont successivement animé la tranche originelle pendant la durée de 1/4, 1/2, 1 vibration. On appelle *longueur de l'onde* la distance OP à laquelle le mouvement se transmet pendant la durée d'une vibration.

Les mêmes courbes peuvent être considérées comme représentant les condensations, proportionnelles aux vitesses. Soit par exemple la dernière courbe, relative à l'onde entière : à partir du front P de l'onde, la condensation croît comme la vitesse, jusqu'à une distance PV égale au quart de la longueur d'onde ; vitesse et condensation vont ensuite en décroissant et s'annulent ensemble au milieu N de l'onde ; puis les vitesses reprennent des valeurs égales et contraires à celles qu'elles ont affectées sur la première moitié de l'onde, tandis que des dilatations reproduisent en sens inverse la série des condensations antérieures.

Le mouvement vibratoire continuant à l'origine, tandis que cette première onde se propagera d'un mouvement uniforme, de nouvelles ondes marcheront à sa suite avec la même vitesse a ; et à un instant quelconque l'état de l'air dans le tuyau sera figuré par une

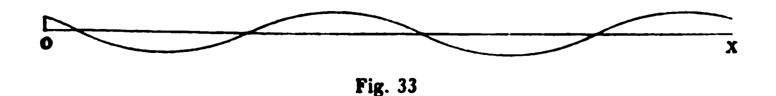


Fig. 33

série d'arcs égaux, alternativement positifs et négatifs, l'ordonnée à l'origine représentant l'état actuel de la tranche directement actionnée par le diapason.

345. Vitesse du son dans l'air. — *Vitesse dans un tuyau.* La formule

$$a=\sqrt{\frac{E}{D}}\ (^1)$$

est générale.

Appliquons-la d'abord à la détermination de la vitesse de propagation d'un ébranlement dans une colonne cylindrique d'air ou de tout autre gaz suffisamment éloigné de son point de liquéfaction. La condensation γ étant toujours supposée très petite, si l'on regarde les changements de pression du gaz, dans ses condensations et dilatations successives, comme régis par la loi de Mariotte,

$$pv=C^{te},$$

on aura pour l'accroissement de pression correspondant à la condensation γ

$$dp=-\frac{pdv}{v}=p\gamma.$$

Mais

$$E=\frac{dp}{\gamma}.$$

Donc

$$a=\sqrt{\frac{p}{D}}. \qquad (\textit{formule de Newton})$$

Dans cette formule p et D représentent, évaluées en unités mécaniques, la pression et la densité actuelles de la colonne gazeuse. On a donc

$$p=gmh,$$

et

$$D=\delta\frac{h}{H}\frac{1}{1+\alpha t},$$

en appelant

g l'accélération due à la pesanteur (à Paris 981),

h la hauteur barométrique, en centimètres,

(1) E désigne le rapport de l'accroissement de pression dp à la condensation correspondante γ. On a donc encore, $D\gamma$ étant l'accroissement de la densité dD,

$$a=\sqrt{\frac{dp}{dD}}.$$

H la hauteur barométrique normale, 76,
m la densité (masse de l'unité de volume) du mercure,
δ la densité du gaz à zéro et sous la pression 76,
α le coefficient de dilatation du gaz,
t la température.

Par suite

$$a=\sqrt{gH\frac{m}{\delta}(1+\alpha t)},$$

valeur indépendante de h.

Effectuons le calcul pour l'air, en remarquant que $\frac{m}{\delta}=\frac{13,596}{0,001293}$; nous trouvons

$$a=280^m\sqrt{1+\alpha t}.$$

Cette valeur est inférieure de $\frac{1}{6}$ à celle que fournit l'expérience.

La cause de ce désaccord ne fut découverte qu'en 1816 par Laplace. Il fit observer qu'en raison de la mauvaise conductibilité des gaz et de la rapidité de la propagation du son, la chaleur développée dans une couche par le fait de sa condensation ne peut pas se répandre immédiatement dans la masse entière; on ne saurait donc appliquer ici la loi de Mariotte, qui suppose la température constante. Si au contraire la chaleur reste entièrement localisée dans la couche où elle s'est produite, le phénomène est régi par la formule de Poisson

$$pv^{\frac{C}{c}}=C^{te},$$

$\frac{C}{c}$ étant le rapport de la chaleur spécifique du gaz sous pression constante à sa chaleur spécifique à volume constant.

On a alors

$$dp=\frac{C}{c}\frac{pdv}{v}$$

et par suite

$$a=\sqrt{\frac{p}{D}\frac{C}{c}}. \qquad \textit{(formule de Laplace)}$$

Le nombre de Newton doit donc être multiplié par $\sqrt{\frac{C}{c}}$, soit pour l'air sensiblement $\sqrt{1,41}$ ou $1,1874$, ce qui rétablit l'accord ($280.1,1874 = 332,4$).

Malgré cet accord, on peut se demander si l'hypothèse de Laplace est réellement exacte. En fait, n'y a-t-il point quelque portion de la chaleur produite qui échappe par conduction ou par rayonnement ([1]), et par suite la vitesse réelle dans l'air n'est-elle pas inférieure à cette vitesse théorique? Stokes ([2]) a montré que l'hypothèse de Newton et celle de Laplace sont les deux seules dans lesquelles la dilatation succède à la compression sans dépense de travail. Hors de ces deux cas, en quelque sorte extrêmes, le cycle complet d'une dilatation et d'une compression ne peut être parcouru qu'avec consommation d'une certaine quantité d'énergie : le son devrait alors s'éteindre à tel court délai que ne nous offre nullement la nature. Les deux hypothèses précédentes sont donc les seules admissibles.

D'ailleurs la formule de Laplace, comme celle de Newton, donne pour la vitesse du son un nombre constant, indépendant et de la hauteur du son et de la pression barométrique au lieu de l'expérience.

Il importe de remarquer, après Regnault, que tous ces calculs ne conviennent qu'à des ébranlements très petits. Quand la condensation et la variation de pression ne pourront plus être considérées comme des différentielles, le changement de pression $p' - p$ correspondant à la variation de volume $v' - v$ devra se calculer par la formule

$$p' - p = p\,\frac{v^{\frac{C}{c}} - v'^{\frac{C}{c}}}{v'^{\frac{C}{c}}},$$

([1]) Dans un milieu donné, la rapidité des alternatives de condensation et de dilatation règlera seule le phénomène. Au-dessous d'une certaine lenteur, la température aura le temps de s'égaliser, l'hypothèse de Newton sera la vraie ; au-dessus d'une certaine rapidité, la chaleur restera confinée au lieu où elle sera produite, la formule de Laplace donnera la vitesse. La question est donc de savoir si la rapidité des vibrations sonores est suffisante pour déterminer dans l'air cette localisation absolue (voir lord Rayleigh, *Theory of sound*, II, 23 ; 1878).

([2]) Stokes, *Phil. mag.*, (4), I, 305 ; 1851.

ou, si l'on pose toujours $v' = v(1-\gamma)$,

$$p'-p = p\left[(1-\gamma)^{-\frac{C}{c}}-1\right],$$
$$= p\left[\frac{C}{c}\delta + \frac{\frac{C}{c}\left(\frac{C}{c}+1\right)}{1.2}\gamma^2 + \dots\right],$$

d'où

$$E = p\frac{C}{c} + p\frac{\frac{C}{c}\left(\frac{C}{c}+1\right)}{1.2}\gamma + \dots$$

L'élasticité du gaz n'est donc pas constante, comme nous l'avons supposé jusqu'ici : elle croît avec γ, et il en est de même par conséquent de la vitesse du son. La vitesse du son est plus grande pour les fortes intensités ; et c'est seulement pour les ébranlements infiniment petits qu'elle est constante et égale à

$$a = \sqrt{\frac{p}{D}\frac{C}{c}}.$$

Même vitesse dans l'air libre. — Tous les raisonnements qui précèdent s'appliquent à la propagation du son dans l'air libre, avec cette seule différence que l'intensité du son s'affaiblit selon la distance, tandis que dans un tuyau cylindrique dont les parois n'auraient pas d'autre effet sur la masse gazeuse que de la limiter,

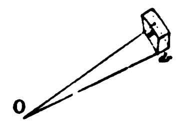


Fig. 34

l'ébranlement se propagerait sans altération, et par suite l'intensité du son resterait constante à une distance quelconque [1]. Soit en effet, dans un milieu isotrope indéfini, un ébranlement circonscrit au

[1] De fait, la diminution d'intensité dans les tuyaux cylindriques est faible, et l'on emploie couramment des *tubes acoustiques* pour transmettre la voix à d'assez grandes distances.

début à l'intérieur d'une petite sphère de rayon ε et se propageant ensuite dans toutes les directions. Considérons, à la distance r du centre d'ébranlement, une tranche sphérique d'épaisseur δr : les pressions sur les deux bases ω et ω' de cette tranche auront pour expression

$$-\omega E\frac{du}{dr} \quad \text{et} \quad \omega' E\left(\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}\delta r\right),$$

et la force agissante sera

$$F=\omega' E\left(\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}\delta r\right)-\omega E\frac{du}{dr}.$$

Mais

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{(r+\delta r)^2}{r^2},$$

d'où

$$\omega'=\omega\left(1+2\frac{\delta r}{r}\right).$$

D'ailleurs

$$F=\omega\delta r.D.\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{a^2}{r}\left(2\frac{du}{dr}+r\frac{d^2u}{dr^2}\right).$$

Si l'on pose $u=\frac{\upsilon}{r}$, il vient

$$\frac{d^2\upsilon}{dt^2}=a^2\frac{d^2\upsilon}{dr^2},$$

équation identique à celle que nous avons trouvée plus haut. On a donc

$$\upsilon=f(x+at)+F(x-at),$$

et par suite

$$u=\frac{1}{r}\Big[f(x+at)+F(x-at)\Big].$$

Ainsi le mouvement se propage en tous sens avec la même vitesse a que dans un cylindre indéfini, tandis que sur un rayon donné la vitesse de chaque molécule varie en raison inverse de la distance au centre.

Par suite, la force vive du mouvement en un point est en raison inverse du carré de la distance de ce point au centre ; et comme cette force vive mesure l'intensité, on voit que l'intensité du son dans un milieu indéfini varie en raison inverse du carré de la distance.

Cette proposition est évidente géométriquement : la même quantité d'énergie se répartissant sur des surfaces sphériques qui

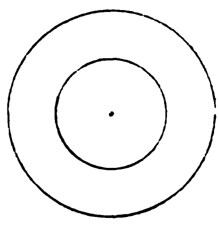


Fig. 35

vont en croissant comme les carrés de leurs rayons, la portion reçue par une même étendue de chacune de ces surfaces est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre.

346. Déterminations expérimentales. — *Premières mesures.* — Les anciens avaient déjà remarqué que le son se propage dans l'air avec une certaine lenteur (1). Les premières déterminations numériques sont dues au P. Mersenne (2). Bien qu'il ait posé assez nettement les conditions du problème, Mersenne n'effectua lui-même que des mesures grossières : d'après le temps écoulé entre

(1) Cædere si quem
Ancipiti videas ferro procul arboris auctum,
Ante fit ut cernas ictum quam plaga per auris
Det sonitum ; sic fulgorem quoque cernimus ante
Quam tonitrum accipimus.....
(Lucrèce, *De rerum natura*, V.I)

(2) Mersenne, *loc. cit.*, *De arte ballistica*, prop. 39. On attribue souvent la première détermination de la vitesse du son dans l'air à Gassend (vulg. Gassendi), qui, d'après Musschenbrœk (*Introductio ad philosophiam naturalem*, II, 920, § 2236. Lugd. Batav. ; 1762), aurait trouvé pour cette vitesse 1473 pieds (478 mètres). Mais dans son ouvrage posthume (Gassendi *opera omnia*, I, Physicæ sectio I, lib. VI, cap. X : De sono. Lugduni, Anisson et Devenet ; 1658), après avoir déclaré que l'impulsion se transporte dans l'espace avec la même vitesse, que le son vienne d'un canon ou d'un mousquet, Gassend rapporte simplement le nombre de Mersenne.

les instants où il percevait la lumière et ensuite le bruit d'une arme à feu éloignée, il estima la vitesse du son dans l'air à 1380 pieds (448 mètres) par seconde. Un peu plus tard (1656), les physiciens florentins Borelli et Viviani [1], par la même méthode employée avec plus de soin, obtinrent un nombre plus approché, 1077 pieds (350 mètres).

Après que Newton eut donné la formule de la vitesse de propagation du son, les déterminations expérimentales se succédèrent rapidement :

Boyle [2].	1126^p	(366^m)
Cassini (Dom.), Huyghens, Picard, Römer [3].	1097	(356)
Flamstead et Halley [4].	1071	(348)
Derham [5].	1071	(348)

Sauf peut-être celles de Derham qui découvrit l'influence du vent sur la vitesse de propagation du son, ces mesures, et d'autres que j'omets, ne firent avancer en rien la question, dont les difficultés n'étaient pas encore exactement saisies.

Expériences des Académiciens de Paris [6]. — En 1738, l'Académie des Sciences nomma une Commission composée de Cassini de Thury, Lacaille et Maraldi, à l'effet de déterminer la vitesse du son. On choisit pour stations la pyramide de Montmartre, l'Observatoire de Paris, le moulin de Fontenay-aux-Roses, le château de Lay, la tour de Montlhéry et parfois le clocher de Dammartin. Des pièces de canon, de 12 et de 8 livres de balles, installées sur les hauteurs de Montmartre et de Montlhéry, tiraient alternativement toutes les demi-heures. Les observateurs placés aux diverses stations notaient le temps écoulé entre la perception du feu et celle du bruit; la lumière se transmet avec une telle rapidité que l'on pouvait sans

[1] BORELLI et VIVIANI, dans les *Saggi di sperienze fatte nell' Accademia del Cimento*, chap. XI.

[2] BOYLE, d'après Poggendorff, *Histoire de la physique* (éd. fr.), p. 483.

[3] CASSINI, PICARD, RŒMER, *Regiæ scientiarum academiæ historia*, lib. II, sect. 3, cap. II; ann. 1677.

[4] FLAMSTEAD et HALLEY, *Phil. Trans.*, 1708 et 1709.

[5] DERHAM, *Phil. Trans.*; 1708.

[6] CASSINI DE THURY, *Mémoires de l'Académie des sciences;* année 1738.

erreur sensible regarder ce temps comme étant celui que le son avait réellement mis à franchir la distance parcourue.

Voici, par exemple, le détail d'une série d'expériences, celle du 14 mars 1738, le vent étant très faible et perpendiculaire à la direction de la propagation.

« A 9^h30^m, le premier coup de canon tiré à Montmartre fut entendu à l'Observatoire 16^s, à Lay 36^s et à Montlhéry 1^m25^s après le feu. Le second coup de canon fut entendu à l'Observatoire $16^s\,1/2$, à Lay 36^s après la lumière; à Montlhéry, la grande foule de peuple qui était accourue empêcha d'en faire l'observation exactement. A 10^h0^m, le premier coup de canon tiré à Montlhéry, fut entendu à Lay 48^s et à l'Observatoire $1^m7^s\,1/2$ après la lumière; mais on ne put entendre le bruit à Montmartre, non plus que du second coup de canon qui fut entendu à Lay 48^s et à l'Observatoire un peu moins de 1^m8^s après la lumière. Suivant ces observations on trouve que depuis Montlhéry jusqu'à Lay, l'intervalle du temps entre le son et la lumière a été de 48^s; depuis Lay jusqu'à l'Observatoire, 20^s, et depuis l'Observatoire jusqu'à Montmartre $16^s\,1/2$, l'une portant l'autre. Et comme les quatre points dont il s'agit sont sensiblement en ligne droite, la somme $1^m24^s\,1/2$ doit être égale à la durée de la transmission directe de Montmartre à Montlhéry, et c'est précisément ce qui a lieu, puisque ce temps s'est trouvé égal à 1^m25^s. Cette observation est encore remarquable en ce que dans la même nuit on entendit à Paris le canon de Montlhéry et réciproquement. Or, si des causes quelconques avaient pu accélérer la propagation du son dans le premier de ces trajets, elles l'auraient retardé dans l'autre; en sorte que la moyenne des deux observations doit donner la vitesse exacte de propagation. »

Par un assez grand nombre d'expériences effectuées ainsi suivant la *méthode des coups réciproques*, on trouva que la vitesse de propagation du son était constante; et, à 6° environ, cette vitesse était de 173 toises ou 337 mètres à la seconde. Il en résulterait (¹) pour la vitesse à zéro

$$a_0 = 332^m.$$

(¹) Voir Le Roux, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XII, 345; 1867.

Ces expériences eurent un retentissement énorme. De tous côtés on se mit à l'œuvre ([1]) : Lacaille et Cassini à Aigues-Mortes, La Condamine à Quito et à Cayenne, Bianconi à Bologne, Kästner puis Müller à Gœttingue, Espinosa et Bauza à Santiago, Benzenberg à Düsseldorf, Goldingham à Madras, multiplièrent les mesures.

Bianconi montra l'influence de la température sur la vitesse du son ; le même fait ressort des travaux de La Condamine; et Benzenberg, par des expériences instituées spécialement à cette fin, mit hors de doute l'accroissement de la vitesse avec la température, conformément à la théorie ([2]). Mais toutes ces déterminations ne firent qu'accentuer la discordance entre la vitesse réelle et la valeur théorique résultant de la formule de Newton.

Expériences des membres du Bureau des Longitudes ([3]). — Quand Laplace eut trouvé la véritable cause de cette discordance, et donné par le calcul une valeur d'accord avec l'observation, il demanda au Bureau des Longitudes de reprendre les mesures en usant des moyens perfectionnés dont on disposait, et en tenant compte de l'état thermométrique de l'atmosphère, trop négligé dans les expériences de 1738. Une Commission fut composée d'Arago, Bouvard, Mathieu et de Prony, auxquels s'adjoignirent Gay-Lussac et de Humboldt. La méthode employée fut encore celle des coups réciproques, mais on réduisit à 5 minutes les intervalles entre les coups des deux stations, et on remplaça les pendules imparfaites des premiers observateurs par d'excellents chronomètres de Breguet. Les stations choisies furent Villejuif et Montlhéry. On préféra raccourcir un peu la distance et ne pas introduire sur le trajet du son l'atmosphère troublée de Paris. A chaque station était une pièce de 6, servie par des artilleurs. On opéra la nuit et par le temps le plus calme. Les premières épreuves eurent lieu le 21 juin 1822. Par un phénomène singulier, tandis que tous les coups de Montlhéry furent entendus parfaitement à Villejuif, le bruit du canon de Villejuif fut à peine transmis à Montlhéry ; cependant sept

([1]) Relativement à tous ces travaux, voir Bravais et Martins, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XII, 5 ; 1845 ; et Le Roux, *loc. cit.*

([2]) Pour les températures atmosphériques l'accroissement de la vitesse est très sensiblement de $0^m,60$ par $1°$.

([3]) Arago, *Connaissance des temps* pour 1825, ou *Œuvres complètes*, édition Barral, XI, 1. Paris, Gide ; 1859.

coups différents y furent nettement perçus. En les combinant avec les coups correspondants observés à Villejuif, on a le tableau suivant :

		Montlhéry.			Villejuif.		
10^h25^m coup de 1^k					Arago...	55,0	54,8
					Mathieu..	54,8	
					Prony...	54,7	
10 30	— 1	Bouvard...		54,5			
		Gay-Lussac.					
		Humboldt..					
10 35	— 1,5				Arago...	55,0	55,0
					Mathieu..	55,2	
					Prony...	54,8	
10 40	— 1,5	Bouvard....	55,0	54,9			
		Gay-Lussac.	»				
		Humboldt..	54,9				
10 55	— 1,5				Arago...	54,9	54,8
					Mathieu..	55,0	
					Prony...	54,6	
11 00	— 1,5	Bouvard....	»	53,9			
		Gay-Lussac.	»				
		Humboldt..	53,9				
11 05	— 1				Arago...	54,6	54,7
					Mathieu..	55,0	
					Prony...	54,6	
11 10	— 1	Bouvard...	54,7	54,6			
		Gay-Lussac.	54,5				
		Humboldt..	»				
11 15	— 1,5				Arago...	55,0	54,9
					Mathieu..	55,0	
					Prony...	54,6	
11 20	— 1,5	Bouvard....		54,3			
		Gay-Lussac.					
		Humboldt..					
11 25	— 1				Arago...	54,8	54,8
					Mathieu..	54,9	
					Prony...	54,6	
11 30	— 1	Bouvard...		54,5			
		Gay-Lussac.					
		Humboldt..					
11 35	— 1,5				Arago...	54,8	54,8
					Mathieu..	54,9	
					Prony...	»	
11 40	— 1,5	Bouvard...	54,5	54,3			
		Gay-Lussac.	»				
		Humboldt..	54,1				
		Moyennes.....		54,4			54,8

En divisant la distance $18612^m,52$ par la durée moyenne de la

transmission 54^s,6, on trouve 340^m,9 pour l'espace parcouru par le son à la température de 15°,9. D'après ces expériences, la vitesse du son dans l'air à zéro serait donc à très peu près

$$a_0 = 331^m.$$

Expériences de Moll et Van Beck (¹). — L'année suivante, Moll et Van Beck refirent ces expériences dans les landes d'Utrecht, entre les deux collines Zevenboompjes (les Sept-Arbres) et Kooljesberg, distantes de 17 669^m,3. A chaque station, un officier tenait la mèche allumée au-dessus de la lumière du canon ; un autre avait le chronomètre sous les yeux et tenait le bras du premier. Quand l'aiguille arrivait à la seconde convenue il poussait le bras qui tenait la mèche, et le canon partait. A l'autre station, un observateur muni d'un chronomètre en pressait le ressort au moment où il apercevait le feu et mettait ainsi l'aiguille en mouvement ; puis, à l'instant où il percevait le son, il retirait le pouce et alors l'aiguille s'arrêtait. L'intervalle des coups réciproques fut réduit à 1 seconde. Après plusieurs expériences infructueuses où le canon de l'une des stations n'était pas entendu à l'autre, on eut vingt-deux coups réciproques dans la soirée du 27 juin 1823 et quatorze dans celle du 28. Voici par exemple les temps observés entre l'éclair et le son aux deux stations dans cette dernière soirée.

	Au Zevenboompjes.	Au Kooltjesberg.	Moyennes.
	51^s,81	52^s,12	51,96
	51,94	52,10	52,02
	51,77	51,28	51,54
	51,98	52,51	52,24
	52,17	52,46	52,32
	52,15	52,28	52,21
	52,25	53,10	52,78
	52,18	50,17	51,17
	52,40	52,19	52,30
	52,27	52,62	52,44
	52,27	51,66	51,97
	52,23	51,52	51,87
	52,49	51,99	52,24
	52,56	51,60	52,08
Moyennes.	52,12	51,98	52,05

(¹) Moll et Van Beck, *Pogg. Ann.*, V, 351 et 469; 1825.

Le résultat de toutes les mesures donna pour vitesse dans l'air sec, à zéro

$$a_0 = 332^m,8\ (^1).$$

Peu après, Gregory fit à Woolwich, particulièrement en vue d'apprécier l'influence du vent, des expériences que nous ne rapporterons point, les coups n'ayant pas été réciproques, ni les distances assez grandes. En 1871, Stone effectua au Cap des expériences plus précises (en particulier, il ne commença à suivre le mouvement qu'au delà d'une certaine distance de façon à éviter l'influence des perturbation à l'origine) : il obtint un nombre (332^m,4) peu différent de celui de Moll et Van Beck.

De même que l'on avait mesuré la vitesse du son sous l'équateur, on la détermina près du pôle : le capitaine Parry dans ses voyages aux mers polaires en 1822 et 1824, le lieutenant Kendall pendant l'expédition de Franklin en 1825, l'observèrent par des froids de — 40° et la trouvèrent d'accord avec la valeur théorique pour ces basses températures.

D'autre part, les expériences de Stampfer et Myrbach (1823) dans le Tyrol, entre deux stations présentant une différence de niveau de 1364 mètres, et celles de Bravais et Martins (1844) en Suisse, entre le sommet et la base du Faulhorn, sur une hauteur verticale de 2079 mètres, confirmèrent ce résultat du calcul, que la vitesse de propagation du son dans l'air (qu'ils trouvèrent, les uns et les autres, égale à 332^m,4) est indépendante de la pression du gaz.

Mais la méthode suivie dans toutes ces mesures présentait en elle-même une cause d'erreur tenant à l'appréciation par l'opérateur du temps écoulé entre la perception de la lumière et celle du son. Que cette appréciation se fît au moyen d'un pendule à seconde ou d'un chronomètre, elle était le résultat de l'accomplissement d'un certain nombre d'actes physiologiques réclamant chacun une certaine durée, et une durée différente suivant les cas. De là une incertitude, qui n'est que trop visible sur le tableau résumant les expériences si soignées des membres du Bureau des Longitudes, et qui, jointe à l'erreur systématique due au chronomètre, pèse non moins fortement sur les expériences des savants hollandais.

(1) Avec le coefficient de dilatation de l'air fixé par Regnault, ce nombre se réduit à 332^m,25 (Bravais et Martins).

Expériences de Regnault (1). — Par un heureux emploi de l'inscription graphique et des transmissions électriques, Regnault supprima complètement l'intervention de l'opérateur. En outre, pour éliminer la plupart des difficultés que présentent les expériences à l'air libre, il opéra de préférence sur des tuyaux (2).

De 1862 à 1866, il effectua une longue série de recherches sur la propagation du son dans les tuyaux, en profitant des grands travaux de canalisation que la ville de Paris faisait alors exécuter pour conduire le gaz d'éclairage dans la zone annexée et pour amener à l'intérieur les eaux de la Marne et de la Dhuis. Une conduite spéciale fut en outre installée au Collège de France pour certaines déterminations.

L'un des orifices A du tuyau en expérience était fermé hermétiquement par une plaque de tôle percée en son centre d'une ouverture dans laquelle s'engageait le canon d'un pistolet maintenu par un bouchon de liège. Le pistolet étant chargé à poudre, on tendait sur la bouche un fil fin d'acier, communiquant par l'un de ses bouts

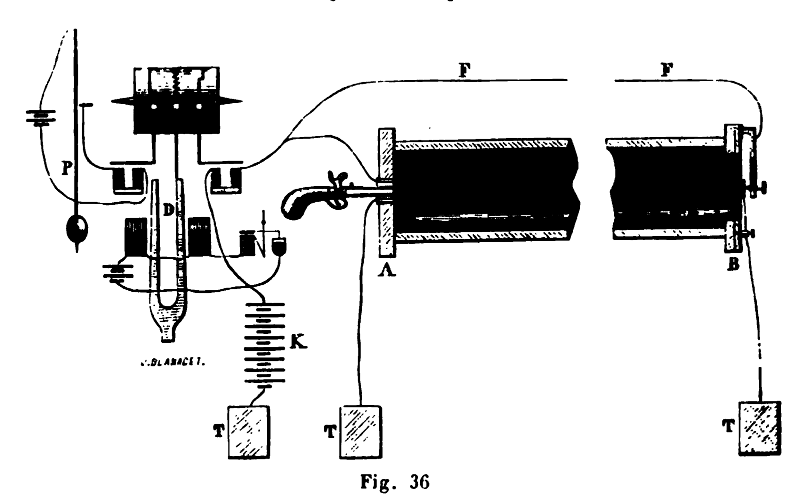


Fig. 36

(1) Regnault, *Relation des expériences entreprises pour déterminer les données des machines à feu*, III; 1870.

(2) Biot avait déjà fait quelques observations intéressantes sur la propagation du son dans les tuyaux des aqueducs de Paris (Biot, *loc. cit.*, p. 7); et M. Le Roux avait employé à la détermination de la vitesse du son un tuyau en zinc, de 72 mètres, fermé à chacune de ses extrémités par une membrane dont il inscrivait le déplacement sous l'influence de l'onde provoquée par l'explosion d'une capsule fulminante, ce qui lui donna pour la vitesse du son à zéro, dans l'air sec et privé d'acide carconique, $330^{m},7$ (Le Roux, C. R., LV, 239; 1862; et *loc. cit.*).

avec la terre et par l'autre bout avec l'un des pôles d'une pile K dont le deuxième pôle était lui-même à la terre. L'extrémité opposée du tuyau B était fermée par une membrane mince en caoutchouc, au centre de laquelle on avait collé un petit disque en platine, relié au sol par un fil métallique très flexible. En face de ce disque et à très petite distance se trouvait une pointe mousse, rattachée à la pile K par un fil télégraphique F, bien isolé, qui suivait le tuyau dans tout son parcours. Enfin, auprès de la station A était disposé un appareil enregistreur, constitué essentiellement par un cylindre tournant, sur lequel une longue bande de papier noirci recevait au passage les marques de trois styles inscrivant, le premier les oscillations d'un pendule à seconde P, le deuxième les vibrations d'un diapason D entretenu électriquement, le troisième les interruptions et les rétablissements du courant de la pile K, comme l'indique la figure schématique ci-contre.

Cela posé, pour faire une expérience on mettait en mouvement l'appareil enregistreur et l'on faisait partir le coup de pistolet. La bourre, en sortant du canon, rompait le fil métallique tendu devant et arrêtait le courant : cette interruption était marquée sur la bande de l'appareil enregistreur.

Lorsque l'onde, arrivant à l'extrémité B du tuyau, poussait la membrane de caoutchouc, le disque en platine venait frapper la pointe mousse terminant la ligne télégraphique : le courant se trouvait rétabli, et l'instant précis de ce rétablissement était inscrit sur le papier enfumé [1].

Pour avoir le temps, en secondes, que l'onde met à parcourir le tuyau, il suffit de compter sur la bande de papier le nombre de vibrations (et la fraction de vibration) du diapason, qui sont comprises entre la marque du départ en A et celle de l'arrivée en B, ainsi que le nombre des vibrations du diapason qui correspond dans le même moment à une oscillation du pendule à seconde.

Mais l'onde arrivée à l'extrémité B du tuyau s'y réfléchit, revient vers l'extrémité A où elle se réfléchit encore, retourne en B où elle marque de nouveau, et ainsi de suite. On peut donc suivre la propagation pendant un très long parcours, tout naturellement partagé

[1] On avait eu soin de déterminer par des expériences préalables le temps que le disque mettait à toucher le buttoir quand l'onde lui arrivait.

en sections de même longueur. Il est aisé d'ailleurs de multiplier, au besoin, les sections à l'aide de tubulures latérales, et d'inscrire le passage des ondes non seulement en A et B, mais aussi aux stations intermédiaires.

On a varié les procédés pour produire les ondes, en employant divers pistolets avec des charges différentes, en utilisant l'explosion très brève d'étoupilles à canon ou la détonation d'un mélange d'hydrogène et d'oxygène, en injectant de l'air comprimé, en poussant brusquement un piston à l'entrée du tuyau, ou enfin en émettant des sons musicaux au moyen d'instruments ou de la voix humaine.

Regnault a opéré sur sept conduites distinctes :

	Longueur.	Stations.	Diamètre.
Tuyaux du Collège de France	70^m	1	$0^m,108$
— à gaz de la route militaire. . . .	3000	5	0,108
— — de Choisy-le-Roi.	3625	5	0,216
— à eau de la route militaire	2000	2	0,300
— — du siphon de Villemomble.	4900	1	1,100
— — de l'égout Sébastopol . . .	960	4	1,100
— — de l'égout Saint-Michel . .	1420	6	1,100

Nous rapporterons, par exemple, les nombres N de vibrations du diapason inscrites entre la marque du départ et celle de l'arrivée sur la membrane A, dans la première série des expériences de l'égout Saint-Michel : L est la longueur du tuyau, c le chemin parcouru par l'onde depuis son départ jusqu'à la membrane, et n le nombre des vibrations du diapason correspondant à une oscillation du pendule au moment de l'expérience (ce nombre ici n'a pas varié sensiblement et a été égal en moyenne à 50,971); on a donc $V = \frac{cn}{N}$ pour la *vitesse moyenne* du son pendant le parcours c. Si la température avait été zéro, cette vitesse moyenne aurait été V_0; et si en outre l'air avait été débarrassé d'humidité, elle aurait été V'_0 [1]. Nous

[1] La vitesse dans l'air sec est plus petite que dans l'air humide, parce que la présence de la vapeur d'eau dans l'atmosphère a pour effet d'en diminuer la densité. Si V est la vitesse de propagation dans l'air humide à la tempéra-

désignerons enfin par W'_0 la vitesse avec laquelle dans de l'air sec et à zéro aurait été parcourue la dernière longueur 2L du trajet (abstraction faite de la petite correction due à l'inertie de la membrane).

Égout-Saint-Michel. I (17 avril 1866).

$T = 10^\circ,5$ $H = 758^{mm}$ $f = 9^{mm},47$ Membrane A

Nos des bandes	$2n$	$2L = 2835^m,9$	$4L = 5671^m,8$	$6L = 8507^m,7$	$8L = 11343^m,6$	$10L = 14179^m,5$
1	101,92	426,5	854,9	1283,7	1712,7	»
2	101,96	426,9	855,1	1283,6	1712,3	2141,1
3	101,96	426,05	854,45	1283,15	1711,95	»
4	101,92	427,1	855,6	1284,1	1712,8	»
5	101,93	426,65	855,25	1283,55	1712,35	»
6	101,96	426,8	854,9	1283,6	1712,3	2141,4
Moyennes..	101,942	426,66	855,03	1283,62	1712,40	2141,25
		$V = 338^m,81$	$338^m,14$	$337^m,86$	$337^m,68$	$337^m,57$
		$V_0 = 332,46$	$331,79$	$331,51$	$331,33$	$331,22$
		$V'_0 = 331,68$	$331,01$	$330,73$	$330,55$	$330,44$
		$W'_0 = 331,68$	$330,31$	$330,14$	$329,99$	$329,93$

Dans le seul égout Saint-Michel, Regnault fit ainsi vingt-cinq séries d'expériences, portant chacune généralement sur six membranes, placées respectivement aux orifices A et B et sur quatre tubulures latérales espacées le long du tuyau.

Les principaux résultats de toutes ces expériences peuvent se formuler comme il suit :

1° Dans un tuyau cylindrique, l'intensité de l'onde ne reste pas constante, mais elle s'affaiblit avec la distance, et d'autant plus rapidement que le tuyau est plus étroit (1). Un coup de pistolet chargé à 1 gramme de poudre cessa

ture t et à la pression H, la force élastique de la vapeur d'eau étant f, on a

$$V'_0 = V\sqrt{\frac{1 - 0,38\frac{f}{H}}{1+\alpha t}}.$$

C'est d'ailleurs un avantage des expériences dans des tuyaux souterrains que l'humidité bien définie de la masse gazeuse sur laquelle on opère.

(1) La nature des parois a également une influence. Dans les égouts de Paris où l'on prévient les ouvriers par le son de la trompette, il est connu que les signaux portent incomparablement plus loin dans les galeries revêtues intérieurement d'un ciment bien lisse que dans celles où les parois sont formées par de la meulière brute.

d'être entendu après	1150m	et de marquer après	4056m	dans une conduite de	0^m,108
—	2810	—	11430	—	0 ,300
—	9540	—	19850	—	1 ,100

A Villemomble, avec une charge de 2^{gr},40, on notait facilement le dixième retour à la membrane A : ainsi, malgré vingt réflexions successives, le son agissait encore sur la membrane après un parcours de près de 100 kilomètres (la distance de Paris à Amiens). Sans ces réflexions, qui contribuent surtout à l'affaiblir, le son se transmettrait donc en tuyau large à une distance énorme, et l'on comprend que dans les expériences qu'il fit sur une conduite de grand diamètre, Biot n'ait constaté à l'oreille aucun affaiblissement pour un trajet direct de 951 mètres.

2° La vitesse du son diminue en même temps que l'intensité. Quelques nombres, pris au hasard parmi les mesures, le montrent nettement :

Conduite de 0^m,108 Charge de poudre = 0^g,1		Conduite de 0^m,300 Charge de poudre = 0^g,1, puis 1^g,5		Conduite de 1^m,100 Charge de poudre = 1^g	
c	V'_0	c	V'	c	V'_0
1351,95	329,95	1905,0	332,37	749,1	334,16
2703,90	328,20	3810,0	330,34	1417,9	332,50
4055,85	326,77	——		2835,8	331,72
5407,80	323,34 (?)	3810,3	332,18	5671,8	331,24
		7620,6	330,43	11343,6	330,68
		11430,0	329,64	19851,3	330,52
		15240,0	328,96		

3° La vitesse tend vers une limite, qui est représentée par un nombre d'autant plus élevé que le tuyau est plus large ([1]).

([1]) M. von Helmholtz, dans un mémoire sur la théorie des vibrations de l'air dans les tuyaux ouverts, a donné pour la vitesse U de propagation du son dans un tuyau de diamètre 2R, la formule

$$U = V\left(1 - \frac{\eta}{2R\sqrt{\pi N}}\right).$$

V étant la vitesse de propagation dans l'air libre,
η le coefficient de frottement interne du gaz remplissant le tuyau,
N le nombre de vibrations du son considéré.

Depuis, M. Kirchhoff a repris la même question en tenant compte de la chaleur cédée ou enlevée par la paroi du tuyau, et il est arrivé à la même formule, sauf que le coefficient η représente alors une constante dépendant à la fois du

L'existence d'une limite ressort immédiatement de l'examen des vitesses moyennes sur tout le chemin parcouru par l'onde depuis son départ jusqu'au moment où elle trace sa dernière marque. Ces vitesses moyennes limites V'_0 ont été trouvées

sur la conduite de $0^m,108$,	$V'_0 = 326,66$	(chemin parcouru	4055,9)
— $0,216$	$328,18$	(—	6238,9)
— $0,300$	$328,96$	(—	15240,0)
— $1,100$	$330,52$	(—	19851,3)

En prenant la vitesse de propagation dans le dernier parcours pour lequel l'onde puisse encore marquer sur les membranes, on trouve pour W'_0 (correction faite de l'inertie des membranes) :

Diamètre de la conduite.	W'_0
$0^m,108$	324,25
$0,216$	326,0
$0,300$	329,25
$1,100$	330,3

Malheureusement la détermination exacte de ces vitesses W'_0 est particulièrement difficile, le trajet étant court et l'inertie de la membrane ayant plus d'influence dans le cas des ondes faibles. Le dernier nombre seul présente quelque certitude : il diffère très peu de la vitesse moyenne limite V'_0 dans le même tuyau [1], où les pa-

frottement intérieur du gaz et de l'effet thermique de la paroi. (Helmholtz, *Journal de Crelle*, LVII, 1; 1860; et Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, CXXXIV, 177 : 1868.)

MM. Schneebeli et A. Seebeck ont tenté de reconnaître si les faits étaient d'accord avec la théorie; à cette fin, ils ont effectué des mesures indirectes de la vitesse du son au moyen des phénomènes d'interférences dans de courts tuyaux de différents diamètres (355); et ils ont trouvé que la différence entre la vitesse de propagation à l'air libre et la vitesse dans un tuyau était en effet sensiblement en raison inverse du diamètre du tuyau. Ainsi M. Schneebeli obtient, V étant égal à $332^m,25$:

2R	V — U	(V — U) 2R
21^{mm}	$3^m,50$	63,50
12	$5,13$	61,56
6,5	$9,95$	64,67

Mais l'influence de la hauteur a paru plus marquée que ne l'indique la formule. Avec un tuyau de $3^{mm},4$, M. A. Seebeck trouve, par exemple, pour ut_4 ($N = 512$), sol_3 ($N = 384$), et mi_3 ($N = 320$) des différences V — U respectivement égales à $9^m,79$, $13^m,91$, et $15^m,51$. (Schneebeli, *Pogg. Ann.*, CXXXVI, 296; 1869; et A. Seebeck, *ibid.*, CXXXIX, 104; 1870.)

[1] En calculant cette vitesse V'_0 sur le trajet total diminué de la première longueur 2L, on trouve encore le même nombre $330^m,6$.

rois ne doivent plus avoir déjà qu'une action négligeable. Tout compte fait, Regnault admet pour la vitesse limite

$$a_0 = 330^{m},6.$$

4° Le mode de production de l'onde ne semble pas avoir d'effet sensible sur la vitesse de propagation. Cette vitesse s'est montrée exactement la même pour les ondes engendrées par l'explosion d'un mélange de 2 volumes d'hydrogène et de 1 volume d'oxygène que pour celles qui provenaient d'un coup de pistolet. L'onde produite par un piston frappeur marcha un peu moins vite, mais cela tenait à ce qu'elle avait moins d'intensité, car dans la conduite de l'égout Saint-Michel elle n'a jamais marqué un second retour, alors que l'onde fournie par le coup de pistolet en donnait constamment plusieurs.

Relativement aux sons musicaux perçus par l'oreille, Regnault a trouvé que la vitesse apparente de propagation des sons aigus est sensiblement moindre que celle des sons graves. Mais, ajoute-t-il, ce fait peut provenir uniquement de ce que le tympan de l'oreille se mettrait plus vite à vibrer avec les notes graves qu'avec les notes aiguës [1]. Une conséquence immédiate, c'est qu'en parcourant de grandes longueurs de tuyaux, le son ne conserve pas son timbre.

5° La vitesse de propagation d'une onde dans un gaz est la même, quelle que soit la pression que le gaz supporte. Ce fait, déjà établi par les expériences en montagne, a été vérifié sur la conduite du Collège de France pour des variations de pression comprises entre $0^{m},247$ et $1^{m},267$: il n'a pas été possible de constater une différence sensible entre les vitesses sous des pressions si éloignées l'une de l'autre.

6° Enfin l'influence de la densité a été l'objet d'expériences directes sur les gaz que l'on a pu préparer en quantités suffisantes pour en remplir la conduite de la route d'Ivry (faisant partie de a conduite à gaz de la route militaire) ou celle du Collège de France. Nous réunirons en un seul tableau les résultats obtenus

[1] De ce qui a été dit plus haut (p. 57 et 68), il résulterait au contraire que la vitesse des sons graves doit être moindre que celle des sons aigus.

sur les deux conduites : V et V′ sont les vitesses dans le gaz et dans l'air, δ est la densité du gaz par rapport à l'air. Si le gaz et l'air obéissaient également aux lois de Mariotte, de Charles et de Poisson, on devrait avoir $\frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{1}{\delta}}$.

	$\frac{V'}{V}$		$\sqrt{\frac{1}{\delta}}$
	Conduite de 567m,5	Conduite de 70m,5	
Hydrogène	3,801	»	3,682
Acide carbonique	0,7848	0,8009	0,8087
Protoxyde d'azote	»	0,8007	0,8100
Ammoniaque	»	1,2279	1,3025

L'accord entre les valeurs de $\frac{V'}{V}$ et celles de $\sqrt{\frac{1}{\delta}}$ paraîtra suffisant si l'on considère qu'il est difficile d'opérer sur des gaz très purs dans des conduites d'aussi grande capacité.

Regnault a également fait des mesures de la vitesse de propagation du son dans l'air libre [1]. Il a suivi la méthode des coups réciproques, mais en éliminant complètement l'appréciation humaine pour fixer l'instant du départ du coup et celui de l'arrivée de l'onde à la seconde station. Afin de rendre ces nouvelles expériences parfaitement comparables à celles qu'il avait faites dans les conduites cylindriques, il a employé les mêmes appareils marqueurs et enregistreurs et il a mené les expériences autant que possible de la même façon. Toutefois la marque d'arrivée de l'onde à la deuxième station a présenté une difficulté inattendue. Quelque violent que fût le choc du disque de la membrane contre le buttoir, le style de l'appareil enregistreur restait immobile. Ce fait, qui s'était déjà rencontré dans les gros tuyaux pour les membranes trop rapprochées de l'origine, résulte de ce que l'explosion de la poudre dans la bouche à feu ne produit pas une onde condensante unique,

[1] Pour opérer dans un espace restreint, M. Bosscha a employé la *méthode des coïncidences* (91) : on déterminait au moyen de l'oreille les coïncidences des battements de deux pendules à très peu près synchrones, les deux appareils étant d'abord placés à côté de l'observateur, puis l'un d'eux étant éloigné à quelque distance, de façon que ses battements arrivassent à l'oreille avec un retard que l'expérience même faisait connaître. (BOSSCHA, *Algemeene Konst-en Letterbode;* 1853, par. 2, p. 401; ou *Pogg. Ann.*, XCII, 485. Voir aussi KOENIG, C. R., LV, 603; 1862, et *Quelques expériences d'acoustique*, 30. Paris, 1882.)

mais une série d'ondes alternativement condensantes et dilatantes qui impriment à la membrane une succession rapide de mouvements opposés, et ne laissent pas au contact du disque avec le buttoir une durée assez longue pour que le courant s'établisse nettement à travers les bobines de l'appareil enregistreur, tandis que dans les tuyaux étroits à une faible distance il n'y a plus qu'une onde unique, amenant un contact qui fait marcher franchement le marqueur. Pour obvier à cette difficulté, on inscrivit l'arrivée des ondes non par une mise en contact, mais par une rupture. Une modification très simple permit d'atteindre ce résultat.

Les expériences furent faites au polygone de Satory près Versailles. Elles ont montré que la méthode des coups réciproques ne suffit pas à corriger l'influence du vent : pour qu'il en fût autrement, il faudrait en effet que le vent eût une direction et une intensité constantes sur toute l'étendue parcourue pendant la durée entière d'une expérience complète; et, quoiqu'une expérience ne durât ici que vingt-trois secondes, on ne saurait affirmer que les deux conditions étaient exactement remplies pendant ce laps de temps. Toutefois, en multipliant les expériences, on parvient à atténuer cette erreur accidentelle. La moyenne des résultats fournis par 334 coups réciproques deux à deux, réduite à zéro et à la sécheresse absolue, fut, pour une distance de 2445 mètres,

$$V_0' = 330^{m},7,$$

valeur singulièrement concordante avec celle que l'on avait trouvée dans les tuyaux de $1^{m},10$. La petite différence entre ces deux nombres est même dans le sens voulu, car au moment où l'onde marquait sur la membrane dans les expériences à l'air libre, elle avait encore beaucoup plus d'intensité que lorsqu'elle faisait sa dernière marque sur les membranes des conduites.

Ainsi, la vitesse de propagation d'un ébranlement infiniment petit, dans l'air sec à zéro, doit être très voisine de la valeur indiquée précédemment

$$a_0 = 330^{m},6.$$

Nous étudierons plus loin des expériences permettant de déterminer indirectement la vitesse du son dans les gaz.

347. Vitesse du son dans les liquides. — La formule

$$a=\sqrt{\frac{E}{D}}$$

est immédiatement applicable. La compression d'un liquide n'entraînant pas d'effet calorifique appréciable, on a

$$E=\frac{\text{accroissement de pression}}{\text{compression correspondante}}=\frac{gmH}{\varkappa}:$$

g est l'intensité de la pesanteur,
m la densité du mercure,
H la hauteur barométrique normale,
$\varkappa$ le coefficient de compressibilité du liquide;
donc

$$a=\sqrt{\frac{gmH}{\varkappa D}},$$

D étant la densité du liquide à la température de l'expérience; et cette formule convient également à la propagation, soit dans une colonne cylindrique, soit dans un milieu indéfini.

La vitesse, en mètres, du son dans l'eau à 4° (à cette température, d'après Grassi (196), $\varkappa = 0{,}0000499$) sera ainsi

$$a=\sqrt{\frac{9{,}81 . 13{,}59 . 0{,}760}{0{,}0000499 . 1}}$$
$$=1425 \text{ mètres},$$

soit environ quatre fois et demie la vitesse dans l'air.

L'eau est le seul liquide sur lequel on ait fait des mesures directes.

Les premières expériences sont dues à Beudant [1], qui trouva à Marseille, en 1820, que le son parcourait dans l'eau de mer environ 1500 mètres par seconde.

En 1827, Colladon et Sturm [2] mesurèrent avec beaucoup de soin la vitesse de transmission du son dans l'eau du lac de Genève, entre

[1] BEUDANT, *Expériences inédites*, rapportées dans le Mémoire de Colladon et Sturm.
[2] COLLADON et STURM, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXVI, 236; 1827.

deux bateaux amarrés l'un à Rolle, l'autre à Thonon, et séparés par une distance de 13487 mètres. Au bateau de Rolle était suspendue une grosse cloche C, contre laquelle un battant B pouvait être abaissé au moyen d'un levier extérieur L; ce levier était disposé de

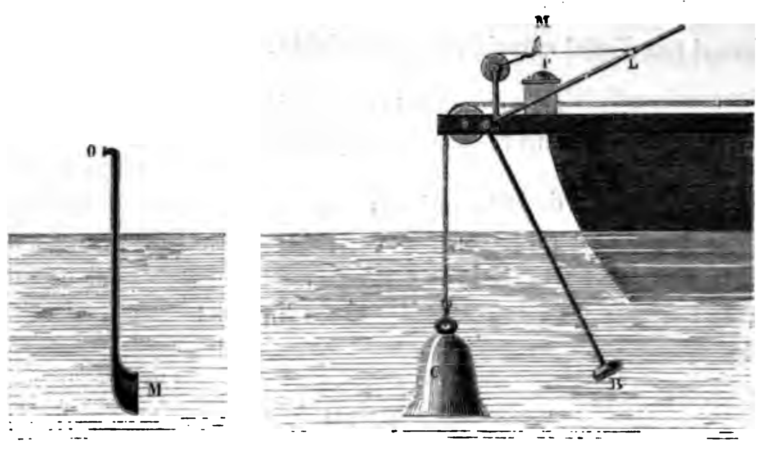


Fig. 37

manière qu'à l'instant même où le coup était frappé, une mèche M vînt enflammer un petit tas de poudre P, dressé à l'avant du bateau. Les observateurs placés sur l'autre bateau notaient l'époque où ils voyaient ce signal, puis celle où ils percevaient le son, à l'aide d'une sorte de grand cornet acoustique plongeant dans l'eau, et dont le pavillon était fermé par une membrane M, tandis que l'extrémité supérieure venait s'adapter à l'oreille en O. Le temps écoulé entre ces deux époques fut trouvé en moyenne de $9^s,4$, ce qui donna pour la vitesse du son dans l'eau à $8^\circ,1$,

$$a = 1435 \text{ mètres.}$$

Ce nombre est presque identique à celui que fournit le calcul; mais l'indécision relative à la valeur de $\varkappa$ ne permet pas une comparaison rigoureuse entre la théorie et l'expérience.

348. Vitesse du son dans les solides. — *Vitesse du son dans une tige.* — La vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal dans une tige solide est encore

$$a=\sqrt{\frac{E}{D}},$$

E étant sensiblement le coefficient d'élasticité (142), et D représentant toujours la densité du corps. Si l'on introduit, au lieu de D, le poids spécifique p, on a

$$a=\sqrt{\frac{gE}{p}}.$$

Appliquons par exemple cette formule à la détermination de la vitesse, en mètres, du son dans une tige de fer indéfinie. Le coefficient d'élasticité du fer, rapporté au millimètre carré (152), est d'environ 20000 kilogr.; donc, pour 1 mètre carré, E = 20000000000. La densité tabulaire du fer étant 7,7, le poids du mètre cube est 7700 kilogr. On a par conséquent

$$a=\sqrt{\frac{9,81.20\,000\,000\,000}{7700}}$$
$$=5\,100 \text{ mètres},$$

soit quinze fois la vitesse dans l'air.

On trouverait ainsi pour la vitesse du son dans les divers solides, en forme de verges minces, de fils ou de tubes, libres de se dilater et de se contracter latéralement :

Sapin.	6000 mètres,	soit	18	fois	la vitesse dans l'air.
Verre.	5200	—	15,5	—	—
Acier.	5200	—	15,5	—	—
Fer.	5100	—	15	—	—
Fonte.	4300	—	12	—	—
Cuivre	3750	—	11	—	—
Laiton	3550	—	10,5	—	—
Platine.	2650	—	8	—	—
Argent.	2600	—	7,5	—	—
Or..	1750	—	5	—	—
Plomb	1200	—	3,5	—	—

Les mesures directes présentent de grandes difficultés.

Biot[1], avec l'aide de Martin, habile ouvrier en horlogerie, tenta

[1] Biot, *loc. cit.*, p. 26.

de déterminer la vitesse du son dans la fonte en opérant sur une conduite de 951^{m},25. Un marteau, disposé à l'une des extrémités, frappait en même temps sur la paroi et sur un timbre suspendu à l'entrée de la conduite. L'observateur placé à l'autre extrémité entendait deux sons successifs, transmis l'un par la fonte, l'autre par l'air. L'expérience consistait à mesurer sur un chronomètre le temps qui s'écoulait entre les deux sons. Mais la brièveté de ce temps (2^{s},5) et la discontinuité de la paroi (la conduite était formée de 376 tuyaux séparés par des rondelles de plomb revêtues de futaine goudronnée) ne permettaient pas d'espérer un résultat très exact. Biot trouva ainsi que la vitesse de propagation du son dans la fonte était dix fois et demie la vitesse de propagation dans l'air.

En 1851, Wertheim et Breguet [1] reprirent la question, en opérant sur les fils télégraphiques du chemin de fer de Versailles (rive droite), entre Asnières et Puteaux. La longueur du trajet (4067^{m},3) était suffisante pour une détermination convenable de la durée de la transmission entre les deux stations par l'enregistrement de l'arrivée du son, qui provenait d'un coup de marteau frappé à une époque donnée sur le poteau en tête. Mais il se rencontra cette circonstance singulière que le son ne put franchir le tunnel de Puteaux malgré l'isolement des fils ne touchant nulle part. Il est donc probable que le bruit, que l'on entendait nettement jusqu'à l'entrée du tunnel, était transmis non par les fils télégraphiques, mais par le sol même dans lequel étaient plantés les poteaux, ce bruit perdant ensuite toute intensité en se disséminant dans la masse du Mont-Valérien. La vitesse de 3485 mètres résultant des expériences de Wertheim et Breguet serait donc simplement la vitesse de la transmission par le sol entre les deux stations.

Vitesse du son dans un solide indéfini. — La vitesse de la propagation d'un ébranlement dans une verge libre de se contracter ou de se dilater transversalement, en même temps qu'elle s'allonge ou se raccourcit longitudinalement, ne convient pas au cas d'une masse solide indéfinie où, pareille liberté n'existant plus, les tensions aux deux bases d'un cylindre quelconque découpé dans la masse n'obéissent plus aux mêmes lois.

(1) WERTHEIM et BREGUET, C. R., XXXII, 293; 1851.

Considérons un milieu solide, isotrope, et indéfini dans tous les sens. Un ébranlement initial, produit en quelque région très petite de ce milieu, se propage en tous sens, sous la forme d'une onde sphérique dont le rayon s'accroît uniformément. A une distance très grande du centre d'ébranlement, les sphères, qui figurent les positions successives de l'onde, peuvent dans leurs parties en regard être remplacées par leurs plans tangents; en d'autres termes, aux ondes sphériques on peut substituer des ondes planes, normales à la direction suivant laquelle s'effectue la propagation. Plaçons l'origine des coordonnées sur l'une quelconque de ces ondes, une onde située à la distance r de celle-ci aura pour équation

$$ax + by + cz = r,$$

où a, b, c sont les cosinus des angles que la direction de la propagation fait avec les axes des coordonnées, et r la distance de l'onde à l'origine.

Le mouvement se propageant avec la vitesse cherchée V, le déplacement u d'une molécule (y, x, z) de l'onde r à l'époque t est égal et parallèle à celui qu'éprouvait à l'époque $t - \frac{r}{V}$ la molécule située actuellement à l'origine des coordonnées. Nous pouvons donc poser

$$u = f\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right),$$

$f(t)$ représentant le déplacement variable de la molécule située à l'origine; et si nous appelons α, β, γ les cosinus des angles de ce déplacement avec les axes des coordonnées, les projections de u sur les axes sont

$$\xi = \alpha u, \quad \eta = \beta u, \quad \zeta = \gamma u.$$

Il faut que ces valeurs particulières vérifient les équations aux différentielles partielles qui régissent tous les petits mouvements intérieurs du milieu considéré (145), c'est-à-dire les équations (19 *bis*),

lesquelles, abstraction faite des forces étrangères sauf les fo d'inertie, sont

$$(19\ bis)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\Delta^2\xi=\rho\dfrac{d^2\xi}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\Delta^2\eta=\rho\dfrac{d^2\eta}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\Delta^2\zeta=\rho\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}, \end{cases}$$

où

$$(15)\qquad 0=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz},$$

et

$$\Delta^2=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

Calculons $\dfrac{d\theta}{dx}$:

$$\frac{d\xi}{dx}=\alpha\frac{du}{dx}=-a\alpha\frac{f'}{V},$$

$$\frac{d\eta}{dy}=\beta\frac{du}{dy}=-b\beta\frac{f'}{V},$$

$$\frac{d\zeta}{dz}=\gamma\frac{du}{dy}=-c\gamma\frac{f'}{V},$$

d'où, en appelant $n=a\alpha+b\beta+c\gamma$ le cosinus de l'angle que f entre elles la direction du déplacement et celle de la propagati

$$0=-n\frac{f'}{V};$$

et par suite

$$\frac{d\theta}{dx}=an\frac{f''}{V^2}.$$

On trouvera de même

$$\Delta^2\xi=\alpha\frac{f''}{V^2}.$$

Enfin

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\alpha\frac{d^2u}{dt^2};$$

et par conséquent

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\alpha V^2\frac{f''}{V^2}.$$

La substitution de ces valeurs dans la première des équations (19bis) donne, après suppression du facteur $\frac{f''}{V^2}$, la première des équations suivantes, les deux autres s'obtenant de même,

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)an+(\mu-\rho V^2)\alpha=0, \\ (\lambda+\mu)bn+(\mu-\rho V^2)\beta=0, \\ (\lambda+\mu)cn+(\mu-\rho V^2)\gamma=0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces trois équations, respectivement multipliées par a, b, c, il vient

$$(\lambda+2\mu-\rho V^2)n=0.$$

Cette relation doit être vérifiée; il faut donc que l'on ait

$$\text{ou} \quad \lambda+2\mu-\rho V^2=0, \qquad \text{ou} \quad n=0.$$

Dans le premier cas,

$$V_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

mais en même temps, les trois dernières équations deviennent

$$an=\alpha, \quad bn=\beta, \quad cn=\gamma;$$

et, si on les ajoute après les avoir multipliées par α, β, γ, on trouve

$$n^2=1,$$

c'est-à-dire que le déplacement est alors dirigé dans le sens même de la propagation.

Dans le second cas, puisque $n=0$, le déplacement s'opère dans le plan de l'onde : la dilatation $\theta=n\frac{du}{dr}$ est nulle; en d'autres termes, la densité du milieu n'éprouve aucun changement, et les équations se réduisent à

$$V_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Ainsi, quand une onde plane se propage dans un milieu isotrope,

si le déplacement est longitudinal, sa vitesse de propagation est V_1. ou, si l'on tient compte des valeurs (12) et (13) du coefficient d'élasticité E et du coefficient de Poisson σ (**142**), et si l'on remplace la densité ρ par $\frac{p}{g}$,

$$V_1 = \sqrt{\frac{gE}{p} \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}};$$

si le déplacement est transversal, la vitesse est moindre et égale à V_2,

$$V_2 = \sqrt{\frac{gE}{p} \frac{1}{2(1+\sigma)}}.$$

Par suite, comme Poisson [1] l'a montré le premier, un déplacement quelconque au centre même de l'ébranlement se décompose pour chaque direction en un déplacement parallèle au rayon, ou longitudinal, et en un déplacement perpendiculaire, ou transversal, lesquels se séparent immédiatement, puisque le premier marche plus vite que le second, et se propagent ensuite avec leurs vitesses propres.

D'après Wertheim $\sigma = \frac{1}{3}$, les vitesses V_1 et V_2 ont respectivement pour expressions

$$V_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad V_2 = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{3}{8}},$$

et le rapport

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}} = \frac{1}{2}.$$

Si, comme le voulait Poisson, $\lambda = \mu$, et par suite $\sigma = \frac{1}{4}$,

$$V_1 = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{6}{5}}, \qquad V_2 = \sqrt{\frac{2}{5}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{2}{5}},$$

et

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1,732}.$$

Aucune expérience directe n'a encore vérifié ces résultats de la

[1] POISSON, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 250 et XLIV, 423; 1823-30.

théorie. Wertheim a seulement remarqué que les tremblements de terre semblent en effet accuser la production de deux ondes.

349. Relation fondamentale entre la longueur d'onde, la période et la vitesse du son. — Quand un son de hauteur donnée se propage dans un milieu homogène quelconque avec une vitesse V, la longueur d'onde λ du son considéré étant la distance à laquelle il se transmet dans le milieu pendant la durée τ d'une vibration, on a nécessairement

$$\lambda = V\tau.$$

Si l'on désigne par N le nombre des vibrations effectuées en 1^s, on a

$$N\tau = 1,$$

et la formule précédente peut encore s'écrire

$$\lambda = \frac{V}{N}.$$

La période τ, ou le nombre N de vibrations dans l'unité de temps, est caractéristique du son donné ; la vitesse V dépend du milieu où se propage le son ; la longueur d'onde λ résulte à la fois de la hauteur du son et de la vitesse avec laquelle il se transmet dans le milieu.

Nous savons déjà comment on peut avoir τ (ou N) et V ; nous apprendrons bientôt à mesurer λ ; et bien que la mesure directe de ce dernier paramètre ne soit pas indispensable, elle n'en aura pas moins son prix.

Longueurs d'onde des sons usuels. — Dans le tableau suivant on a mis, en regard des nombres de vibrations [1] qui se rencontrent le plus souvent et des périodes correspondantes, les longueurs d'onde dans l'air à la température ordinaire ($V = 340^m$) :

[1] Nous comptons toujours par vibrations complètes ou *vibrations doubles*.

		N	$\tau = \frac{1}{N}$	λ	
Sons fondamentaux de Sauveur.	ut_{-1}	32^v	0^s,03125	10^m,63 ou	32 pieds
	ut_1	64	0 ,01563	5 ,31	16
	ut_2	128	0 ,00781	2 ,66	8
	ut_3	256	0 ,00391	1 ,33	4
	ut_4	512	0 ,00195	0 ,664	2
	ut_5	1024	0 ,00098	0 ,332	1
Diapason normal	la_3	435	0 ,00230	0 ,782	
Diapasons chronographiques.		50	0 ,02000	6 ,80	
		100	0 ,01000	3 ,40	
		200	0 ,00500	1 ,70	
		300	0 ,00333	1 ,13	
		400	0 ,00250	0 ,85	
		500	0 ,00200	0 ,68	
		1000	0 ,00100	0 ,34	

350. Réflexion du son. — *Lois de la réflexion.* — Quand d ondes circulaires excitées à la surface d'une nappe d'eau re contrent le bord, elles rebondissent contre l'obstacle et revienne sur elles-mêmes (¹).

Pareillement, les ondes aériennes qui portent le son se réfléchi sent à la surface des obstacles qu'elles rencontrent, ainsi que l'a testent les phénomènes vulgaires d'écho et de résonnance; cette réflexion obéit, comme celle des ondes liquides, aux lois bi connues de la réflexion de la lumière. Si l'on désigne par *rayon* direction suivant laquelle s'effectue la propagation, et si l'on appe *angles d'incidence et de réflexion* les angles que le rayon incide et le rayon réfléchi forment respectivement avec la normale point d'incidence, le rayon incident et le rayon réfléchi sont da

(¹) Pour faire voir en projection la réflexion des ondes liquides, on prend d'après Desains, une auge rectangulaire remplie de mercure, on placera au-des un diaphragme percé d'une fente de dimensions un peu moindres que l'au de façon à cacher les bords du bain qui gâteraient l'image, et l'on fera tom obliquement sur le mercure un large faisceau lumineux que recevra ensuite u lentille disposée de manière à donner sur l'écran une image nette de la surf du bain. Si alors on frappe légèrement l'un des côtés de l'auge, on verra d rides planes partir de ce bord, s'avancer jusqu'au côté opposé, revenir arrière, et traverser ainsi plusieurs fois le champ en sens alternativeme opposés. Avec une auge ronde, il n'y a qu'à toucher le centre pour produi des rides circulaires qui, après avoir été frapper les bords, se replient vers centre. Il suffit même d'un choc contre la table ou contre le sol pour faire app raître les rides en question.

un même plan normal à la surface réfléchissante, et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Pour montrer dans les cours que la réflexion du son suit les mêmes règles que celle de la lumière, on se sert ordinairement des *miroirs conjugués*. Ce sont deux miroirs sphériques, M et M', que l'on dispose à 5 ou 6 mètres de distance, l'un en face de l'autre, de façon que leurs axes coïncident suivant AA'. On place une bougie à l'un des foyers F; l'image de cette bougie se forme à l'autre foyer F', où l'on peut la recevoir sur un écran. Si l'on substitue à la bougie en F une montre dont le tic-tac est

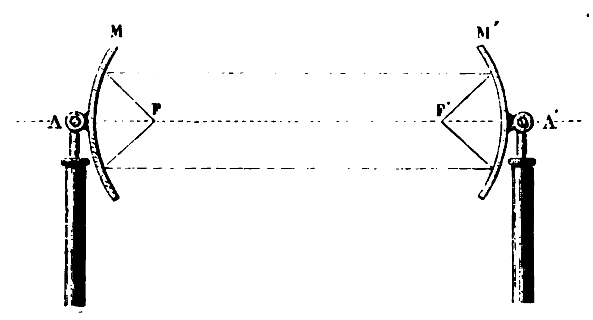


Fig. 38

imperceptible directement à une distance de 1 ou 2 mètres, on constate que l'oreille placée en F' l'entend très bien [1].

Échos, résonnances. — De la grandeur des ondes sonores, énormes par rapport aux ondes lumineuses, il résulte d'ailleurs, ainsi que nous le verrons plus loin, que telles aspérités, qui rendraient le miroir absolument mauvais au point de vue optique, seront sans influence appréciable sur la réflexion du son. C'est ainsi qu'une muraille, une montagne, un groupe d'arbres constitueront de bons miroirs pour le son [2].

Certaines formes de voûtes donnent lieu à des phénomènes curieux par suite de la réflexion du son à leur surface, suivant les lois géométriques rappelées plus haut. Au musée des antiques, une voûte elliptique, aux deux foyers de laquelle on a placé deux

(1) A l'oreille on peut d'ailleurs substituer une flamme sensible, ainsi que nous le verrons bientôt.

(2) La surface de l'eau réfléchit parfaitement le son : tous les bateliers savent que la voix porte beaucoup plus loin sur l'eau que sur la terre.

larges vases, permet à deux interlocuteurs parlant alternative-ment et écoutant dans ces vases, d'entretenir à voix basse un

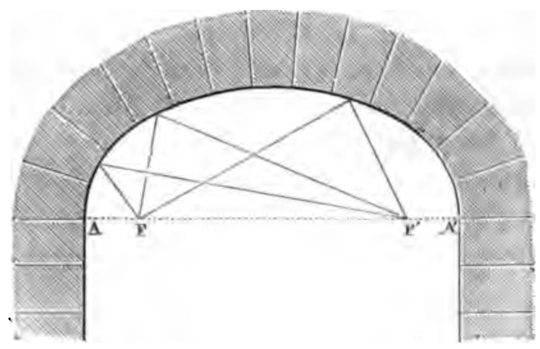


Fig. 39

conversation, sans être entendus des personnes voisines. En certain endroit des caveaux du Panthéon, il suffit d'un coup canne contre le pan d'une redingote pour faire éclater un br assourdissant.

Dans tout espace fermé, il doit y avoir et il y a de fait flexion du son. Mais, d'une part, à cause de la persistance impressions, l'oreille ne distinguera, en général, le son répété son direct que s'il y a entre ces deux sons successifs un interva d'au moins 1/10 de seconde; par conséquent, pour qu'il y ait eff tivement répétition du son ou *écho*, il faut que l'obstacle con lequel s'effectue la réflexion soit au moins à 17 mètres, de faç que pour le trajet total, aller et retour, le son doive employer moins 1/10 de seconde; sinon, il y aura simplement *résonnan* D'autre part, la nature même des parois a une grande influen des tapisseries épaisses étouffent le son; des boiseries élastiq le renvoient au contraire, en y ajoutant l'effet de leurs prop vibrations. Le son se trouve alors prolongé et renforcé. Dans salle de réunion ce double effet peut aider la voix de l'orate mais une résonnance trop forte nuit à la perception distincte de parole (1). On cite telle église où la voix du prédicateur n'

(1) La disposition qu'il convient de donner à une salle suivant ses dim sions et suivant l'usage auquel on la destine est une des questions les p délicates de l'architecture. Voir à ce sujet Lachez, *Acoustique et optique salles de réunion*. Paris; 1879.

ıtelligible qu'une fois par an, à la fête de Noël, les voûtes étant ›jour-là couvertes d'ornements qui en diminuent la sonorité habiıelle.

Un obstacle situé à 17 mètres ne fait écho que pour un son bsolument bref. Quand il s'agit de la parole, comme on ne proonce guère que 5 syllabes par seconde, et que, par conséquent, ̇mission d'une syllabe dure 1/5 de seconde, pour donner la ·pétition nette d'un son articulé, sans empiètement sur le son rect, l'obstacle devra être éloigné d'au moins 34 mètres en ligne ·oite. A cette distance, l'écho sera *monosyllabique;* à une distance ›uble, il sera *dissyllabique;* et ainsi de suite.

Deux obstacles disposés vis-à-vis l'un de l'autre, comme deux iroirs opposés, pourront se renvoyer le son un très grand nombre fois, sans qu'il cesse d'être perceptible. Ces *échos multiples* ne ıt pas rares; l'un des plus remarquables est celui de la villa nonetta, près de Milan : un coup de pistolet tiré de l'une des ıêtres de la cour intérieure y est répété quarante à cinquante fois.

Échos aériens; opacité acoustique de l'atmosphère. — Un fait rieux d'écho est celui que M. Tyndall (¹) a eu l'occasion d'ob·ver au cours d'expériences entreprises à South Foreland, près ›uvres, pour étudier l'efficacité des signaux sonores sur les côtes ıritimes, en cas de brouillard. Ces expériences, comme celles M. Henry (²) en Amérique, donnèrent des résultats singulièreınt variables : une atmosphère parfaitement transparente au int de vue optique peut être d'une opacité acoustique presque pénétrable. On conçoit, en effet, que si des masses considérables, ›n qu'invisibles, de vapeur s'élèvent de la mer, elles feront obs:le à la transmission du son en créant dans l'atmosphère des uches hétérogènes, aux surfaces limites desquelles le son sera ırtiellement réfléchi. Pour vérifier cette manière de voir, M. Tynıll s'installa au pied du rocher en haut duquel étaient placés ›s appareils sonores, et il reconnut qu'effectivement l'écho se roduisait au large avec une force considérable. Il institua ensuite ans son laboratoire des expériences décisives, parmi lesquelles

(¹) Tyndall, *Phil. Trans.;* 1874; et *On Sound*, 284; 4th ed. London, Longmans; 83.

(²) Henry, *Report of the Lighthouse Board of U. S. for the year* 1874.

nous rapporterons la suivante, que l'on peut facilement reproduire. Une grille rectangulaire à gaz est disposée horizontalement ; à l'une des extrémités est placé un petit tuyau à anche ; une flamme sensible est à l'autre bout. On fait parler le tuyau. Le gaz n'est pas allumé, la flamme sensible s'agite ; on allume le gaz, la flamme revient au repos ; mais une deuxième flamme située derrière le tuyau, en un point où, l'onde directe ne pouvant l'atteindre, elle restait immobile quand le gaz n'était pas

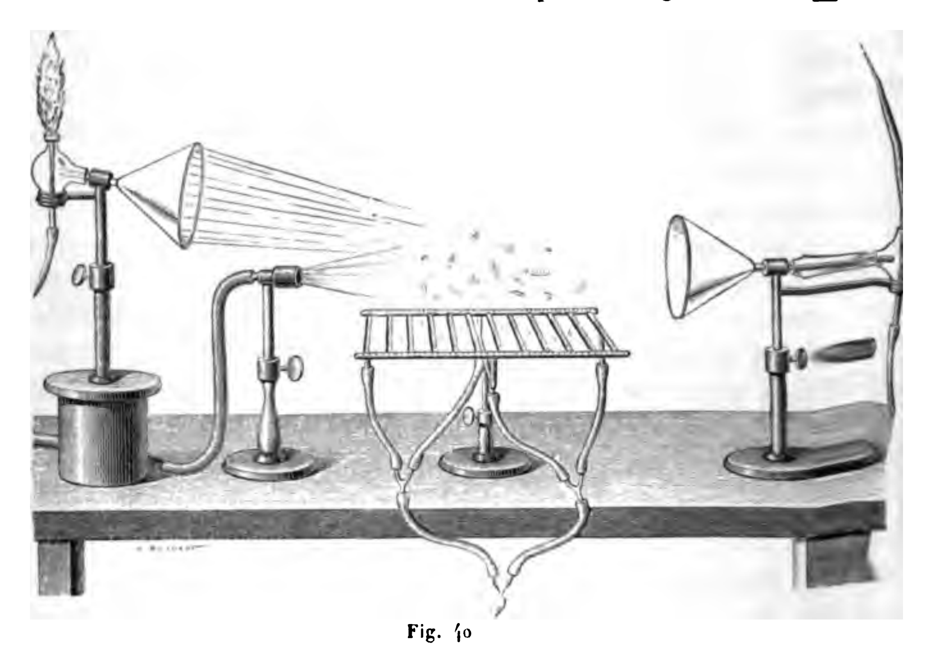


Fig. 40

allumé, vibre maintenant avec énergie. La couche d'air chaud s'élevant au-dessus de la grille allumée arrête donc le son et le renvoie en arrière, exactement comme dans les expériences à l'air libre.

Il est intéressant de rapprocher ces faits de l'observation du même savant relative à la transmission parfaite du son à travers une tourmente de neige, sur la mer de glace, pendant l'hiver de 1859. Le son passe avec une facilité extraordinaire par les interstices des corps solides ; il traverse aisément douze foulards de soie superposés, tandis qu'un seul l'arrête complètement si, ayant été préalablement trempé dans l'eau, il forme un écran continu.

Les *porte-voix* et *cornets acoustiques* sont des applications immédiates de la réflexion du son, compliquée d'ailleurs d'effets de résonnance.

Réflexion du son à l'extrémité d'un tuyau cylindrique. — Parmi les nombreux phénomènes de réflexion sonore, il en est un que nous devons étudier en détail, tant à cause de son importance propre que par suite des conditions simples et bien déterminées dans lesquelles il a lieu : c'est la réflexion d'une onde plane au bout d'un tuyau limité par un fond solide, ou s'ouvrant librement à l'air.

Dans le premier cas, quand l'onde se réfléchit contre le fond solide d'un tuyau fermé, la réflexion se produit, comme à l'ordinaire, avec changement de signe dans la vitesse et sans changement de signe dans la condensation, l'ébranlement qui se propage en sens inverse restant condensant s'il était condensant, dilatant s'il était dilatant.

A l'extrémité d'un tuyau ouvert, les choses se passent tout différemment. Quand un ébranlement condensant arrive à l'extrémité libre, la dernière tranche d'air ne trouve plus devant elle la résistance qu'ont éprouvée successivement les tranches intérieures : l'air extérieur cédant de tous côtés, la tranche s'avance au delà de sa position d'équilibre, entraînant derrière elle, de proche en proche, les tranches contiguës. Un nouvel ébranlement prend donc naissance, ébranlement dilatant qui se propage dans le sens rétrograde, mais en conservant le sens direct du mouvement des tranches. Ainsi la réflexion s'est produite sans changement de signe de la vitesse et avec transformation de la condensation en dilatation.

D'ailleurs l'un des phénomènes entraîne l'autre : du moment qu'à une certaine époque x se change en $-x$, si $\frac{du}{dt}$ conserve son signe, $-\frac{du}{dx}$ en change, et réciproquement.

Dans la réflexion contre le fond supposé absolument résistant d'un tuyau fermé, la dernière tranche d'air doit satisfaire à la condition $u=0$ ou $\frac{du}{dt}=0$, ce que l'on ne peut obtenir qu'en superposant au mouvement direct un mouvement rétrograde de même amplitude avec changement du signe de la vitesse et, par suite, avec conservation du signe de la condensation.

A l'extrémité libre d'un tuyau ouvert, u n'est soumis à aucune condition non plus que $\frac{du}{dt}$, mais la pression ne saurait différer sensiblement de la pression atmosphérique actuelle : ainsi la condensation est très petite, et l'on a sensiblement $\frac{du}{dx}=0$. Au mouvement direct doit donc se superposer un mouvement rétrograde tel qu'à l'extrémité la compression de l'un compense la dilatation de l'autre; en d'autres termes, il doit y avoir changement du signe de la condensation, et par conséquent conservation du signe de la vitesse.

Analytiquement, le cas d'un tuyau limité peut se ramener au cas précédemment étudié d'un tuyau illimité (344), si l'on dispose de l'état initial de toute la partie ajoutée, de façon qu'en abandonnant ensuite le système total à lui-même, les conditions physiques qui existaient aux limites se trouvent remplies d'elles-mêmes à chaque instant.

Soit, par exemple, un tuyau limité dans un sens par un fond rigide. La tranche d'air contiguë doit rester immobile. On doit donc avoir, à toute époque, $\frac{du}{dt}=0$ pour $x=0$, en comptant les abscisses à partir du plan fixe (positivement du côté directement ébranlé), ou, d'après la valeur générale de la vitesse,

$$f'(at)-F'(-at)=0,$$

ou, comme cette relation doit avoir lieu quel que soit t,

$$F'(-z)=f'(z),$$

ou encore, si l'on change z en $-z$,

$$f'(-z)=F'(z).$$

Les deux fonctions f' et F' sont donc connues pour toutes l valeurs négatives de la variable; et la question est résolue. On pe supprimer le fond si l'on attribue à la masse de gaz contenue da la portion négative du tuyau un mouvement satisfaisant au deux conditions précédentes. Ces conditions entraînent une cons

quence immédiate. Calculons la vitesse et la condensation pour une tranche quelconque de la partie négative : les formules générales donnent, par le changement de x en $-x$,

$$v_1 = af'(-x+at) - aF'(-x-at) = aF'(x-at) - af'(x+at) = -v$$

et

$$\gamma_1 = -f'(-x+at) - F'(-x-at) = -F'(x-at) - f'(x+at) = \gamma.$$

Donc, comme il était facile de le prévoir, si l'on attribue aux tranches situées à la même distance de part et d'autre de l'origine, des vitesses égales et de signes contraires avec des condensations identiques, la tranche à l'origine restera perpétuellement en repos.

Si maintenant nous considérons dans la partie positive un ébranlement limité, compris entre d et $d+l$, nous devrons imaginer dans la partie négative, entre $-d$ et $-(d+l)$, un ébranlement à vitesses égales et opposées et à condensations identiques. Chacun de ces ébranlements donnera naissance à une onde se propageant vers l'origine avec la vitesse a. Lorsque l'onde positive arrivera à l'origine, l'onde négative y arrivera également, et ces deux ondes, continuant leur marche, se pénétreront réciproquement. D'où il résulte que dans le tuyau limité les choses se passeront comme si l'onde directe, arrivée au plan fixe, se repliait sur elle-même, en se superposant aux parties qui marchent encore vers ce plan ; et lorsque la seconde extrémité de l'onde positive atteindra le fond, l'onde entière se trouvera retournée et prête à se propager en sens inverse.

On traiterait de même aisément le cas d'un tuyau s'ouvrant librement dans l'atmosphère, et l'on reconnaîtrait qu'en ce cas les choses se passent comme si l'onde directe éprouvait contre l'air extérieur le mode de réflexion que nous avons défini plus haut.

351. Réfraction du son. — En passant d'un milieu dans un autre, le son se réfracte comme la lumière, suivant la loi de Descartes, l'indice de réfraction d'un corps par rapport à l'air étant égal

au rapport des vitesses de propagation du son dans l'air et dans le corps. Sondhauss [1] en a fourni la preuve expérimentale au moyen d'une lentille creuse, en collodion, remplie d'acide carbonique : ce gaz étant plus lourd que l'air, un son émanant d'un point S,

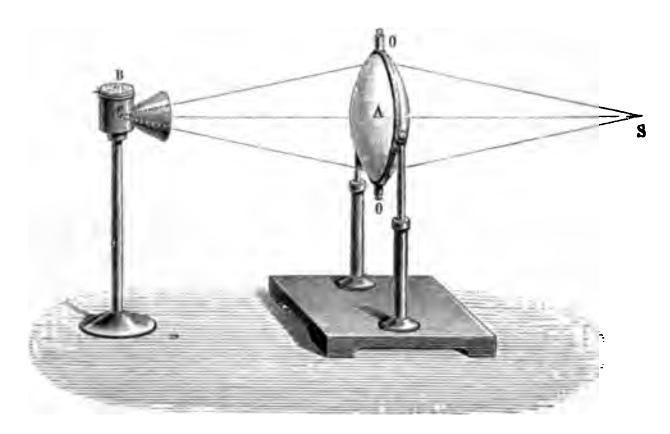


Fig. 41

situé à une certaine distance sur l'axe, venait se concentrer au foyer conjugué F, où l'on pouvait le constater soit à l'oreille, soit au moyen d'une membrane B, recouverte de sable.

M. Hajech [2] a fait des mesures précises à l'aide d'un tube-prisme, semblable à ceux que l'on emploie en optique pour étudier la réfringence des gaz. Ce tube traversait le mur de séparation de deux pièces : dans l'une était installée la source sonore, en face du tube fermé de ce côté par une membrane normale à l'axe; dans l'autre se tenait l'opérateur au-dessus d'un cercle gradué tracé sur le parquet; l'expérience consistait à déterminer la direction du rayon réfracté pour une inclinaison donnée de la membrane de sortie, le tube étant rempli d'un fluide connu. Le tableau suivant renferme quelques-uns des résultats obtenus; on remarquera que l'eau, dans laquelle la vitesse de propagation est sensiblement la même que dans l'hydrogène, produit aussi des déviations à peu près égales :

[1] Sondhauss, *Pogg. Ann.*, LXXXV, 378; 1852.
[2] Hajech, *Nuovo Cimento*, 1857; et *Ann. de chim. et de phys.* (3), LIV, 438; 1859.

	Angle d'incidence.	Angle de réfraction Observé.	Angle de réfraction Calculé.
Eau	35°50′	7°40′	7°58′
	25 00	5 40	5 37
Hydrogène	35 50	8 00	8 50
	25 00	7 00	6 22
Ammoniaque	41 00	29 20	30 22
	35 50	25 00	26 50
Acide carbonique	35 50	49 50	48 19
	25 00	33 20	32 33
Acide sulfureux	35 50	62 30	61 22
	25 00	40 00	39 24

352. Applications. — La vitesse du son dans l'air étant connue, on peut s'en servir pour mesurer approximativement une distance : on observe l'intervalle de temps entre l'éclair et le bruit du tonnerre, entre la lueur et le bruit d'un coup de feu ; chaque seconde représente, à la température ordinaire, environ 340 mètres.

Newton donne une formule pour calculer la profondeur x d'un puits d'après le temps t écoulé entre l'instant où on lâche une pierre à l'orifice du puits et celui où l'on perçoit le son qu'elle rend en frappant l'eau :

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{a},$$

formule dans laquelle on fera $g = 9{,}81$ et $a = 340$, le temps étant exprimé en secondes, les longueurs en mètres.

Arago avait proposé d'évaluer la profondeur d'un lac ou d'une mer par le retour du son réfléchi sur le fond. Colladon fit à ce sujet, sur le lac de Genève, une série d'expériences d'où il résulte qu'un son intense s'entend sous l'eau à plus de 100 kilomètres ; mais il ne dit rien de la possibilité de mesurer la profondeur par un écho du fond.

CHAPITRE IV

INTERFÉRENCES DU SON

353. Superposition des ondes sonores. — Les ondes liquides nous ont déjà maintes fois servi de terme de comparaison. Une pierre jetée dans l'eau fait apparaître à la surface des rides circulaires qui s'étendent au large ou rebondissent contre les obstacles, en donnant la représentation exacte de la propagation ou de la réflexion des ondes sonores. Deux pierres, lancées en même temps dans l'eau, provoqueront deux systèmes d'ondes qui se couperont, et qui cependant poursuivront leur route, chacun aussi tranquillement et aussi régulièrement que si l'autre n'existait pas. En général, quelle que soit la complication des ondes produites à la surface de l'eau, grandes vagues soulevées par la tempête, étroit sillage d'un navire, petites rides excitées par la pointe de l'aile d'un oiseau, l'œil suivra sans peine l'un quelconque de ces mouvements, chaque système se développant exactement comme si la surface liquide n'était pas en même temps le siège d'autres mouvements analogues.

Quand deux systèmes d'ondes se propagent simultanément, les élévations et les dépressions de l'un d'eux, relativement à la surface agitée déjà par l'autre, étant les mêmes que celles qui se constateraient sur une eau tranquille, l'élévation ou la dépression totale à partir du niveau primitif est en chaque point et à chaque instant égale à la somme algébrique des déplacements que chacun des systèmes amènerait isolément. Si à une élévation du premier système se superpose une élévation égale du second, la hauteur totale de l'eau au-dessus de son niveau primitif sera le double de l'une des deux hauteurs isolées. Si une élévation du premier système se rencontre

avec une dépression égale et opposée du second, le niveau primitif ne sera pas modifié.

Semblablement, quand plusieurs systèmes d'ondes sonores coexistent dans un même milieu, il y a en chaque point et à chaque instant addition des petits mouvements afférents à chacun des systèmes, en d'autres termes, il y a *interférence*.

354. Principe des interférences. — Considérons en particulier deux sources sonores A et B identiques, c'est-à-dire telles que les mouvements vibratoires soient à chaque instant égaux et de même sens; il est clair qu'en tout point du plan PP′, perpendicu-

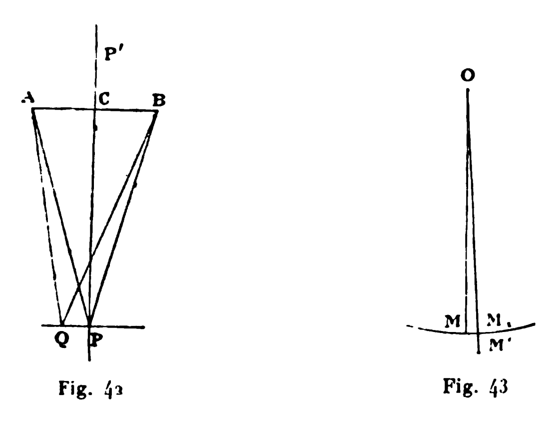


Fig. 42 Fig. 43

laire sur le milieu de la droite AB, les mouvements provoqués par chacun des deux systèmes d'onde seront à chaque instant concordants : la vitesse, comme le déplacement, se trouvera plus grande qu'elle ne le serait dans le cas d'une source unique : plus grande par conséquent sera l'intensité (326).

Dans un plan quelconque mené par AB, la vitesse, et par suite l'intensité, présentera une série de maxima et de minima fixes.

Pour se rendre un compte exact de toutes les circonstances du phénomène, il suffit de supposer que le mouvement vibratoire auquel est dû le son est décomposable d'une infinité de façons en demi-vibrations exactement contraires. Alors, en effet, si l'on considère assez loin du centre d'ébranlement O deux points M et M′, situés à peu de distance l'un de l'autre sur un même rayon ou sur des rayons suffisamment voisins, les modifications quelconques

qu'a éprouvées le mouvement de O en M ou de O en M' pouvant être regardées comme identiques, les vitesses v et v' des deux points seront à tout instant égales, parallèles et de même sens, si la différence des distances OM' et OM au centre d'ébranlement est un multiple pair de la demi-longueur d'onde. Les vitesses seront à tout instant égales, parallèles et de sens contraire, si la différence des distances OM' et OM est un multiple impair de la demi-longueur d'onde. En d'autres termes,

$$\text{si} \quad OM' - OM = 2k\frac{\lambda}{2} \qquad \text{on a} \quad v' = v,$$

$$OM' - OM = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad v' = -v,$$

k étant un nombre entier quelconque 0, 1, 2, 3,...

D'après cela, quand les mouvements émanés de deux sourc identiques A et B viennent se rencontrer en un point Q, les vitess s'ajoutent ou se retranchent géométriquement suivant que la diff rence QB — QA est égale à $2k\frac{\lambda}{2}$ ou à $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$. Le lieu des maxim dans le plan APQ est donc représenté par la série des hyperbole

$$QB - QA = 2k\frac{\lambda}{2},$$

et le lieu des minima par la série des hyperboles

$$Q'B - Q'A = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

On obtiendra les intensités des maxima et des minima en co posant suivant la règle ordinaire les vitesses des deux mouveme constituants, et en se rappelant que les intensités sont proportio nelles au carré des vitesses.

Si le point Q est assez éloigné des points A et B pour que l droites QA, QB, puissent être considérées comme sensibleme parallèles, les vitesses s'ajoutent algébriquement; et, puisqu'ell

sont égales en valeur absolue, on voit qu'alors l'intensité est 4 aux maxima et 0 aux minima, tandis qu'elle serait 2 partout si l'intensité résultante était simplement la somme arithmétique des intensités composantes. Ainsi, deux sons émanant de deux centres identiques

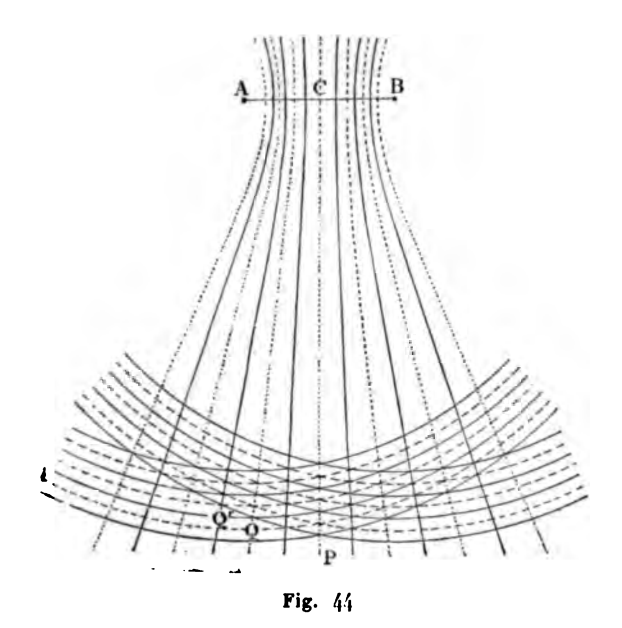


Fig. 44

se renforceront en certains points de l'espace, se détruiront au contraire en d'autres, où le son s'ajoutant au son produira le silence.

355. Expériences établissant l'interférence des ondes sonores. — *Expériences de Despretz; appareil de Desains.* — Despretz avait cherché à vérifier ces conséquences au moyen de deux sifflets montés sur une même soufflerie. Desains [1] a employé un appareil plus exact : une boîte ABCD, ouatée intérieurement pour empêcher toute réflexion sonore, porte perpendiculairement à sa base AB un fort sifflet S, tandis que la face supérieure est percée de deux trous O et O', symétriquement placés par rapport à la verticale S. Le sifflet recevant l'air par le tube T, les deux orifices O et O'

[1] Desains, *Leçons de physique*, II, 45. Paris, Desobry; 1860.

constituent deux sources identiques; et si l'on promène au-dessus une petite membrane couverte de sable, on constate aisément que le sable est vivement agité aux points où la théorie indique des maxima. Il reste au contraire immobile, ou à peu près, dans la région

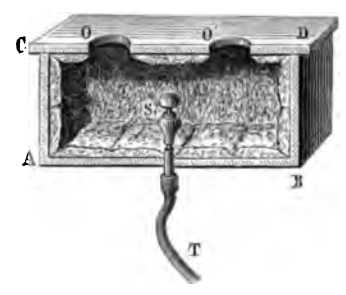


Fig. 45

des minima; et quand la membrane est ainsi en un de ces points repos, il suffit de fermer l'un des deux trous pour voir aussitôt sable entrer en mouvement.

Expériences d'Hopkins. — Les plaques vibrantes se prêtent t bien aux expériences de ce genre, comme l'a montré Hopkins

Soit par exemple une plaque P qui, attaquée convenablem avec l'archet, se partage en quatre secteurs vibrants, séparés deux lignes nodales immobiles, à angle droit. Soit encore un s

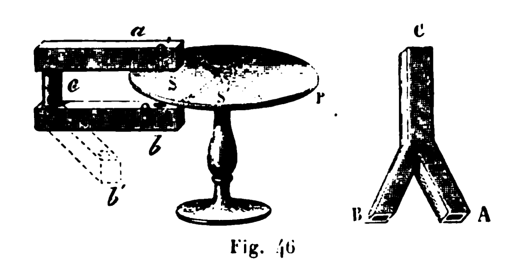


Fig. 46

tème de deux tuyaux *a* et *b*, ouverts en O et O', et réunis à l'au bout par un conduit transversal *c*, autour duquel ils peuvent tourn Chacun des deux tuyaux *a* et *b* a été réglé isolément de façon renforcer le son de la plaque : si donc on dispose l'un de ces tuyaux au-dessus de l'un des secteurs vibrants S, l'autre tuyau étant écar

([1]) HOPKINS, *Cambridge Phil. Trans.*, V, pt. 2, 231; 1835.

en b', le son est renforcé; mais si l'on amène le deuxième tuyau en b, sous le premier, l'effet disparaît. On comprend aisément qu'il doit en être ainsi, car le secteur S marchant vers O′ s'éloigne de O et *vice versâ*, de sorte que les vitesses de l'air en O et O′ sont toujours égales et contraires.

Dans une plaque vibrante, les mouvements de deux secteurs consécutifs S et S′ sont constamment opposés : quand le secteur S s'élève, le secteur S′ s'abaisse, et réciproquement. Si donc nous prenons un tuyau ABC, en forme d'Y renversé et de dimensions convenables pour renforcer le son de la plaque, et que nous placions d'abord une seule ouverture A au-dessus d'un secteur quelconque S, le son sera effectivement renforcé. Mais si nous mettons à la fois les deux ouvertures A et B au-dessus de deux secteurs voisins S et S′, le tuyau ne renforcera plus le son (¹).

Expérience de Lissajous (²). — Lissajous a appliqué le même

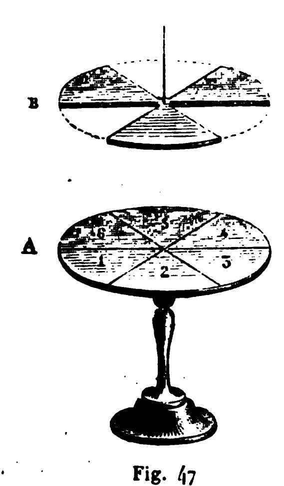


Fig. 47

principe sous une forme très élégante. La plaque A vibrant, je suppose, en six secteurs séparés par trois lignes nodales diamétrales, il approche de cette plaque un disque B découpé en six secteurs égaux, alternativement vides et pleins. Si ce disque est placé de

(¹) On peut aussi mettre en C une membrane sur laquelle le sable sautera ou restera immobile suivant la position des branches des tuyaux.
(²) Lissajous, C. R., XL, 133 ; 1855.

façon à masquer sur la plaque exactement trois secteurs de même parité, les actions concordantes des trois autres secteurs n'étant plus contrariées par les premières, le son sera considérablement renforcé. Au contraire il n'y a pas de renforcement quand le disque laisse à découvert des portions égales de tous les secteurs. De sorte que si l'on fait tourner le disque au-dessus de la plaque, il en résulte une série de renforcements énergiques, qui sont encore saisis distinctement alors que le son de la plaque entière n'est plus perceptible. L'expérience peut même se faire simplement avec les deux mains, tour à tour approchées ou éloignées de deux secteurs de même parité.

Phénomènes offerts par un diapason. — Tout le monde sait le peu d'intensité du son produit par un diapason tenu librement à

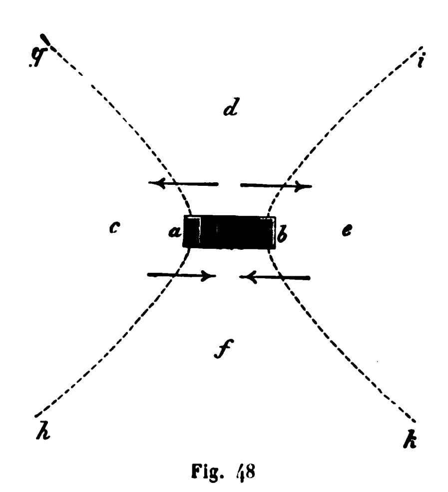


Fig. 48

a main. C'est qu'en effet, les deux branches d'un diapason se ra prochant ou s'éloignant toutes deux l'une de l'autre, les mouv ments communiqués à l'air se contrarient sans cesse. Lorsqu'o tient le diapason près de l'oreille, ou qu'on le place au-dess d'une éprouvette servant de résonnateur, on reconnaît que le so assez fort dans les régions *d* et *f*, moins intense en *c* et *e*, dispara complètement sur les branches de l'hyperbole *gah ibk*, ainsi q l'ont démontré les frères Weber ([1]). Si donc on fait tourner

([1]) Weber, *loc. cit.*, 506. Le phénomène a été étudié en détail par M. Kiesslin *Pogg. Ann.*, CXXX, 177 ; 1867.

diapason sur lui-même, on constate une succession de renflements et d'affaiblissements; et, quand l'instrument est dans une position telle que le mouvement résultant soit éteint, il suffit pour faire reparaître le son d'entourer l'une des branches d'un bout de tube qui en intercepte les vibrations. En thèse générale, l'effet d'un pareil tube est de grossir le son; l'expérience de Lissajous sur la plaque peut ainsi être répétée sur le diapason.

Vibration simultanée de deux tuyaux à l'unisson montés sur une même soufflerie; tuyaux à flammes manométriques de Kœnig. —

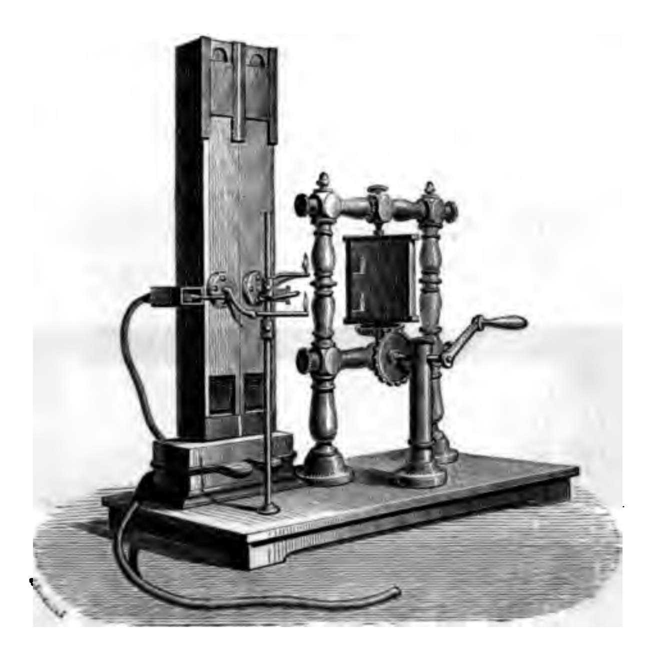


Fig. 49

Voici un autre fait bien connu des musiciens : deux tuyaux à l'unisson, placés l'un à côté de l'autre sur une même soufflerie, au lieu de produire ensemble une intensité double, ne donnent qu'un son très affaibli ([1]). La raison en est que dans ces conditions les mouvements vibratoires de deux tuyaux identiques diffèrent constamment d'une demi-période, comme le montrent les flammes manométriques de Kœnig.

([1]) Par contre, on commence à entendre distinctement l'octave.

Ces flammes, d'un emploi avantageux dans maintes circ
tances ([1]), sont obtenues de la manière suivante. A un nœu
tuyau (359), là où les condensations et les dilatations de l'air a

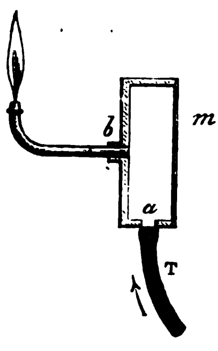


Fig. 50

gnent leur maximum, on remplace une portion de la paroi
une membrane élastique *m*; sur cette membrane repose une

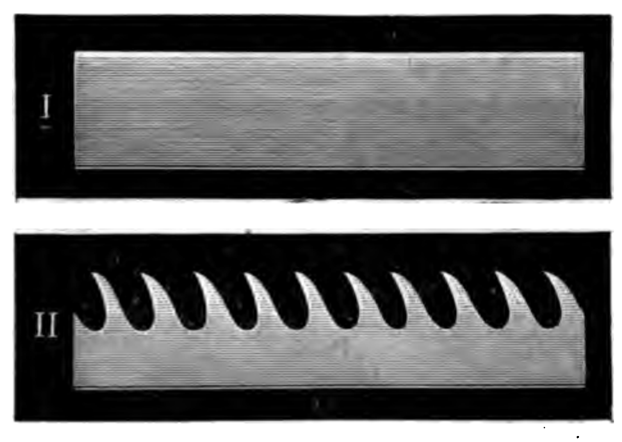


Fig. 51

sule *ab*, que traverse un courant de gaz d'éclairage, arrivant
le tuyau T et la tubulure *a*, et sortant par la tubulure *b* à l'e

([1]) Le premier appareil réalisant ce moyen de rendre sensible à l'œ
ondes sonores dans les gaz parut à l'Exposition de Londres en 1862; depuis
époque, M. Kœnig a construit sur le même principe toute une série d'app
(Kœnig, *loc. cit.*, 47).

mité de laquelle on l'allume. A chaque vibration de l'air dans le tuyau, la membrane, repoussée puis attirée, comprime et raréfie tour à tour le gaz dans la capsule manométrique : la flamme s'allonge et se raccourcit par un mouvement synchrone à celui de l'air intérieur. Mais ces saccades de la flamme ne se traduisent au regard que par un léger trouble, résultant de la superposition rapide des différentes formes du jet. Pour les voir isolément, il faut agiter vivement la tête tout en regardant la flamme, ou mieux, en observer l'image dans un miroir tournant. Quand le tuyau est muet, l'image de la flamme est un ruban continu et uniforme (I) ; quand le tuyau résonne, elle offre une série de dentelures correspondant aux vibrations sonores (II).

Les deux tuyaux de la figure 48 donnent ainsi deux images sur

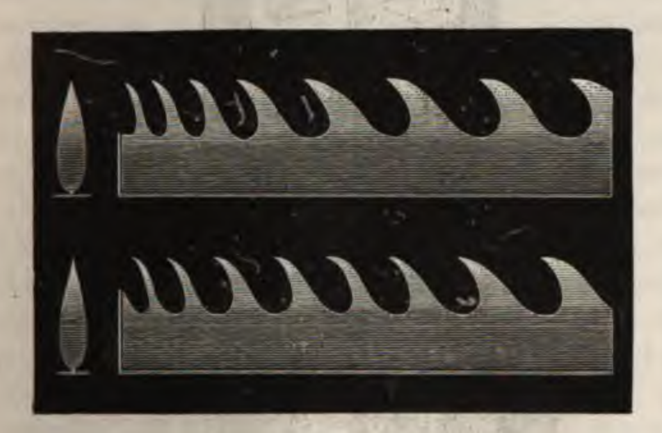


Fig. 52

lesquelles les dentelures alternent exactement [1] : les deux mouvements vibratoires sont donc constamment opposés.

Expériences avec la sirène double d'Helmholtz. — Un appareil se prêtant très bien à l'observation des phénomènes d'interférence est la sirène double de M. von Helmholtz. Elle se compose de deux

[1] Sur la figure 52, on a d'abord supposé le miroir immobile : les flammes offrent alors l'aspect indiqué à gauche ; puis le miroir reçoit un mouvement qui va en s'accélérant, les images se séparent de plus en plus et montrent l'alternance indiquée. Si on réunit les deux capsules en une même flamme, celle-ci apparaît comme un ruban uniforme, frangé toutefois sur son bord supérieur de dentelures très basses, à deux sommets, accusant l'octave.

sirènes polyphones, dont les caisses à vent a_0 et a_1 sont installées l'une au-dessus de l'autre sur un support commun ; les disques sont fixés sur un même arbre portant en k une vis sans fin qui mène le compteur (non représenté sur la figure). La caisse supérieure elle-même peut tourner autour de son axe : à cet effet, elle est sur-

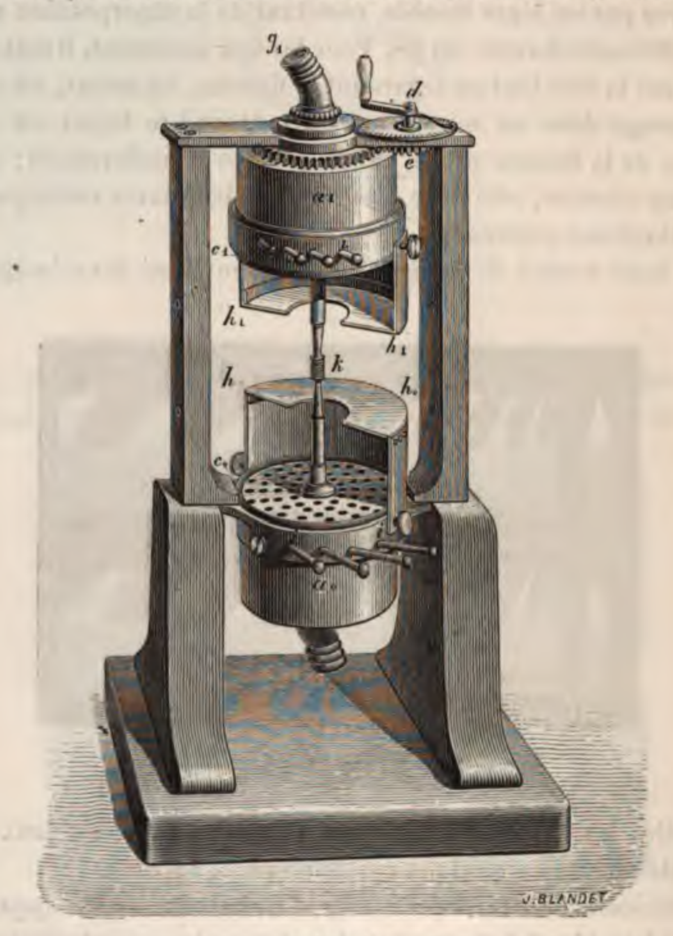


Fig. 53

montée d'une roue dentée qui engrène avec une autre roue plus petite e, munie d'une manivelle d. Chacun des disques est percé de plusieurs séries de trous qui reçoivent l'air (sous pression) isolément ou simultanément par un jeu convenable des chevilles ii : le disque inférieur comprend quatre séries de 8, 10, 12, 18 trous ; le

disque supérieur, quatre autres de 9, 12, 15, 16; si donc on appelle ut_1 le son de 8 trous, le disque inférieur peut donner ut_1, mi_1, sol_1, $ré_2$, et le disque supérieur $ré_1$, sol_1, si_1, ut_2, ce qui permet des combinaisons variées (1). Les sons produits par la sirène seule sont aigres, à cause de la présence de tons supérieurs en dehors de la série harmonique. Pour étouffer ces tons isolés, M. von Helmholtz renforce les harmoniques naturels au moyen de tuyaux en laiton, dont les moitiés postérieures sont figurées en h_0h_0, h_1h_1. Le son émis par la sirène « devient alors plein, fort et harmonieux comme un beau son de cor »; en d'autres termes, il ne contient plus sensiblement qu'un son fondamental et la série des harmoniques naturels. Cela étant, livrons passage aux sons 12 dans chaque caisse : si celles-ci sont disposées de manière que les trous soient en regard, les impulsions sont exactement concordantes, la différence est o pour les sons fondamentaux et pour leurs harmoniques : ils sont tous renforcés. Tournons la manivelle de 45°, ce qui fera avancer la caisse supérieure de 1/24 de tour, soit de la moitié de la distance de deux trous, les deux sons fondamentaux présenteront une différence d'une demi-période : ils se détruiront. Mais les octaves supérieures différeront alors d'une période entière, et par suite elles se renforceront; il en sera de même de tous les harmoniques pairs, tandis que les harmoniques impairs se neutraliseront. Dans cette position, le son sera donc très affaibli, sans être complètement éteint ; il sera plutôt porté à l'octave. Tournons la manivelle d'un nouvel angle de 45°, l'accord sera rétabli pour tous les éléments du son, qui se renforceront tous. Un tour entier de la manivelle offrira donc quatre positions où le son sera renforcé dans tous ses éléments, et quatre autres, intermédiaires, où le son fondamental et tous les harmoniques disparaissant, le son sera considérablement affaibli et en même temps haussé d'une octave.

Superposition directe de deux sons présentant une différence de marche connue. — Le moyen qui apparaît naturellement pour produire l'interférence de deux mouvements vibratoires consiste à établir entre deux ondes sonores émanant de la même source

(1) La sirène double est particulièrement commode pour vérifier que l'intervalle de deux sons ne dépend que du rapport de leurs nombres de vibrations et nullement de la valeur absolue de ces nombres.

ne différence de marche d'une demi-longueur d'onde. Herschell (1), le premier, Quincke (2) ensuite, et d'autres physiciens, ont employé ce procédé. Nous décrirons seulement l'appareil

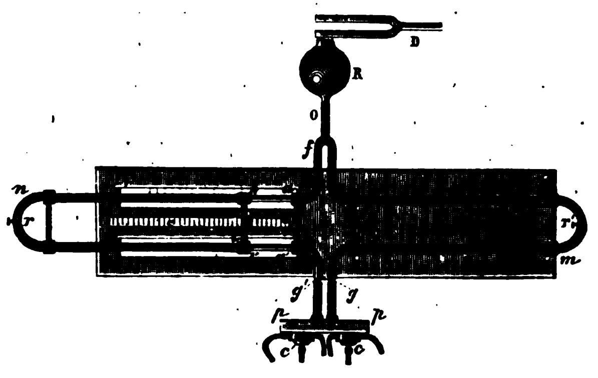


Fig. 54

construit par M. Kœnig pour réaliser facilement l'expérience. Un tuyau O, recevant par l'intermédiaire d'un résonnateur R le son

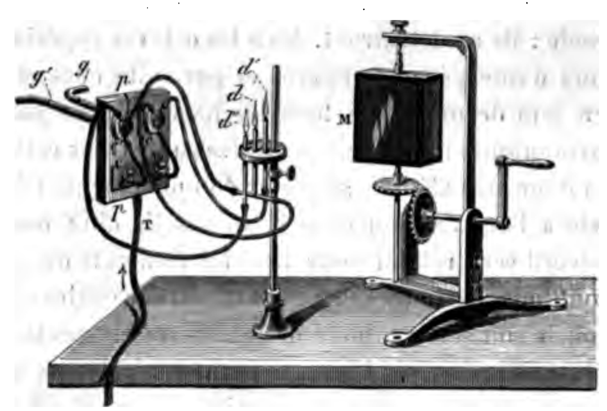


Fig. 55

d'un diapason D, se bifurque au point f en deux branches m et qui viennent aboutir en g et g' aux capsules manométriques c et La branche n, formée de deux tuyaux emboîtés aa', bb', pe

(1) Herschell, *Phil. Mag.* (3), III, 405 ; 1833.
(2) Quincke, *Pogg. Ann.*, CXXVIII, 177 ; 1866. Voir au sujet des expérienc de Quincke, Seebeck, *Pogg. Ann.*, CXLIX, 129 ; 1873 ; et *Journal de physiq* III, 127; 1874 (Terquem).

s'allonger à la manière d'un trombone. Quand le tuyau *b* recouvre entièrement le tuyau *a*, les deux branches *m* et *n* sont égales; les mouvements vibratoires transmis en *c* et *c'* concordent exactement. Si donc on superpose ces deux mouvements en *d*, la flamme *d* montrera de profondes dentelures en accord avec celles des flammes *d'* et *d''* qui se rapportent aux mouvements composants, et les trois séries de dentelures se correspondront sur les mêmes verticales (I). Si au contraire la branche *n* est allongée de la moitié de la longueur d'ondulation dans l'air du son D (on tire à cet effet le tuyau *b* de façon que la traverse *t* avance sur l'échelle S du

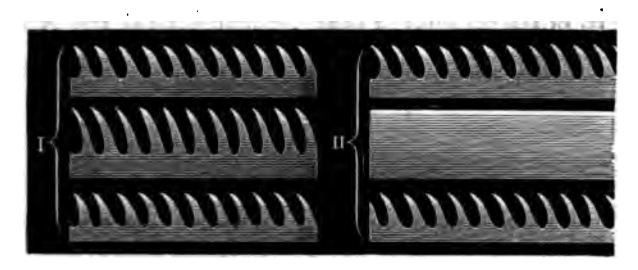


Fig. 56

quart de cette longueur), les mouvements en *c* et *c'* seront opposés : la flamme *d* restera immobile, tandis que les dentelures alterneront en *d'* et *d''* (II). La différence de marche étant portée à une longueur d'onde, l'accord reparaît (I); et ainsi de suite.

Avec une membrane ajoutée en O et des robinets placés en *r* et *r'*, on peut opérer sur des gaz autres que l'air, et mesurer ainsi sur différents gaz la longueur d'onde λ d'un son donné.

Mesure de la vitesse du son dans un gaz par la méthode interférentielle. — Une fois λ connu, la formule fondamentale (349)

$$\lambda = V\tau$$

permet de calculer V. C'est là un moyen indirect de mesurer la vitesse du son dans un gaz.

M. Schneebeli [1] a suivi cette méthode pour mesurer la vitesse de propagation du son dans l'air. Son appareil était constitué par un

[1] SCHNEEBELI, *loc. cit*

tube en forme de T dont les deux branches latérales se terminaient par deux poires de caoutchouc que l'on mettait en communication, l'une avec l'oreille, l'autre avec la source sonore, c'est-à-dire ici la caisse de résonnance d'un diapason de période connue τ. En modifiant à l'aide d'un piston la longueur de la grande branche, on cherchait à rendre la sensation minimum. La distance de deux positions consécutives du piston pour lesquelles le son était réduit au minimum donnait $\frac{\lambda}{2}$. On pouvait donc déterminer ainsi la vitesse U relative au son et au tube employés. Or (p. 68, *note*), si l'on compare deux expériences faites avec le même son sur deux tubes de rayons différents R_1 et R_2, on pourra poser, en désignant par A une constante,

$$U_1 = V\left(1 - \frac{A}{R_1}\right)$$

et

$$U_2 = V\left(1 - \frac{A}{R_2}\right),$$

d'où l'on tirera

$$V = \frac{U_1R_1 - U_2R_2}{R_1 - R_2}.$$

En groupant ainsi ses expériences deux à deux, M. Schneebeli a dressé un tableau renfermant trente-deux déterminations de V : ces valeurs oscillent entre 330^m et 333^m : la moyenne est 332^m.

356. Interférence des ondes directes et des ondes réfléchies. — *Superposition du mouvement direct et du mouvement réfléchi.* — Quand un système d'ondes émanant du point O se réfléchit contre un obstacle AB, un nouveau système d'ondes apparaît, ayant pour centre le point O', symétrique de O par rapport à AB; et la superposition des deux systèmes d'ondes donne lieu à des phénomènes d'interférence dont il est aisé de se rendre compte. Soit d la distance OC de la source au plan réfléchissant AB; en un point M, situé sur la normale OO' à une distance $CM = x$ de AB, viennent se superposer deux mouvements de même période,

ayant parcouru respectivement les chemins $O'M = d + x$ et $OM = d - x$, présentant par conséquent une différence géométrique $2x$; et, comme les mouvements qui se superposent ici sont de signes contraires, suivant que la quantité $2x$ sera égale à un multiple pair ou impair de la demi-longueur d'onde, il y aura minimum ou maximum. L'énoncé habituel est renversé; mais il est facile de faire rentrer le phénomène dans la règle générale si l'on remarque que l'inversion due à la réflexion résulterait également d'une augmentation de $\frac{\lambda}{2}$ sur le chemin parcouru par le deuxième mouvement. Si donc on admet qu'il y a *perte d'une demi-longueur d'onde*

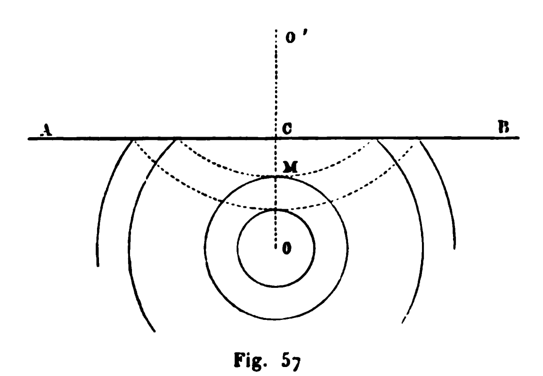


Fig. 57

dans la réflexion contre un obstacle inébranlable, la différence physique des chemins parcourus est $2x + \frac{\lambda}{2}$; et selon que cette différence $2x + \frac{\lambda}{2}$ sera égale à un multiple pair ou à un multiple impair de la demi-longueur d'onde, on aura en M un maximum ou un minimum. Ainsi, il se produira sur la normale une série de *nœuds* fixes, placés aux distances

$$0 \qquad 2\frac{\lambda}{4} \qquad 4\frac{\lambda}{4} \qquad 6\frac{\lambda}{4} \qquad \ldots$$

et une série de *ventres* fixes, aux distances

$$\frac{\lambda}{4} \qquad 3\frac{\lambda}{4} \qquad 5\frac{\lambda}{4} \qquad \ldots$$

Aux nœuds, la vitesse ne sera pas nulle, l'amplitude du mouvement réfléchi étant inférieure à celle du mouvement direct, mais le son sera très affaibli ; aux ventres, l'intensité sera maximum.

Si le point considéré M est en dehors de la normale OO', il y a encore minimum ou maximum suivant que la différence des distances O'M et OM est un multiple pair ou impair de $\frac{\lambda}{2}$. Les surfaces nodales et ventrales sont donc des hyperboloïdes de révolution, ayant pour foyers O, O', et dont les portions voisines de la ligne OO diffèrent peu de plans parallèles à AB.

Expériences de N. Savart (¹) *et de Seebeck* (²). — Ces phénomènes ont été étudiés expérimentalement par le colonel Nicolas Savart, frère du grand acousticien, et par Seebeck. Un mur vertical constituait l'obstacle devant lequel le son était produit au moyen d'une contrebasse ou d'un puissant tuyau d'orgue. Pour fixer la position des nœuds et des ventres, Seebeck se servit d'une membrane *mn*, tendue sur un cadre AB et munie d'un pendule léger *p*. En promenant ce *pendule acoustique* le long de CO, il put déterminer exactement les points cherchés et montrer que leur place était bien celle qui répondait à la théorie. N. Savart, au contraire, avait trouvé des nœuds là où le calcul indique des ventres et *vice versa*. La cause de ce désaccord tient à ce que N. Savart se servait de l'oreille pour déterminer les nœuds et les ventres. Or, tandis que dans l'expérience de Seebeck la membrane, en contact par ses deux faces avec l'air ambiant, accuse les mouvements de la couche où elle se trouve, le tympan, sollicité seulement sur sa face externe par l'onde sonore, subit les variations périodiques de pression dont un nœud est le siège, mais n'éprouve aucun effet au ventre : il se comporte exactement comme une capsule manométrique de Kœnig, ainsi que M. Kœnig lui-même l'a fait remarquer.

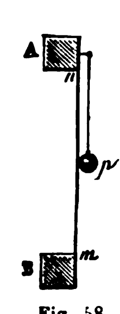


Fig. 58

Applications. — C'est essentiellement de l'interférence des ondes directes et des ondes réfléchies que résulte le jeu des plus puissants

(¹) Savart, *Ann. de chim. et de phys.* (2), LXXI, 20, et (3), XIV, 385 ; 1839-45.
(²) Seebeck, *Pogg. Ann.*, XLIX, 177 et LXVII, 145 ; 1840-46 ; et *Ann. de chim. et de phys.* (3), XVII, 490 ; 1846.

instruments de musique. Mais les phénomènes d'interférence ne se limitent pas aux appareils d'acoustique; ils se produisent dans toute enceinte fermée par des parois réfléchissantes : les architectes doivent donc en tenir grand compte pour la construction d'une salle de spectacle, d'un amphithéâtre, d'un lieu quelconque de réunion.

357. Traduction analytique du principe des interférences. — *Équations propres à représenter le mouvement vibratoire.* — Pour donner lieu au phénomène des interférences, il suffit, comme nous l'avons déjà remarqué, que le mouvement vibratoire auquel est dû le son soit une fonction périodique du temps qui reprenne des valeurs égales aux époques t, $t+\tau$, $t+2\tau$, ... et des valeurs égales et de signes contraires aux époques $t+\frac{\tau}{2}$, $t+\frac{3\tau}{2}$ ...

Il y a évidemment une infinité de fonctions satisfaisant à cette double condition. Imaginons, en effet, que, portant les temps en abscisses, et les déplacements en ordonnées, on trace à volonté

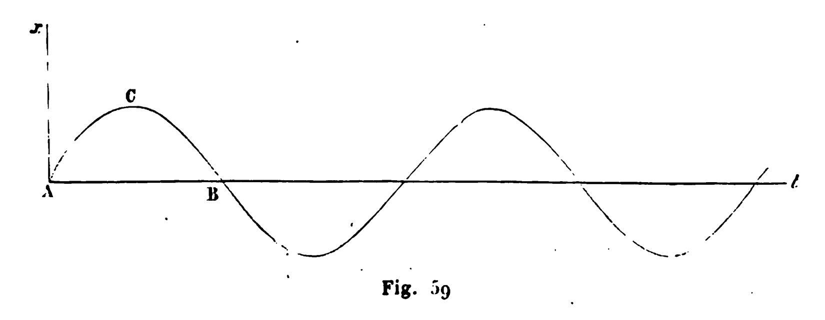


Fig. 59

un premier arc de courbe ACB, formé de deux portions symétriques, AC, CB, et qu'on reproduise ensuite cet arc à la suite de AB alternativement au-dessous et au-dessus de l'axe des x, indéfiniment; on aura ainsi une courbe répondant à une fonction périodique qui jouira des propriétés demandées.

Mais les mouvements moléculaires provoquant les phénomènes sonores ne sont pas quelconques. Ils proviennent des forces mises en jeu par la déformation. Si cette déformation est assez faible, la résultante des forces élastiques agissant sur un point matériel est proportionnelle à l'écart (135); par suite, le mouvement est pendulaire (86). La théorie de l'élasticité concorde ainsi parfaitement

avec le fait révélé dès le principe par l'inscription du mouvement acoustique, fait que confirmera une étude plus approfondie de ce mouvement.

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que, dans le mouvement vibratoire d'ensemble, chaque point du corps oscille suivant une ligne droite. Le mouvement du point sur la droite peut, d'après ce qui précède, se représenter par

$$x = A\cos(t - t_0)\sqrt{b},$$

mb étant le coefficient de proportionnalité de la force *mbx* à l'écart *x*.

Si l'on met en évidence la période

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{b}},$$

cette formule s'écrira

$$x = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t_0}{\tau}\right),$$

ou

$$x = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right):$$

φ est la *phase*, c'est-à-dire le nombre de périodes (¹) et la fraction de période écoulées depuis l'origine des temps jusqu'au moment où le mobile est parti de A.

La vitesse v du point en mouvement est

$$v = -\frac{2\pi A}{\tau}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right),$$

ou, si l'on pose $-\frac{2\pi A}{\tau} = a$,

$$v = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right).$$

(¹) On fait généralement abstraction du nombre entier de périodes, ce nombre ne changeant pas la valeur du cosinus, laquelle dépend seulement de la fraction résiduelle.

Si l'on changeait l'origine des temps de manière à augmenter de $\frac{\pi}{2}$ le produit $2\pi\frac{t}{\tau}$, les sinus deviendraient des cosinus, et réciproquement. Les deux formules qui représentent, l'une le déplacement, l'autre la vitesse, sont donc tout analogues. L'usage est d'exprimer le déplacement par un cosinus et la vitesse par un sinus, mais c'est pure convention.

La vitesse variant d'un instant à l'autre pendant toute la durée de la période, l'effet mécanique du mouvement vibratoire, autrement dit l'intensité, se mesurera par la force vive moyenne pendant la période, c'est-à-dire par l'intégrale des forces vives pendant le temps τ divisée par τ. Comme le milieu est supposé partout le même, la masse est constante, et par conséquent l'intensité est proportionnelle à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v^2\,dt \\
&=\frac{a^2}{\tau}\int_0^\tau \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi\right)dt \\
&=\frac{a^2}{\tau}\int_0^\tau \frac{1-\cos 4\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi\right)}{2}dt \\
&=\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi l'intensité a pour mesure, à un facteur constant près, le carré de l'amplitude.

Combinaison de deux mouvements vibratoires de même période. Si deux mouvements vibratoires parallèles et de même période se superposent en un même point suivant une même direction (ou suivant des directions peu inclinées), les vitesses des mouvements composants étant à chaque instant représentées par

$$v=a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi\right)$$

et

$$v'=a'\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi'\right),$$

la vitesse du mouvement résultant,

$$V = v + v' = (a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi') \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - (a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi') c$$

sera donnée par une expression de la même forme

$$V = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \Phi\right)$$
$$= A \cos 2\pi \Phi \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - A \sin 2\pi \Phi \cos 2\pi \frac{t}{\tau};$$

car on peut toujours poser

$$A \cos 2\pi\Phi = a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi'$$

et

$$A \sin 2\pi \Phi = a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi'.$$

Si, en effet, on élève ces deux expressions au carré et qu'on les ajc
on a

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi(\varphi - \varphi'),$$

équation donnant toujours pour A une valeur réelle.
Si l'on divise la deuxième par la première, il vient

$$\operatorname{tg} 2\pi \Phi = \frac{a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi'}{a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi'},$$

et il existe toujours une valeur réelle de Φ satisfaisant à cette é
tion.

Le carré de l'amplitude étant proportionnel à l'intensité, A^2
être regardé comme mesurant l'intensité au point consi
et l'on voit que cette intensité dépend de la différence de p
que les deux mouvements composants offrent en ce point :
est

$$\text{maximum, si } \cos 2\pi(\varphi - \varphi') = +1 \quad \text{ou} \quad \varphi - \varphi' = \frac{2k}{2},$$

$$\text{minimum, } \ldots\ldots\ldots\ldots = -1 \quad \ldots\ldots = \frac{2k+1}{2},$$

k étant un nombre entier quelconque 0, 1, 2, 3,...

L'intensité est maximum ou minimum suivant que la différence de phase est un nombre pair ou impair de demi-périodes.

Les deux mouvements qui viennent se superposer en Q (fig. 42) à l'époque t sont ceux qui existaient respectivement en A et B aux époques $t - \varphi\tau$ et $t - \varphi'\tau$; $(\varphi - \varphi')\tau$ est la différence des temps que les mouvements composants ont employés pour arriver en Q. Au lieu des temps écoulés, exprimés en périodes, on peut considérer les chemins parcourus, mesurés en longueurs d'onde. Si, dans l'expression de φ,

$$\varphi = \frac{t_0}{\tau},$$

nous remplaçons τ par sa valeur tirée de l'équation fondamentale

$$\lambda = V\tau,$$

nous aurons

$$\varphi = \frac{r}{\lambda},$$

en désignant par r le chemin Vt_0 parcouru depuis l'origine du temps, le *retard;* la vitesse peut donc encore s'écrire

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right).$$

Les vitesses des deux mouvements interférents seront alors

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right).$$

$$a' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r'}{\lambda}\right);$$

et l'on verrait aisément que la vitesse du mouvement résultant peu se représenter par

$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{R}{\lambda}\right),$$

l'intensité de ce mouvement ayant pour mesure

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda},$$

si l'on appelle δ la *différence de marche* $r - r'$ des deux mouvements et le retard R étant défini par l'équation

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{R}{\lambda} = \frac{a \sin 2\pi \frac{r}{\lambda} + a' \sin 2\pi \frac{r'}{\lambda}}{a \cos 2\pi \frac{r}{\lambda} + a' \cos 2\pi \frac{r'}{\lambda}}.$$

L'intensité résultante sera maximum ou minimum suivant que l'o aura

$$\delta = 2k \frac{\lambda}{2},$$

ou

$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

c'est-à-dire suivant que la différence de marche sera un multip pair ou un multiple impair de la demi-longueur d'onde.

Si les intensités des deux mouvements composants sont égale $a = a'$, l'intensité maximum du mouvement résultant vaut quat fois chacune des intensités composantes, l'intensité minimum e nulle.

On retrouve les résultats connus.

Règle de Fresnel. — Si l'on avait à composer dans un plan deu forces a et a' passant par un même point et faisant avec une droi donnée les angles $2\pi\varphi$ $\left(\text{ou } 2\pi\frac{r}{\lambda}\right)$ et $2\pi\varphi'$ $\left(\text{ou } 2\pi\frac{r'}{\lambda}\right)$, la résultan

serait précisément déterminée en grandeur et en direction par les deux équations qui définissent A^2 et $tg\,2\pi\Phi\left(\text{ou } tg\,2\pi\frac{R}{\lambda}\right)$. Il y a là une analogie remarquable, sur laquelle a beaucoup insisté Fresnel : si l'on représente chaque mouvement vibratoire par une droite de longueur a, menée sous l'angle $2\pi\varphi$ $\left(\text{ou } 2\pi\frac{r}{\lambda}\right)$, la règle pour composer deux mouvements vibratoires d'amplitudes et de phases (ou de marches) données est la même que la règle pour composer deux forces de grandeurs et de directions données : c'est la règle d'addition des vecteurs.

Tout mouvement vibratoire rectiligne peut de même se décomposer en deux autres ayant des phases quelconques.

Parmi tous ces modes de décomposition, il en est un que nous

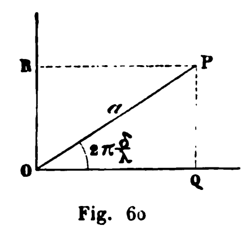


Fig. 60

devons signaler dès maintenant, parce qu'il est d'un fréquent usage c'est celui qui consiste à remplacer le mouvement proposé par deux autres,

l'un de phase o (ou de retard o) et d'amplitude $a\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$,

l'autre de phase $\frac{1}{4}$ $\left(\text{ou de retard } \frac{\lambda}{4}\right)$ et d'amplitude $a\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$:

il suffit de jeter les yeux sur la figure ci-contre, comme d'ailleurs sur l'expression $v = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$, pour voir que la vibration proposée OP équivaut en effet à ces deux vibrations OQ, OR.

La généralisation de la règle de Fresnel est évidente, tout ce que nous avons dit de la composition de deux mouvements s'étendant de soi au cas d'un nombre quelconque de mouvements.

Interférence des ondes sonores dans un tuyau limité. — Il ne sera

pas inutile de reprendre analytiquement l'étude de la superpo du mouvement direct et du mouvement réfléchi, examinée déjà haut. Pour simplifier le calcul, et en vue des applications rieures, nous considérerons une onde plane émise à l'orifice tuyau de longueur L : cette onde se propage jusqu'à l'extrémi tuyau, s'y réfléchit comme nous l'avons vu (350), et revient se s poser à l'onde directe résultant du mouvement entretenu à l'ori

Examinons d'abord le cas d'un tuyau fermé.

En un point quelconque de la tranche située à la distance fond, les vitesses des deux mouvements concourants sont, abs tion faite de la diminution de l'amplitude dans le mouve réfléchi,

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L-x}{\lambda}\right),$$

et

$$-a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L+x}{\lambda}\right) \text{ (1)};$$

et la vitesse du mouvement résultant, égale à la somme des vit des mouvements composants, est

$$v = 2a \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right).$$

Cette formule montre que :

1° A une époque quelconque, v est nulle aux points pour les

$$\sin 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0, \quad \text{ou} \quad x = k\frac{\lambda}{2},$$

k étant un nombre entier quelconque. On a donc une série de n fixes aux distances du fond

$$0, \ \frac{\lambda}{2}, \ 2\frac{\lambda}{2}, \ 3\frac{\lambda}{2}, \ldots$$

(1) On obtient également cette formule, soit que l'on considère le ch géométrique $L+x$ parcouru par l'ébranlement réfléchi et qu'on tienne co du signe — de la vitesse de cet ébranlement, soit que l'on considère le ch physique $L+x+\frac{\lambda}{2}$ sans s'occuper d'aucun changement de signe.

2° Pour une valeur quelconque de t, v est maximum en valeur absolue aux points tels que

$$\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}=\pm 1, \quad \text{ou} \quad x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Ainsi il existe une série de ventres fixes, échelonnés aux points

$$\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \dots;$$

et les vitesses sont, à un même instant, de signes contraires en deux ventres successifs, et plus généralement dans deux internœuds consécutifs, les changements de signe se faisant aux nœuds.

3° Pour une valeur donnée de x, la vitesse est une fonction circulaire du temps dont la période est partout égale à τ et dont la phase est indépendante de x : les vitesses sont donc nulles ou maxima en même temps sur toute la longueur L.

La condensation γ au point x est

$$\gamma=-\frac{du}{dx},$$

u étant le déplacement du point considéré.

Or

$$v=\frac{du}{dt},$$

d'où

$$u=2a\frac{\tau}{2\pi}\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right).$$

Donc

$$\gamma=-2a\frac{\tau}{\lambda}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right),$$

ou, d'après la relation fondamentale $\lambda=V\tau$, V étant la vitesse du son dans le milieu ébranlé,

$$\gamma=-\frac{2a}{V}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right).$$

Ainsi la condensation en un point donné est représentée par l même fonction périodique du temps que la vitesse, la phase seule di fère, $-\sin 2\pi \frac{t}{\tau}$ étant égal à $\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{4}\right)$; et, à une époque donné les condensations sont distribuées le long du tuyau suivant l même loi que les vitesses, hors que la condensation est maximur là où la vitesse est nulle, c'est-à-dire aux nœuds, et nulle là où l vitesse est maximum, c'est-à-dire aux ventres.

Si le tuyau est ouvert, les vitesses des deux mouvements interfé rents sont

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L-x}{\lambda}\right),$$

et

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L+x}{\lambda}\right);$$

la vitesse du mouvement résultant est donc

$$v = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda}\right),$$

et la condensation

$$\gamma = -\frac{2a}{V} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda}\right).$$

Ces formules sont, à un facteur constant près, les mêmes que da le cas d'un tuyau fermé, sauf que la formule qui représentait vitesse s'applique maintenant à la condensation changée de sign et *vice versa*. Il en résulte que là où se trouvait un nœud se trou un ventre, et réciproquement, les nœuds étant toujours caractéris par cette double circonstance que la vitesse y est nulle à tou époque, et la condensation maximum par rapport aux condensatio des autres points, mais périodiquement variable suivant la loi ha monique, tandis qu'aux ventres la condensation est toujours nul et la vitesse offre un maximum relatif, dont la valeur absol oscille entre deux limites, l'une positive, l'autre négative.

CHAPITRE V

TUYAUX SONORES

358. Vibration de l'air dans un tuyau sonore. — L'usage des tuyaux sonores remonte à l'antiquité la plus reculée : les origines du chalumeau, de la flûte, de la trompette se perdent dans la nuit des temps. De nos jours, les instruments à vent ont pris un développement considérable, et les grandes orgues réunissent des milliers de tuyaux de toute espèce.

Dans ces divers instruments le corps vibrant est essentiellement l'air. Les tuyaux d'orgue se construisent indifféremment en bois ou en métal : la hauteur du son ne dépend pas de la matière formant les parois, tant que celles-ci sont suffisamment épaisses et résistantes. Trois tuyaux de mêmes dimensions, l'un en cuivre, l'autre en bois, et le troisième en carton, donneront sensiblement le même son, à moins que le carton ne soit assez mince pour vibrer avec l'air intérieur : alors la note du troisième tuyau serait abaissée. Au contraire, la nature du gaz influe sur le son, qui monte ou descend, selon qu'on emploie un gaz léger (gaz d'éclairage et surtout hydrogène), ou lourd (acide carbonique ou protoxyde d'azote).

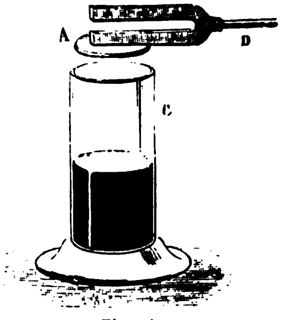


Fig. 61

L'air peut d'ailleurs être mis en vibration dans le tuyau de différentes manières. Un diapason approché de l'ouverture d'un tuyau communiquera son mouvement à l'air intérieur, et si la longueur

de la colonne aérienne est convenable, le son du diapason sera énergiquement renforcé. Ordinairement pour faire parler un tuyau on emploie une *embouchure* actionnée par le vent d'une soufflerie. L'embouchure la plus usitée est celle que représente la figure ci-contre et que l'on appelle *embouchure de flûte*, ou *bouche*. Le *pied* P du tuyau étant fixé sur le *sommier* d'une soufflerie, l'air arrive dans la *boîte à air* K, d'où il sort par la *lumière* c pour venir frapper contre la *lèvre ab* taillée en biseau : l'espace compris entre la fente *c* et le biseau *ab* se nomme la bouche. Le frottement de l'air contre le biseau produit un sifflement que l'on entend très bien sur une embouchure isolée ([1]) : ce sifflement est formé d'un grand nombre de sons discordants, entre lesquels le tuyau RR choisit pour le renforcer celui (ou ceux) qui se trouve parmi les sons qu'il peut rendre lui-même ([2]).

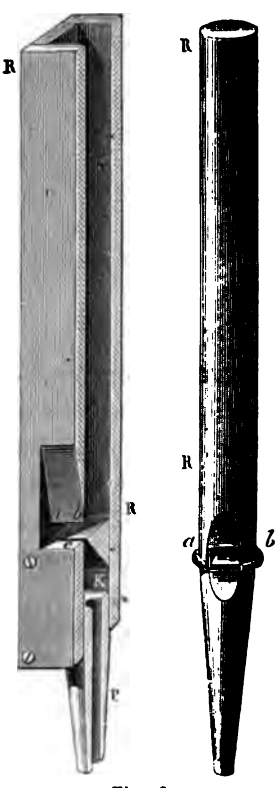


Fig. 62

359. Lois de Bernoulli. — Les sons que rend un tuyau sonore sont soumis à certaines lois, établies par Daniell Bernoulli ([3]), et qui découlent immédiatement des principes précédemment exposés.

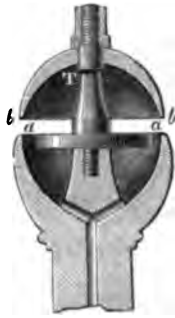


Fig. 63

([1]) Un sifflet de locomotive n'est en réalité qu'une embouchure constituée par une fente circulaire *aa*, au-dessus de laquelle se place le bord tranchant *bb* du timbre T.

([2]) La hauteur du son rendu est indépendante de la substance qui constitue le biseau, pourvu que celle-ci soit rigide; mais le son monte quand le biseau se rapproche de la lumière. Il monte encore quand la vitesse du courant d'air augmente.

([3]) D. Bernoulli, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1762, p. 431.

Supposons le tuyau de dimensions transversales assez restreintes pour que le mouvement puisse être considéré comme se propageant par tranches, tous les points d'une même section droite ayant à chaque instant même vitesse parallèle à l'axe. Le mouvement, parti de l'embouchure, progresse dans le tuyau jusqu'à l'extrémité, s'y réfléchit, rebrousse chemin, et se superposant au mouvement direct, entretenu à l'origine, donne naissance au système de nœuds et de ventres fixes étudié plus haut. Mais, une fois revenue à l'origine, l'onde sonore s'y réfléchit et repart de nouveau, constituant en quelque sorte une nouvelle onde directe. Si cette nouvelle onde est dans le même état que l'onde primitive, elle se réfléchira comme elle au bout du tuyau et engendrera par interférence avec l'onde réfléchie qu'elle provoque, c'est-à-dire avec l'onde trois fois réfléchie, un système identique à celui qui résultait de l'interférence de la première onde avec son onde réfléchie. Il en sera de même de l'interférence de l'onde quatre fois réfléchie avec l'onde cinq fois réfléchie, et ainsi de suite. Tous ces mouvements s'ajoutant renforceront énergiquement le son originel. Donc, pour savoir dans quels cas le renforcement se produit, il suffit de déterminer les conditions de la concordance entre l'onde deux fois réfléchie et l'onde directe.

I. *Tuyaux ouverts.* — L'onde partie de l'origine, réfléchie à l'extrémité libre, réfléchie une deuxième fois à l'origine, n'a subi dans sa vitesse aucun changement de signe ; la condensation a éprouvé deux changements de signe successifs, de sorte que finalement le signe primitif se trouve rétabli. Donc l'onde deux fois réfléchie sera concordante avec l'onde directe, si le chemin parcouru, c'est-à-dire le double de la longueur L du tuyau, contient un nombre entier k de fois la longueur d'onde λ du son proposé. Ainsi la condition du renforcement sera

$$2L = k\lambda,$$

ou, d'après la relation $\lambda = V\tau = \frac{V}{N}$, N étant dans l'unité de temps le nombre de vibrations du son de période τ,

$$N = k\frac{V}{2L}.$$

Cette formule renferme toutes les lois relatives aux tuyaux ouverts :

1° Un tuyau ouvert peut rendre une série de sons dont les nombres de vibrations sont entre eux comme 1, 2, 3, 4, 5,....., c'est-à-dire comme la série complète des harmoniques naturels.

2° La hauteur de l'un quelconque de ces sons est en raison inverse de la longueur du tuyau.

3° Le son le plus grave que peut rendre le tuyau, le *son fondamental*, défini par $k = 1$, a pour longueur d'onde le double de la longueur du tuyau

$$\lambda = 2L,$$

ou pour hauteur

$$N = \frac{V}{2L}.$$

4° Les nœuds et les ventres fixes des différents sons se placent

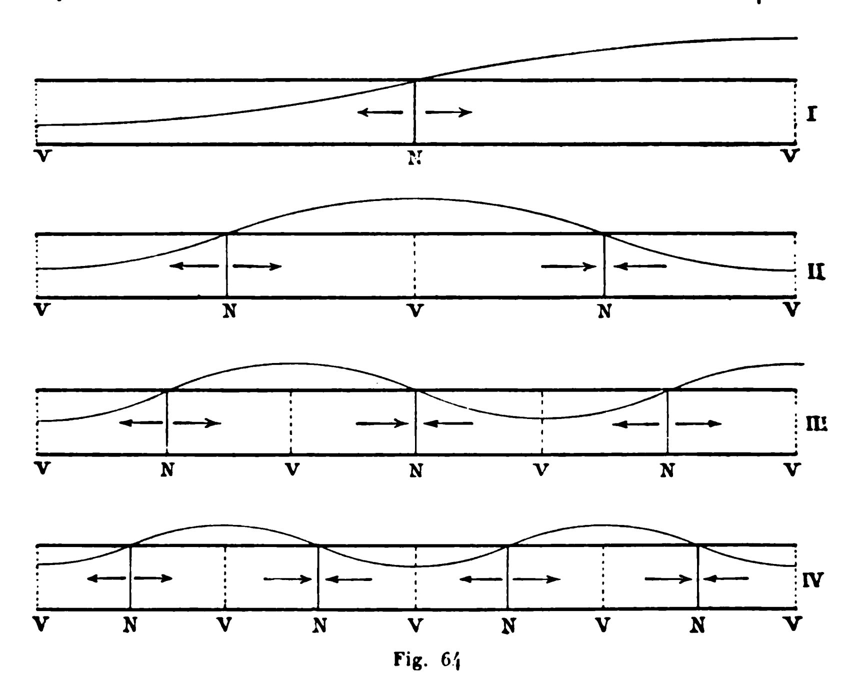


Fig. 64

comme l'indique la figure ci-contre, chacune des deux extrémités ouvertes étant nécessairement un ventre.

Dans les internœuds successifs, les vitesses sont de signe contraire. Si les courbes tracées sur les figures représentent les vitesses à une certaine époque, ces vitesses après une demi-période auront pris partout des valeurs égales et opposées, les vitesses étant toujours de signe contraire de part et d'autre d'un nœud. De même, à un instant donné, les nœuds successifs sont alternativement condensants et dilatants, et ils changent tous de signe en même temps toutes les demi-périodes, l'air intérieur étant pendant un moment partout à la pression atmosphérique.

II. *Tuyaux fermés.* — La réflexion contre le fond changeant le signe de la vitesse, et la réflexion à l'origine changeant le signe de la condensation, l'onde deux fois réfléchie sera concordante avec l'onde directe, si le chemin parcouru $2L$, augmenté de $\frac{\lambda}{2}$, est égal à $k\lambda$. On devra donc avoir

$$4L=(2k-1)\lambda,$$

ou

$$N=(2k-1)\frac{V}{4L}.$$

D'où les lois suivantes :

1° Un tuyau fermé peut rendre une série de sons caractérisés par les harmoniques impairs 1, 3, 5, 7,.....

2° La hauteur de l'un quelconque de ces sons est en raison inverse de la longueur du tuyau.

3° Le son fondamental a pour longueur d'onde quatre fois la longueur du tuyau

$$\lambda=4L,$$

ou pour hauteur

$$N=\frac{V}{4L}:$$

il est à l'octave grave du son fondamental d'un tuyau ouvert de même longueur.

4° Les points notables sont disposés comme le montre la figure ci-après, le fond du tuyau étant toujours un nœud.

Chaque son étant à l'octave grave du son analogue que rendrait un tuyau ouvert de même longueur, est identique à celui que

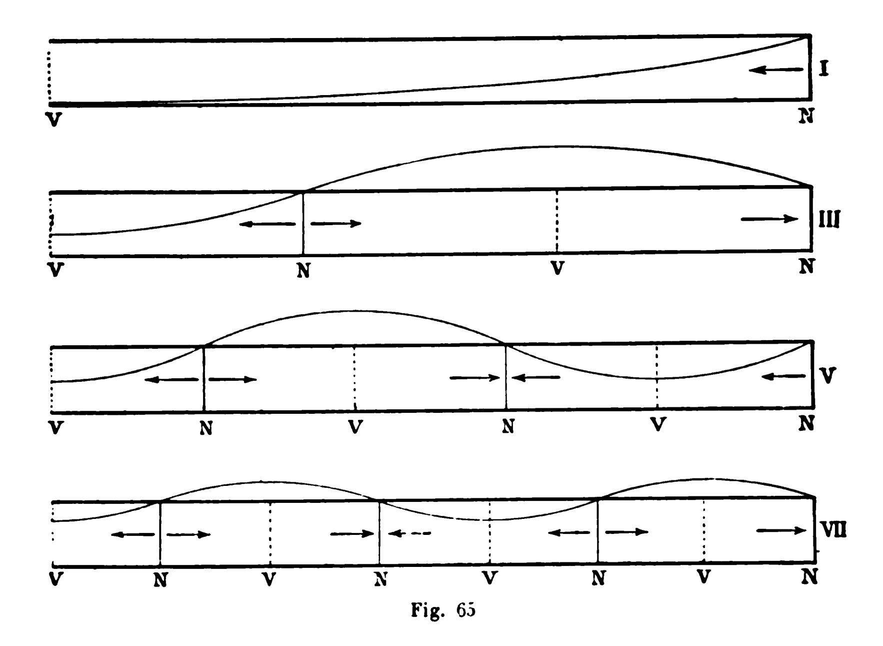


Fig. 65

donnerait un tuyau ouvert prolongé d'une longueur égale au delà du fond : dans un tel tuyau les seuls harmoniques possibles sont évidemment les harmoniques impairs.

360. Vérifications expérimentales. — L'expérience s'accorde en général d'une façon satisfaisante avec la théorie qui précède.

1° Mersenne [1] remarque que de la trompette harmonique on tire aisément la tonique, l'octave, la douzième (quinte de l'octave), la quinzième (double octave), et pas de notes intermédiaires. Sauveur [2] cite des faits semblables ; mais c'est Bernoulli qui établit le premier la loi de succession des sons supérieurs tant dans les tuyaux ouverts que dans les tuyaux fermés. Pour la vérifier après lui, on prend un tuyau long et étroit, un grand tube de verre, monté sur une embouchure de flûte, et on y envoie de l'air sous pression croissante : les sons se succèdent en suivant très

(1) Mersenne, *loc. cit.*, p. 271.
(2) Sauveur, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1701, p. 299.

sensiblement la série harmonique. On obtient tous les termes de la série (sans peine jusqu'au vingtième) si le tuyau est ouvert [1], les termes impairs seulement si le tuyau est fermé. Le passage d'un terme à l'autre ne se fait pas d'une façon absolument brusque; le son ne prend sa nouvelle hauteur qu'après avoir débuté faiblement en dessous; puis il s'enfle en montant jusqu'à ce qu'il ait atteint le ton voulu : il a acquis alors sa pleine intensité, l'intensité maximum correspondant à l'exacte concordance de toutes les ondes superposées dans la colonne vibrante. D'ailleurs, les divers sons dont on constate ainsi la succession peuvent évidemment coexister : en fait, le son fondamental d'un tuyau cylindrique étroit est toujours accompagné d'harmoniques nettement perceptibles.

2° La loi de la raison inverse de la longueur est très anciennement connue. Elle s'applique assez bien aux tuyaux longs et étroits; mais, d'une manière générale, elle comporte certaines perturbations sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

3° La relation entre les sons fondamentaux d'un tuyau ouvert et d'un tuyau fermé de même longueur se constate facilement au moyen d'un tuyau ouvert quelconque : en le bouchant on lui fait rendre l'octave grave du son primitif.

4° Pour étudier la disposition des points notables, on peut recourir à un grand nombre de procédés.

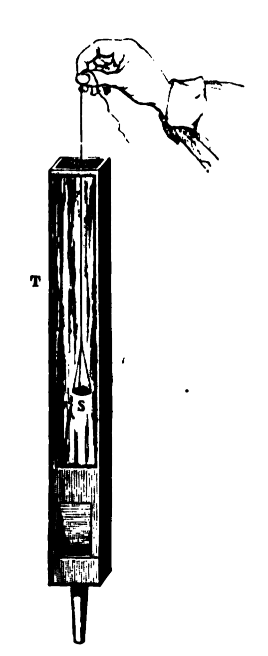


Fig. 66

Si l'on introduit dans un tuyau à paroi de verre une petite membrane recouverte de sable, on reconnaît aisément que le sable est en repos aux nœuds seulement, tandis qu'il est agité dans tout le reste de la colonne et particulièrement aux ventres. A la membrane recouverte de sable, employée par Savart [2], on peut substi-

[1] Quand le tuyau est très long, on obtient difficilement le son fondamental : l'instrument a une tendance à *octavier*.

[2] SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIV, 58; 1823.

tuer une lame de collodion (Gripon), ou de liquide glycériq (Mach). L'expérience peut se faire pour un son supérieur qu

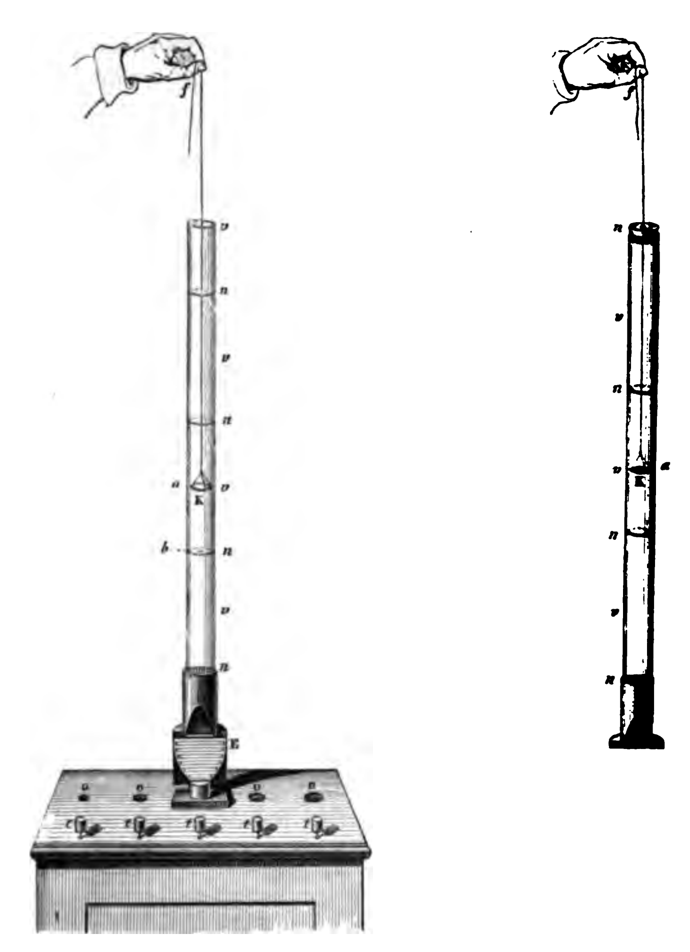


Fig. 67

conque, comme pour le son fondamental, et dans un tuyau fer aussi bien que dans un tuyau ouvert (¹).

La pression aux ventres étant la pression atmosphérique, trou percé à un ventre ne change pas le son, tandis qu'aille il le modifie : dans le tuyau figuré ci-contre et excité de faç

(¹) Sur quelques singularités que peut présenter cette expérience, v von Lang, *Wied. Ann.*, VII, 292; 1879.

à rendre le son 3, la hauteur du son ne change pas quand on ouvre les trous correspondant aux ventres *v*, *v*, mais elle monte quand on lève les opercules *a* ou *b*.

Aux nœuds, la vitesse est nulle. Si donc on immobilise la tranche

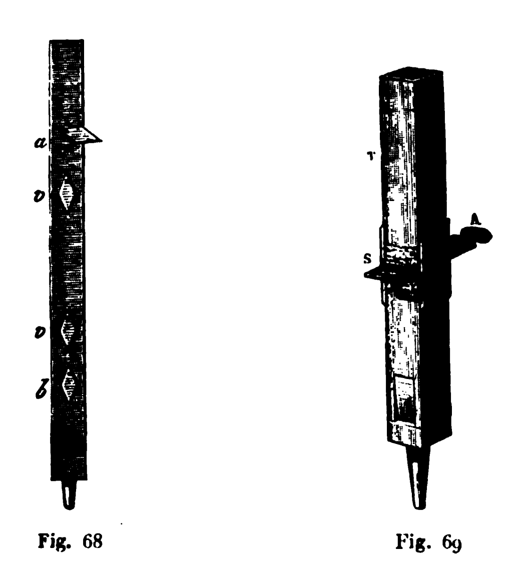


Fig. 68 Fig. 69

d'air qui s'y trouve, on n'apporte aucune modification à l'état de la colonne vibrante. Ainsi, le tuyau ouvert T rendant le son fondamental, poussons la coulisse AS placée au nœud de manière à substituer à la partie évidée S la partie pleine A : le son ne change pas. On peut encore interpréter cette expérience comme prouvant qu'un tuyau fermé donne le même son qu'un tuyau ouvert de longueur double.

Si l'air est immobile aux nœuds, la pression y est maximum. C'est donc là qu'il faudra disposer les capsules manométriques de Kœnig. La figure 70 représente un tuyau ouvert, muni de capsules manométriques au nœud *a* du son 1, et aux nœuds *b*, *c* du son 2. Quand le tuyau émet le son fondamental, les trois flammes s'agitent, mais celle du milieu accuse des variations de longueur beaucoup plus marquées que les deux autres : elle peut même s'éteindre si le son est suffisamment intense. Au contraire, cette flamme *a* est absolument immobile, tandis que les deux autres *b*, *c* sont fortement agitées, si le tuyau donne l'octave. Dans le

tuyau bouché, représenté à côté, la flamme *b* placée près du fond correspond toujours à un nœud ; les autres sont disposées au ventre *a* et au nœud *c* du premier son supérieur (son 3). Si le tuyau rend le son fondamental, les trois flammes vibrent, mais avec une intensité décroissante de *b* à *c*. Si le tuyau donne le son 3, la flamme *a* est immobile, tandis que les flammes *b* et *c* éprouvent des variations considérables d'éclat et de hauteur. On sait que la

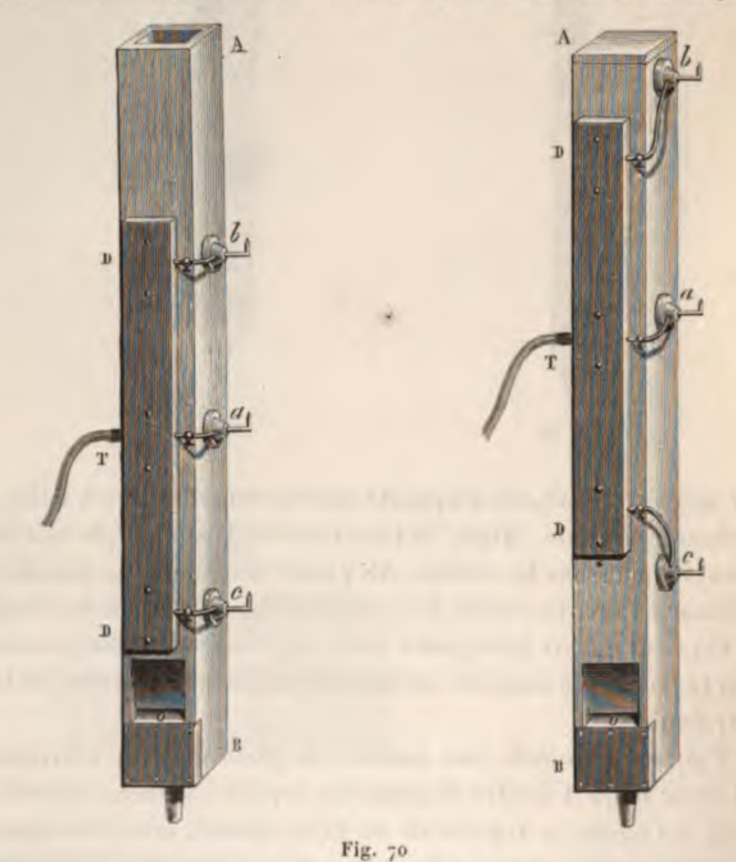


Fig. 70

manière la plus facile de saisir ces variations est d'examiner la flamme dans un miroir tournant.

M. Kœnig[1] a construit encore un appareil très commode pour étudier l'état d'une colonne aérienne en vibration. Un grand tuyau d'orgue, couché horizontalement au-dessus d'une longue

[1] Kœnig, *Wied. Ann.*, 569; 1881; et *Quelques expériences*, p. 206.

cuvette, est fendu sur toute la longueur de sa face inférieure : dans la fente pénètre l'une des branches *ca* d'un tube en U, venant déboucher au centre de la section droite du tuyau ; l'autre branche *db*, restant en dehors, peut être reliée à l'oreille ou à une capsule manométrique. Dans la cuvette on verse un liquide qui forme fermeture hydraulique, tout en permettant de faire marcher le tube explorateur de façon à amener son orifice intérieur en tel point que l'on veut de l'axe de la colonne vibrante. La figure 71 offre une coupe transversale du tuyau, fermé en haut par une glace, au-dessus de laquelle peut glisser la pince *mn* soutenant le

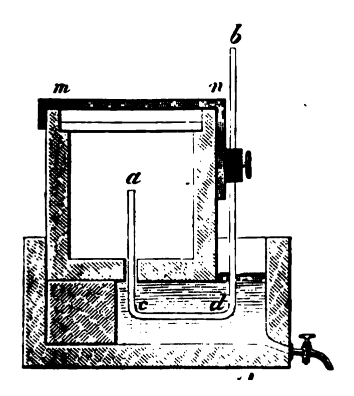


Fig. 71

tube explorateur *acdb*. En promenant ce tube tout le long du tuyau, pendant que celui-ci émet une note quelconque, on constate à l'oreille que le son s'enfle puissamment aux nœuds, et s'affaiblit aux ventres. L'expérience montre que, s'il est difficile de reconnaître nettement le lieu d'un maximum d'intensité, il est au contraire aisé de fixer la place d'un minimum, le son y disparaissant brusquement, de manière qu'on détermine à l'oreille la position des ventres avec exactitude et facilité. L'observation d'une flamme assez courte peut suppléer l'oreille : la flamme devient subitement très lumineuse à chaque ventre, tandis que dans tout le reste de la colonne elle est bleue et peu visible.

Quand un tuyau rend un son supérieur, la colonne d'air se divise spontanément en parties aliquotes, vibrant isolément et à l'unisson.

Si, par exemple, un tuyau ouvert rend le son 4, nous pouvons

considérer la colonne d'air comme partagée en quatre segmei longueur $\frac{\lambda}{2}$, limités aux ventres v, v, v, de sorte que si l'on e successivement le segment supérieur, puis le suivant, puis e celui qui vient après, le son conserve toujours la même hau il restera identique si l'on remet les uns après les autres les segments. L'expérience se fait avec la *flûte de Bernoulli*, étroit t en palissandre, formé d'une première partie portant l'embou et de trois autres tronçons de même longueur, superposés.

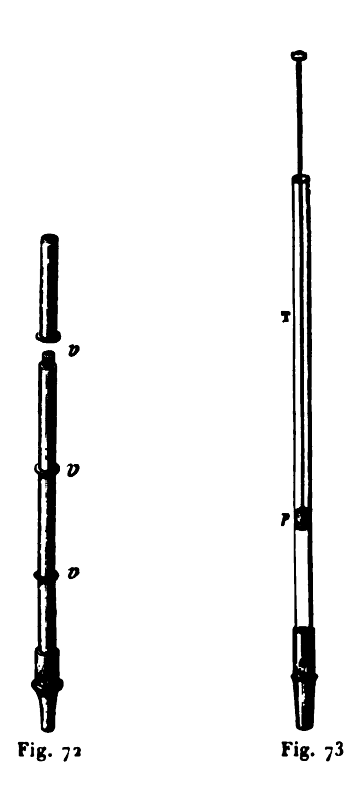


Fig. 72 Fig. 73

Au lieu de démonter le tuyau aux ventres, limitons-le succes ment aux divers nœuds à l'aide d'un piston mobile p, ainsi que l sait Bernoulli : nous pourrons encore ajouter ou retrancher un i bre quelconque de concamérations sans modifier le son primit

(1) Outre les tuyaux ouverts et les tuyaux fermés ou *bourdons*, on en encore en musique les *tuyaux à cheminée*, tuyaux bouchés dont le fond

Ces expériences sont susceptibles de mesures comportant une certaine précision. Ainsi, d'après Masson [1], une flûte de Bernoulli rendant un son dont la demi-longueur d'onde était $0^m,138$, se composait de segments ayant précisément cette même longueur $0^m,138$, à l'exception de celui qui portait l'embouchure et dont la longueur était seulement $0^m,103$.

Pareillement, quand on opère avec un piston mobile dans un tuyau long, étroit, embouché sur tout son pourtour et rendant un son de rang un peu élevé, comme l'ont fait Desains et Lissajous [2], on constate que la longueur des internœuds est la même dans tout le tuyau et égale à la demi-longueur d'onde du son émis.

Le tube explorateur conduit aux mêmes résultats : M. Kœnig trouve par exemple pour le huitième son d'un tuyau ouvert, ayant $2^m,33$ de longueur sur $0^m,12$ de côté, les distances suivantes, en millimètres, des ventres successifs, à partir de l'embouchure :

173, 315, 320, 314, 316, 312, 309, 271 :

les six nombres moyens sont sensiblement égaux entre eux et à leur moyenne 314; le premier est inférieur à cette moyenne de 141 et le dernier, de 43 [3].

L'expérience confirme donc les indications de la théorie, sauf la relation entre la longueur du tuyau et la longueur d'onde. La longueur d'un tuyau, ouvert ou fermé, émettant le son fondamental, est moindre que la longueur théorique $\frac{\lambda}{2}$ ou $\frac{\lambda}{4}$. Si le tuyau rend un son supérieur, les points notables sont distants de $\frac{\lambda}{4}$ sur toute la longueur du tuyau, à l'exception du premier

une ouverture à laquelle est adapté un petit tuyau ouvert de longueur convenable. La théorie de ces instruments a été établie par Bernoulli, Poisson et Duhamel; M. Gripon en a vérifié la conséquence la plus importante, d'accord avec les faits qui précèdent, à savoir que les deux colonnes d'air de diamètres différents qui composent un tuyau à cheminée vibrent isolément à l'unisson, les nœuds et les ventres étant placés dans chacune aux distances voulues de l'extrémité libre (GRIPON, *Ann. de l'Éc. norm.*, (1), I; 1864).

(1) MASSON, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XL, 463; 1855.

(2) DESAINS et LISSAJOUS, *Expériences inédites*, citées dans DESAINS, *Leçons de physique*, II, 70. Paris, Desobry; 1860.

(3) Cf. HURION, *Journal de physique*, (2), I, 136; 1882.

nœud qui est toujours plus rapproché de l'embouchure et du dernier nœud dans un tuyau ouvert ou du dernier ventre dans un tuyau bouché [1] qui est encore à une distance de l'extrémité moindre que $\frac{\lambda}{4}$. C'est ce que l'on appelle les perturbations aux extrémités.

361. Perturbations aux extrémités. — *Leur origine.* — La perturbation la plus importante est celle qui se produit à l'embouchure. Elle provient de ce que, par suite même du mode d'ébranlement, la condensation n'est pas nulle dans tous les points de la tranche originelle, ainsi que l'exige la théorie.

A l'extrémité libre du tuyau ouvert, les choses ne se passent pas non plus comme nous l'avons supposé. Sous l'influence du courant d'air qui traverse le tuyau, la colonne vibrante se prolonge au delà des parois : la réflexion sur l'air extérieur n'a donc pas lieu exactement dans le plan extrême, mais un peu plus loin ; et aux points mêmes où s'opère cette réflexion, on ne saurait concevoir une condensation rigoureusement nulle : la densité de l'air intérieur est sans cesse égale non pas à la densité constante de l'air extérieur au repos, mais à la densité variable de cet air en vibration.

Dans les tuyaux fermés, nous avons admis que la vitesse de la dernière tranche était nulle, le fond étant inébranlable. De telles conditions ne peuvent être réalisées absolument; toutefois, il n'est pas difficile de donner au fond une résistance telle que la perturbation y soit très faible.

Théorie de Poisson [2]. — Poisson le premier rejeta l'hypothèse d'une condensation nulle aux extrémités libres; et, en admettant seulement qu'elle y est très petite, mais proportionnelle à la vitesse [3], il édifia une théorie qui rend bien compte des faits, dégage les lois, et fait ressortir les perturbations, sans toutefois les mesurer.

[1] Tel est du moins le résultat des expériences de M. Kœnig; Savart avait trouvé au contraire que la distance entre le fond d'un tuyau fermé et le dernier ventre était supérieure à un quart d'onde.

[2] Poisson, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1817, II, 305.

[3] Cette dernière supposition est inutile, Hopkins sut s'en passer; elle est même inexacte : il y a une différence de phase de 1/4 entre la vitesse et la condensation à l'extrémité libre d'un tuyau ouvert.

Travaux d'Hopkins (¹) *et de Quet* (²). — Hopkins et Quet améliorèrent cette théorie, et mirent en évidence l'effet des réflexions multiples aux extrémités.

Nous avons dit que la condition pour qu'un tuyau renforce un son produit à l'origine est la concordance de l'onde deux fois réfléchie avec l'onde directe. Si, en effet, cette concordance existe, toutes les ondes deux fois, quatre fois, six fois, ... réfléchies se superposent à l'onde directe et, en un temps très court, vu la rapidité avec laquelle se propage le son, amènent un renforcement énergique. Mais quel est l'effet exact de cette superposition?

Considérons un mouvement vibratoire entretenu à l'origine,

$$v = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Ce mouvement se réfléchit à l'extrémité du tuyau : nous admettrons, avec Hopkins, que toute réflexion produit à la fois un changement d'amplitude et un changement de phase. Soit ma l'amplitude du mouvement réfléchi, m étant un facteur plus petit que 1. Le mouvement réfléchi se superpose au mouvement direct, et le mouvement résultant, en un point situé à la distance x de l'extrémité, a une amplitude A et une phase Φ déterminées, d'après la règle de Fresnel, par les équations

$$A^2 = a^2\left(1 + m^2 + 2m\cos 2\pi(\varphi' - \varphi)\right)$$
$$\operatorname{tg} 2\pi\Phi = \frac{\sin 2\pi\varphi + m\sin 2\pi\varphi'}{\cos 2\pi\varphi + m\cos 2\pi\varphi'},$$

φ et φ' étant les phases des mouvements composants au point considéré.

Revenu à l'origine, le mouvement s'y réfléchit : soient $mm'a$ ou μa l'amplitude du mouvement deux fois réfléchi et Ψ sa phase à l'origine. Ce mouvement donnera avec le mouvement trois fois réfléchi, un mouvement résultant dont l'amplitude sera μA et la phase $\Phi + \Psi$, puisque les conditions d'interférence restent les

(¹) HOPKINS, *Cambridge Phil. Trans.*, V; 1838.
(²) QUET, *Journal de Liouville*, XX, 1; 1855.

mêmes que pour le premier couple, sauf que les amplitudes sont multipliées par μ, et que la phase de chacun des mouvements composants est augmentée de Ψ : chacune des lignes du triangle de Fresnel est multipliée par μ et a tourné de l'angle $2\pi\Psi$.

Le mouvement quatre fois réfléchi donnera de même, avec le mouvement cinq fois réfléchi, un mouvement résultant d'amplitude $\mu^2 A$ et de phase $\Phi + 2\Psi$, et ainsi de suite indéfiniment, le nombre de ces mouvements qui se superposent pour constituer le mouvement définitif étant très grand au bout d'un temps extrêmement court. L'intensité du mouvement définitif peut donc se représenter par

$$A^2 \left| \begin{array}{l} [\cos 2\pi\Phi + \mu\cos 2\pi(\Phi+\Psi) + \mu^2\cos 2\pi(\Phi+2\Psi) + \mu^3\cos 2\pi(\Phi+3\Psi) + \ldots \\ + [\sin 2\pi\Phi + \mu\sin 2\pi(\Phi+\Psi) + \mu^2\sin 2\pi(\Phi+2\Psi) + \mu^3\sin 2\pi(\Phi+3\Psi) + \ldots \end{array} \right.$$

ou, après des simplifications évidentes, par

$$A^2 \left| \begin{array}{l} [1 + \mu\cos 2\pi\Psi + \mu^2\cos 2(2\pi\Psi) + \mu^3\cos 3(2\pi\Psi) + \ldots]^2 \\ \quad + [\mu\sin 2\pi\Psi + \mu^2\sin 2(2\pi\Psi) + \mu^3\sin 3(2\pi\Psi) + \ldots]^2. \end{array} \right.$$

Mais chacune des sommes entre parenthèses est connue [1] : la première est égale à $\frac{1 - \mu\cos 2\pi\Psi}{1 - 2\mu\cos 2\pi\Psi + \mu^2}$ et la deuxième à $\frac{\mu\sin 2\pi\Psi}{1 - 2\mu\cos 2\pi\Psi + \mu^2}$.

L'expression précédente se réduit donc à

$$A^2 \frac{1}{1 - 2\mu\cos 2\pi\Psi + \mu^2};$$

ou à

$$a^2 \frac{1 + m^2 + 2m\cos 2\pi(\varphi' - \varphi)}{1 - 2\mu\cos 2\pi\Psi + \mu^2}.$$

Le dénominateur étant indépendant de x, la position des points notables dépendra du numérateur seul.

[1] Voir Bertrand, *Cours de calcul différentiel et intégral*, I, 389. **Paris, Gauthier-Villars; 1864.**

Les ventres correspondent aux maxima du numérateur, c'est-à-dire aux points où $\cos 2\pi(\varphi' - \varphi)$ est égal à $+1$.

Or, on a

$$\varphi' - \varphi = \frac{L+x}{\lambda} - \frac{L-x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = \frac{2x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda},$$

L étant toujours la longueur du tuyau, et r représentant le retard produit par la réflexion à l'extrémité.

Les ventres seront donc déterminés par la relation

$$\frac{2x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = k,$$

k étant un nombre entier quelconque; et la distance de deux ventres successifs

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

sera, dans tous les cas, exactement égale à une demi-longueur d'onde.

On verrait de même que la distance de deux nœuds successifs sera toujours égale à $\frac{\lambda}{2}$.

Mais la distance du ventre le plus rapproché de l'extrémité à cette extrémité est donnée par la relation

$$\frac{2x_1}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = 1,$$

d'où l'on conclut que :

Dans un tuyau ouvert, la distance de l'extrémité au ventre le plus proche est

$$x_1 = \frac{\lambda}{2} - \frac{r}{2}.$$

Dans un tuyau fermé, où, r étant très-voisin de $\frac{\lambda}{2}$, on peut poser $r = \frac{\lambda}{2} + r'$, on a

$$x_1' = \frac{\lambda}{4} - \frac{r'}{2}.$$

La position des points notables relatifs à un son donné ne dépend pas de la longueur du tuyau (comptée à partir de l'extrémité où se produit la première réflexion); mais l'intensité du son en dépend.

En effet, la valeur absolue de l'intensité en un point quelconque, x étant constant et par suite le numérateur étant constant, sera maximum si le dénominateur est minimum, c'est-à-dire si $\cos 2\pi\Psi$ est égal à $+1$.

Or

$$\Psi = \frac{2L}{\lambda} + \frac{r+s}{\lambda},$$

s désignant le retard causé par la réflexion à l'origine.

Le renforcement sera donc maximum si la longueur L du tuyau satisfait à la condition

$$L + \frac{r}{2} + \frac{s}{2} = k\frac{\lambda}{2},$$

autrement dit si la longueur du tuyau, augmentée de $\frac{r}{2}+\frac{s}{2}$, est un multiple entier de la demi-longueur d'onde.

L'hypothèse la plus simple est de supposer chacun de ces retards r et s indépendant de la longueur d'onde. Leur somme est alors une constante

$$r + s = 2l,$$

et la condition du renforcement devient

$$L + l = k\frac{\lambda}{2}.$$

On retrouve la loi des longueurs, à cette seule différence près, que ce n'est pas la longueur même du tuyau, mais cette longueur augmentée d'une quantité constante l qui doit, pour le renforcement, être un multiple exact de la demi-longueur d'onde.

Quand le tuyau est fermé, on a $r = r' + \frac{\lambda}{2}$; on posera donc

$$r + s = 2l' + \frac{\lambda}{2}.$$

et il viendra

$$L + l' = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}.$$

Les sons les plus énergiquement renforcés sont encore ceux pour lesquels la longueur du tuyau, augmentée d'une quantité constante l', est un multiple impair du quart de la longueur d'onde.

Expériences de Wertheim (1). — D'après les expériences de Wertheim, les perturbations aux extrémités seraient en effet indépendantes de la longueur d'onde. Sur une même embouchure il vissait successivement divers tuyaux d'égal diamètre, mais de longueurs différentes; il mesurait ces longueurs; il déterminait d'autre part les nombres de vibrations des sons fondamentaux rendus par les tuyaux : ces deux éléments lui permettaient de calculer la constante cherchée. Soient, par exemple, des tuyaux fermés, de longueurs L_1, L_2,..., émettant les sons N_1, N_2,..., on a

$$N_1 = \frac{V}{4(L_1 + l')},$$
$$N_2 = \frac{V}{4(L_2 + l')},$$

V étant la vitesse du son dans les conditions de l'expérience, vitesse qu'il est d'ailleurs inutile de connaître pour obtenir l', car la comparaison des équations précédentes donne immédiatement

$$4N_1(L_1 + l') = 4N_2(L_2 + l') = \cdots,$$

d'où

$$l' = \frac{N_2L_2 - N_1L_1}{N_1 - N_2} = \frac{N_3L_3 - N_2L_2}{N_2 - N_3} = \cdots$$

Wertheim trouve en effet pour l' un nombre constant à 1/20 près,

(1) WERTHEIM, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIII, 434; et XXXI, 385; 1848-51.

le rayon R du tuyau restant le même. Si ce rayon varie, la constante varie, et l'on peut poser $l' = 0,746\,R$ (1).

Théorie de M. von Helmholtz (2). — M. von Helmholtz, le premier, a établi une théorie exacte des tuyaux sonores, sans introduire aucune hypothèse sur l'état de l'air aux extrémités. Suivant cette théorie, quand un tuyau cylindrique étroit débouche au fond d'un deuxième tuyau extrêmement large, la correction au point où s'ouvre le tuyau étroit est 0,82 R.

Lorsque le tuyau s'ouvre dans un espace libre en tous sens (et non plus limité en arrière par un plan indéfini), la correction doit être réduite, d'après les expériences de lord Rayleigh (3), d'environ 0,2 R, ce qui donne sensiblement 0,6 R, la longueur d'onde du son produit étant toujours supposée très grande par rapport au diamètre du tuyau.

Dès qu'il n'en est plus ainsi, le phénomène se complique comme l'avait déjà reconnu Zamminer (4).

Recherches de M. Bosanquet (5) *et de M. Kœnig* (6). — Selon M. Bosanquet la fraction de R exprimant la correction croît avec le rapport du diamètre à la longueur d'onde. Sur deux tuyaux ouverts il trouve en effet pour la correction à l'une des extrémités

$$0,635\,R \quad \text{avec} \quad \frac{R}{\lambda} = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad 0,543\,R \quad \text{avec} \quad \frac{R}{\lambda} = \frac{1}{20}\ (7).$$

D'autre part, M. Kœnig, opérant sur les sons successifs du tuyau à tube explorateur décrit plus haut (360), observe que le raccourcissement absolu de la première demi-onde diminue quand le son s'élève, moins vite toutefois que la longueur d'onde ; quant au raccourcissement beaucoup plus faible de la dernière demi-onde, il varie peu.

Les deux tableaux suivants renferment les résultats obtenus ainsi : 1° sur le tuyau ouvert; 2° sur le même tuyau bouché, la

(1) Les résultats obtenus par Wertheim oscillent entre 0,638 R et 0,862 R moyenne 0,746 R.
(2) HELMHOLTZ, *loc. cit.*
(3) Lord RAYLEIGH, *loc. cit.*, II, 188.
(4) ZAMMINER, *Pogg. Ann.*, XCVII, 183; 1856.
(5) BOSANQUET, *Phil. Mag.*, (5), IV, 219; 1877.
(6) KŒNIG, *loc. cit.*
(7) M. BLAIKLEY obtient sur un tuyau étroit un nombre tout semblable 0,576 R (BLAIKLEY, *Phil. Mag.* (5), VII, 339; 1879).

longueur de la colonne d'air étant alors réduite à $2^m,28$. On y a indiqué, pour chaque son, le numéro d'ordre k, le nombre des vibrations simples mesuré $2N$, et la demi-longueur d'onde mesurée $\frac{\lambda}{2}$.

Tuyau ouvert						Tuyau fermé					
Sons			Corrections			Sons			Corrections		
k	$2N$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{r}{2}$	$l=\frac{s+r}{2}$	k	$2N$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{r'}{2}$	$l'=\frac{s+r'}{2}$
	v.s	mm	mm	mm	mm		v.s	mm	mm	mm	mm
III	376	900	280	90	370	V	332	1035	270	75	345
IV	512	658	246	56	302	VII	476	707	191	7	198
V	656	513	198	36	234	IX	620	549	182	19	201
VI	800	425	162	57	219	XI	768	449	174	29	203
VII	936	365	157	67	224(*)	XIII	»	»	»	»	» (*)
VIII	1080	314	141	43	184	XV	1048	324	144	14	158
						XVII	1198	282	112	12	124

(*) On eut beaucoup de peine à tenir convenablement le son VII du tuyau ouvert, et plus encore le son XIII du tuyau bouché : sur ce dernier on dut renoncer à toute mesure.

Plus d'une difficulté reste à résoudre.

362. Amplitude du mouvement et variation de la pression de l'air dans un tuyau sonore. — Il convient d'indiquer encore ici les expériences récentes par lesquelles on a cherché à déterminer avec exactitude l'état de l'air dans les différentes régions du tuyau et particulièrement aux points notables, en mesurant les déplacements aux ventres, les pressions aux nœuds.

Observations de M. Kundt avec son manomètre à soupape [1]. — M. Kundt évalue la pression avec un manomètre à eau. Mais les accroissements et les diminutions de la pression se succèdent trop rapidement dans l'air en vibration sonore pour qu'une colonne d'eau puisse suivre ces variations de sens opposés. Il faut donc joindre au manomètre une soupape qui ne laisse agir que les variations de signe donné. Dans l'appareil de M. Kundt, cette soupape était constituée simplement par une lame de caoutchouc

[1] KUNDT, *Pogg. Ann.*, CXXXIV, 163; 1868.

tendue contre une fente étroite. Si la lame élastique était plac du côté du manomètre, la soupape s'ouvrait à chaque compre sion, et l'eau était refoulée dans la deuxième branche du man mètre jusqu'à ce que la dénivellation produite fît équilibre à pression maximum. Si la soupape était tournée en sens contrair le manomètre accusait la dépression maximum pendant la dilat tion. Avec cet appareil, M. Kundt observa à l'extrémité d'u tuyau fermé de 30^{cm} de longueur, sonnant fort, des dénivellatio de 30^{cm}, atteignant pour la variation totale de la pression 60^{cm} c 1/17 d'atmosphère. Au nœud d'un tuyau ouvert, la différen de niveau dans les deux branches du manomètre ne se mo tra qu'environ moitié de la précédente. Toutefois le manomèt à soupape comporte plus d'une incertitude, comme l'a consta M. Dvorák [1], qui, avec le même appareil, n'a plus trouvé qu 5^{cm} d'eau pour l'excès maximum de pression, c'est-à-dire enviro 1/100 d'atmosphère pour l'écart total entre les pressions extrême au fond d'un tuyau en bois de 27^{cm} de longueur sur $2^{cm},4$ de la geur et $2^{cm},8$ de profondeur, parlant sous une pression de 5^{cm} d'eau.

Méthode stroboscopique. — On doit à Plateau [2] une méthod excellente pour étudier les différents états d'un corps en phénomèn périodiquement variable. C'est la méthode stroboscopique (στρόβ: tournoiement, σκοπέω examiner), dont nous avons déjà vu une ap plication dans l'examen des gouttes de la veine liquide (256). D'un manière générale, le corps est regardé à travers les fentes d'u disque tournant, ou bien il est éclairé par une lumière intermi tente dont les éclats se succèdent à intervalles égaux. Si ces inte valles coïncident avec la période du phénomène considéré, celui- paraîtra invariable dans l'état même où le saisit chaque fo la lumière, la persistance des impressions sur la rétine produi sant pour l'observateur une continuité apparente. Si les éclats d lumière s'éloignent un peu, le phénomène se déroule lenteme dans son sens naturel, en laissant à l'œil tout le temps de l'observe

(1) Dvorácк, *Pogg. Ann.*, CL, 410; 1873.

(2) Plateau, *Correspondance math. et phys. de l'Observatoire de Bruxelles* 1832; *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LIII, 304; 1833; et *Bulletin de l'Académ de Belgique*, III, 364; 1836.

Soit τ la période du phénomène considéré, τ' l'intervalle de temps entre deux éclairements successifs, le deuxième éclair saisit le corps dans l'état qui suit, au bout de $\tau' - \tau$, celui où le corps était lors du premier éclair ; et les différentes phases du phénomène se succèdent dans le temps $\frac{1}{\tau' - \tau}$. Si τ' était un peu inférieur à τ, le phénomène se développerait en entier, mais à rebours, durant le temps $\frac{1}{\tau - \tau'}$.

Expériences de MM. Töpler et Boltzmann. — MM. Töpler et Boltzmann (1), ont appliqué cette méthode à la mesure de la densité de l'air dans un tuyau de la manière suivante : un diapason, placé horizontalement et tourné de sorte que son plan d'oscillation soit vertical, porte sur chaque branche un petit écran percé d'une fente horizontale étroite. Lorsque le diapason vibre, les deux écrans glissent l'un devant l'autre ; et à chaque vibration les deux fentes se trouvent deux fois en regard pendant un temps très court. Elles laissent alors passer un faisceau de rayons lumineux venant d'une fente horizontale fixe, et qui va ensuite traverser la partie supérieure d'un tuyau sonore vertical, dont les parois sont constituées par des glaces parallèles et le fond par une plaque métallique horizontale bien dressée. Au-dessus de ce fond, passe un deuxième faisceau venant de la même fente et cheminant dans l'air en repos. Les deux faisceaux tombent ensuite sur un appareil d'interférence (biprisme à arête horizontale) qui donne un système de franges que l'on reçoit sur un appareil micrométrique. Si la période des éclats lumineux diffère extrêmement peu de celle du son émis par le tuyau (en d'autres termes, si le diapason est très sensiblement à l'octave grave du tuyau), la frange centrale oscille lentement, et de l'amplitude de son déplacement on peut déduire la variation de la densité dans la couche traversée par le faisceau intermittent. Pour obtenir un effet suffisant, il est nécessaire toutefois, par des réflexions convenables, de multiplier les passages à travers les deux couches d'air à comparer : après 11 passages le déplacement fut de 5 franges, correspondant à un écart entre les densités extrêmes égal aux 0,00888 de la densité normale. En tenant compte de la variation concomitante

(1) Tœpler et Boltzmann, *Pogg. Ann.*, CXLI, 321 ; 1870.

de la température, on conclut de là que l'écart entre les pressions extrêmes était de $0,00888 \times 1,41$, soit 1/80 d'atmosphère. Le tuyau employé avait 36^{cm} de long, sa largeur était $5^{cm},85$ et sa profondeur $5^{cm},2$: il émettait un son fondamental de 181 vibrations par seconde.

Si l'on suppose que le déplacement ξ d'une molécule d'air située à la distance x du fond puisse se représenter par

$$\xi = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

de la valeur connue de la condensation au fond on déduit

$$\frac{4\pi a}{\lambda} = 0,00888;$$

d'où, λ étant égal à 188^{cm},

$$a = 0^{cm},133.$$

Le déplacement de la tranche d'air située au voisinage de l'embouchure, où $x = 36$, est donc

$$\begin{aligned}\xi &= 0,133 \sin 2\pi \frac{36}{188} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ &= 0,125 \sin 2\pi \frac{t}{\tau},\end{aligned}$$

et l'amplitude de l'écart total est $0^{cm},25$.

Travaux de M. Mach. — M. Mach (¹) a étendu ces recherches aux tuyaux ouverts. En disposant au nœud une membrane un peu lâche, qui arrête le courant d'air sans gêner le mouvement vibratoire, et en rendant le gaz visible au moyen de fumées, il a pu mesurer directement l'amplitude des oscillations aux divers points

(¹) MACH, *Optisch-akustichen Versuche*. Prag; 1873; et *Journal de physique*, II, 112, 306 et 338; 1873 (Crova).

du tuyau, depuis la membrane nodale jusqu'à l'extrémité ouverte, où il l'a trouvée de $0^{cm},4$ dans un tuyau de 4 pieds.

363. Tuyaux larges. — Les lois de Bernoulli ne conviennent qu'aux tuyaux très étroits ; elles sont complètement en défaut pour les tuyaux larges.

Exceptions aux lois de Bernoulli. — 1° Le tableau de la page 139 montre que dans le tuyau, médiocrement large, dont s'est servi M. Kœnig, les sons supérieurs ne suivent pas la loi des harmoniques : le son VIII dépasse le huitième harmonique de près d'une seconde, de sorte qu'il coïncide presque avec le neuvième harmonique. Déjà Wertheim avait remarqué qu'en déterminant le son fondamental d'un tuyau d'orgue au moyen d'un son supérieur, on obtenait un nombre d'autant plus grand que le son était d'un rang plus élevé.

2° Mersenne est parvenu à faire descendre de 7 tons entiers le son fondamental d'un tuyau, sans changer la longueur du tuyau ($72^{\text{lignes}}=161^{\text{mm}}$), en augmentant seulement le diamètre, comme l'indique le tableau suivant, où l'on a représenté arbitrairement par *ut* le son le plus élevé.

diamètre	3^{li}	6^{li}	12^{li}	18^{li}	25^{li}	51^{li}
	7^{mm}	14^{mm}	27^{mm}	41^{mm}	56^{mm}	115^{mm}
son rendu	*ut*	la_{-1}	sol_{-1}	mi_{-1}	$ut\sharp^{-1}$	$la\sharp^{-2}$

Règles de Savart, de M. Cavaillé-Coll. — Savart (¹) a étudié particulièrement le cas des tuyaux rectangulaires. Appelons toujours *longueur* la grande dimension du tuyau, et dans la section normale à la longueur nommons *largeur* la dimension parallèle à l'embouchure et *profondeur* la dimension perpendiculaire.

Savart a d'abord reconnu que la largeur était sans influence sur la hauteur du son, pourvu que le tuyau fût embouché dans toute la largeur (²).

(¹) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIX, 404; 1825.

(²) Si l'on diminue la largeur de la bouche, on baisse le ton : c'est ainsi que l'on accorde les tuyaux fermés, à l'aide des *oreilles*, lames flexibles

Ainsi tout se passe de même dans chaque lame perpendiculair à la bouche; et Savart a montré que si dans deux tuyaux différent ces lames ont même surface, le ton est le même, pourvu que l profondeur soit supérieure au 1/6 de la longueur. Tel est le cas par exemple, pour les trois tuyaux figurés ici.

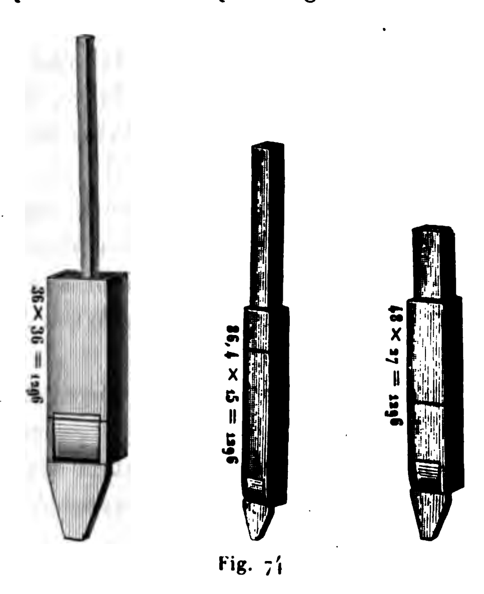


Fig. 74

Si les surfaces sont inégales, les nombres de vibrations so inversement proportionnels aux racines carrées des surfaces, ta

placées de chaque côté de la bouche. La direction de la lame d'air sortant de l lumière est d'ailleurs sans influence : deux tuyaux de mêmes dimensions

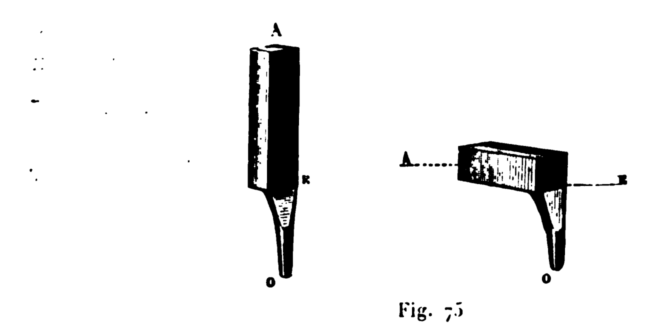


Fig. 75

embouchés, l'un suivant la largeur, l'autre par côté, donnent exactement même note.

que la profondeur est plus grande que le 1/6 de la longueur.

La profondeur diminuant, l'influence de cette dimension se fait de moins en moins sentir, et quand elle est devenue moindre que le 1/12 de la longueur, la hauteur du son ne dépend plus sensiblement que de la longueur, conformément à la loi de Bernoulli.

Pour leurs tuyaux dont le côté est ordinairement compris entre le 1/12 et le 1/6 de la longueur, les facteurs d'orgues n'ont que des règles empiriques.

M. Cavaillé-Coll ajuste la longueur L′ d'un tuyau ouvert d'après l'une des formules suivantes, qui conviennent dans des limites très étendues :

$$L' = L - 2p \text{ pour un tuyau rectangulaire de profondeur } p,$$

et

$$L' = L - \frac{5}{3}d \text{ pour un tuyau rond de diamètre } d,$$

L étant la longueur théorique.

Dans tous les cas, si, sur le tuyau A rendant le son fondamental, on monte un prolongement a tel que le son ne soit pas modifié, la

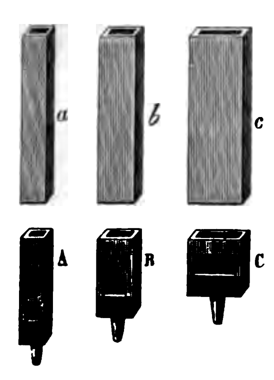


Fig. 76

longueur de ce prolongement est indépendante de la longueur primitive que l'on a dû donner au tuyau A, B ou C, d'après ses dimensions transversales, pour lui faire rendre le son proposé. En d'autres termes, la correction à l'extrémité libre, toujours faible relativement à celle qui se rapporte à l'embouchure, ne varie pas sensiblement avec la section de l'instrument, tandis que cette section

influe considérablement sur la longueur première que doit ı le tuyau.

Tuyaux semblables. — Les tuyaux semblables obéissent à loi très simple, découverte par Mersenne : « Si, dit-il, l'on d(22 lignes de diamètre au tuyau de 1 pied de hauteur, il sera ex: ment à l'octave avec un tuyau de 1/2 pied de hauteur, dont le mètre est de 11 lignes (1). »

Savart a vérifié avec des tuyaux des formes les plus div(l'exactitude de la loi qui peut se formuler ainsi :

Des tuyaux semblables, embouchés semblablement, engendren sons dont les hauteurs sont en raison inverse des dimensions hc logues.

La figure ci-contre représente une collection de paires de tu; semblables, dont les dimensions homologues sont entre elles cor

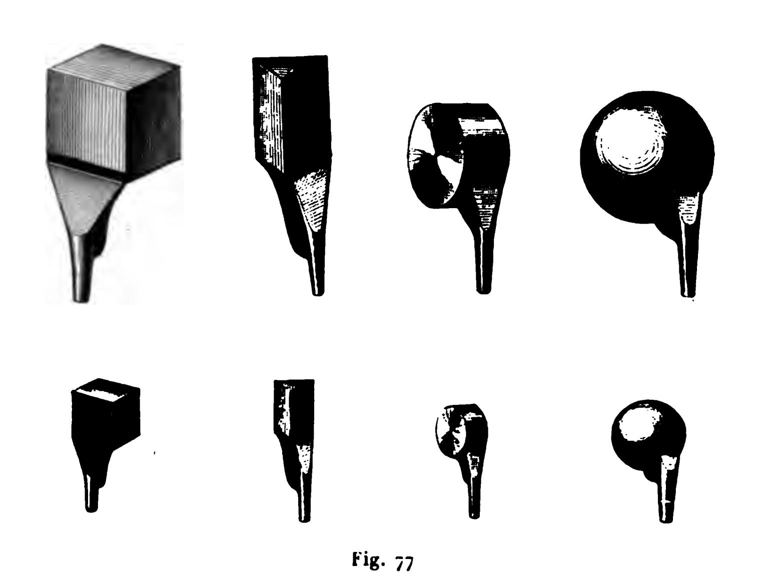


Fig. 77

1 et 1/2 : le plus petit tuyau de chaque couple donne l'octave a du son que produit le plus gros.

La loi est absolument générale et s'applique à tous les systi vibrants, comme nous le verrons par la suite.

(1) Mersenne, *loc. cit.*, liv. VI, 335.

364. Tuyaux à anche. — On emploie beaucoup en musique une sorte de tuyaux sonores où l'air est mis en vibration au moyen d'une pièce particulière, nommée *anche*.

Dans les tuyaux d'orgue à anche, celle-ci est constituée par une

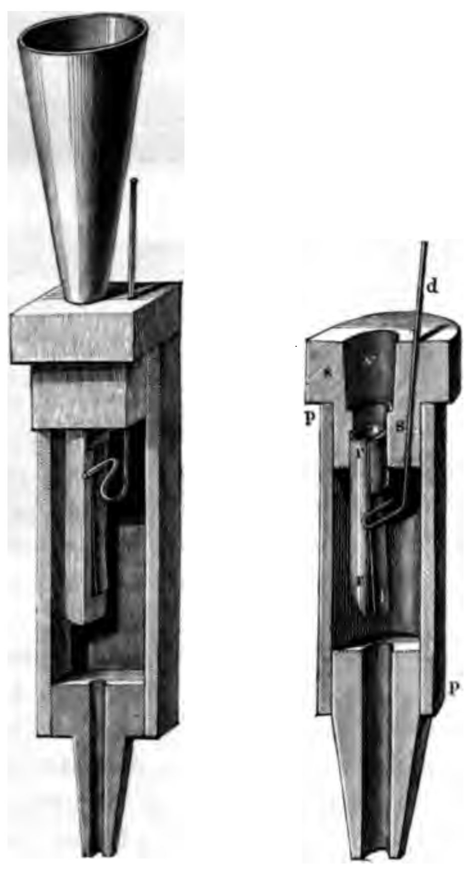


Fig. 78

lame métallique ou *languette*, *l*, fixée par un bout, et dont la partie libre est limitée par un crochet mobile *d*, nommé *rasette*. Cette lame en oscillant ouvre et ferme alternativement une ouverture ménagée dans une *rigole* demi-cylindrique *r*, fixée à la partie supérieure du *pied* PP. Autrefois, l'anche venait battre sur les bords de la rigole (*anche battante*), ainsi qu'on le voit sur le tuyau de droite, mais le choc donnait au son une dureté que Grenié a fait

disparaître en rendant l'*anche libre*, comme sur le tu
gauche [1] : l'anche peut alors osciller librement à travers l
ture qu'elle ferme dans sa position d'équilibre. La figure 79
le détail de cette disposition employée seule aujour
quand l'anche est en z_1, l'air comprimé dans le pied peu
librement au dehors; quand elle est en z_2, le courant d

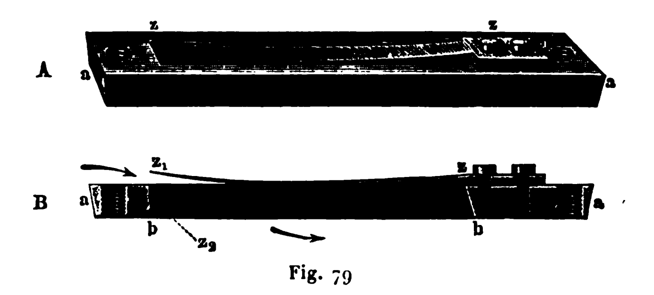


Fig. 79

arrêté. Le jeu de l'appareil est exactement comparable
de la sirène : la seule différence consiste dans la manière do
fice d'échappement est alternativement ouvert et fermé
la sirène c'est la rotation du disque mobile qui produit ce
ici c'est le mouvement oscillatoire de la languette. Le
l'anche est donc purement mécanique, et le corps vibr
encore l'air.

Dans une colonne d'air en vibration les variations max
la pression se produisent aux nœuds; un tuyau à anche s
portera donc comme un tuyau bouché au point où se trouve
et donnera la série des sons 1, 3, 5, 7,... à condition, bien e
que la longueur du tuyau soit dans un rapport convenab
le nombre de vibrations que l'anche tend à exécuter en v
son élasticité propre. Toutefois, le tuyau étant assez larg
une certaine tolérance que l'on peut encore augmenter en
une partie de l'une des parois en peau. Si la différence
grande, le tuyau refuse de parler.

Avec une anche métallique rigide, comme celle d'un
d'orgue, la hauteur du son est presque uniquement régl
l'anche. Il faut alors un tuyau pour chaque note, et le régla

[1] Ce tuyau est surmonté en outre d'un *cornet* destiné à renforcer l

ıe au moyen de la rasette. Mais ordinairement la hauteur du dépend à la fois de l'anche et du tuyau.

n peut partager les anches en deux catégories : les *anches en* *ms*, qui s'ouvrent vers l'intérieur de l'instrument d'où sort le ;, ainsi que dans les tuyaux d'orgue; les *anches en dehors*, qui rrent vers l'extérieur, comme les cordes vocales. Si à une anche ledans on joint un tuyau, on obtient en général un son plus 'e que celui que rendrait l'anche seule en vertu de son élasticité; ontraire, avec une anche en dehors, l'adjonction d'un tuyau a r effet d'élever le son. W. Weber (1), qui a étudié longuement e question, prit une anche donnant isolément le même son ın tuyau de longueur $l = 440^{mm},5$, c'est-à-dire un sol_3 de 388v, ı mit en dedans d'un tuyau de longueur croissante : le tuyau ıt d'abord très court, la hauteur du son n'éprouva aucune lification sensible; le tuyau s'allongeant, elle baissa graduelle-ıt et quand le tuyau atteignit une longueur peu inférieure à l, on était tombé à l'octave grave; il remonta ensuite brusquement ı valeur primitive quand la longueur du tuyau devint égale , comme le montre le tableau suivant :

...ngueur du tuyau.	Son.	Longueur du tuyau.	Son.
41	sol_3	252	$ré_3$
56	sol_3	290	ut_3
92	sol_3	331	$la_2\#$
128	$fa_3\#$	370	$sol_2\#$
187	fa_3	394	sol_2
212	mi_3	439	sol_3

Le tuyau continuant à être allongé, le son baissa de nouveau, et ur une longueur de 866mm, peu inférieure à $2l = 881^{mm}$, il était scendu à $ré_3$, c'est-à-dire à la quarte ; puis il reprit brusquement valeur première sol_3 quand la longueur du tuyau fut $2l$. La lon-eur du tuyau croissant toujours, le son descendit au mi_3, soit à tierce mineure, pour revenir au sol_3 quand la longueur se trouva , et ainsi de suite. Le son remontait à sa hauteur primitive chaque is que la longueur du tuyau devenait un multiple exact de la ngueur l, en d'autres termes, chaque fois que cette longueur était

(1) W. Weber, *Pogg. Ann.*, XIV, 397; XVI, 415; XVII, 193; 1828-29.

telle que l'un des sons propres du tuyau fût à l'unisson du son de l'anche isolée, et chaque fois ce retour s'effectuait par un saut brusque, qui fut successivement :

D'une octave	1 : 2
D'une quarte.	3 : 4
D'une tierce	5 : 6

L'anche des instruments en bois est constituée par une ou deux lames flexibles [1], dont les vibrations sont tellement influencées par celles du tuyau, que c'est en réalité la longueur de celui-ci qui détermine la hauteur du son. Le son propre de l'anche, variable avec le degré d'humidité, est beaucoup plus aigu que les sons que l'on utilise et qui sont ceux d'un tuyau fermé au point où se trouve l'anche. La clarinette dont le tuyau est cylindrique donnera donc la série des sons 1, 3, 5, 7,..., sans parler de ceux que l'on obtient en ouvrant les trous percés en différents points. Avec le hautbois ou le basson on a la série des sons d'un tuyau conique fermé au sommet, lesquels sont exactement les mêmes que ceux d'un tuyau cylindrique ouvert de même longueur, savoir : 1, 2, 3, 4, 5.... [2].

Il existe enfin une troisième sorte d'anches, les anches membraneuses, dont on peut aisément étudier les propriétés au moyen de l'appareil ci-contre, dû à M. von Helmholtz, et qui consiste simplement en deux lames de caoutchouc, tendues sur les bords coupés obliquement d'un tube de bois ou de caoutchouc épais, de manière à laisser entre elles une fente étroite. Si le courant d'air est dirigé ainsi que l'indique la figure, l'appareil fonctionne comme une anche en dedans. En changeant le sens du courant d'air, on aura une anche en dehors, semblable aux lèvres dans les instruments de cuivre ou aux cordes vocales dans le gosier. Molles et flexibles, les lèvres obéissent aisément aux variations de pression relativement considérables qui se produisent au fond des instruments en cuivre;

[1] La clarinette est munie d'une anche large qui battrait si l'amplitude des oscillations était plus grande, mais qui en réalité ouvre plus ou moins largement l'entrée de l'air sans jamais la fermer complètement. Dans le hautbois et le basson, l'embouchure est formée par deux lames minces laissant entre elles une fente qui se ferme à chaque oscillation. Toutes ces anches sont en dedans.

[2] Helmholtz, *Pogg. Ann.*, CXIV, 321; 1861; et *Théorie physiologique de la musique*, 132 et 507.

la hauteur des sons dans ces instruments est donc déterminée uniquement par les tuyaux. Ainsi le cor de chasse et la trompette, qui sont de longs tubes coniques embouchés près du sommet, donnent la série des harmoniques naturels et pas d'autres sons [1], tant du



Fig. 80

moins que l'on n'emploie aucun artifice changeant la disposition du tube, comme, par exemple, d'enfoncer le poing dans le pavillon du cor pour modifier certains sons. Dans ces instruments les lèvres agissent sur l'émission de l'air de manière à obtenir tel ou tel son déterminé, sans influer notablement sur la hauteur de ce son. Dans le gosier humain, au contraire, la hauteur du son est réglée par les cordes vocales dont la tension peut varier dans de larges limites, soit par l'écartement de leurs points d'attache aux cartilages du gosier, soit par le raccourcissement des fibres musculaires qu'elles contiennent, et dont l'épaisseur même semble pouvoir se modifier [2].

365. Tubes à flammes. — Les vibrations d'un tuyau sonore peuvent être excitées par le frémissement d'une flamme, comme le prouve l'*harmonica chimique* dont la première observation semble due à Higghins [3]. Chladni [4] montra que cet appareil donne pré-

(1) Le tube du cor de chasse, dit M. von Helmholtz d'après Zamminer, a 27pi = 8m,77, de long; le son fondamental est proprement le $mi_{-1}\flat$, qui n'est pas employé, non plus que son premier harmonique $mi_1\flat$; les sons dont on fait usage sont $si_1\flat$, $mi_2\flat$, sol_2, $si_2\flat$, $ré_3\flat$, $mi_3\flat$, fa_3, sol_3, $la_3\flat$, la_3, $si_3\flat$, etc.

(2) Voir HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 133.

(3) HIGGHINS, *Nicholson's Journal*, I, 120 ; 1802.

(4) COLADNI, *Traité d'acoustique*, 85. Paris, Courcier; 1809.

cisément les sons propres du tuyau à la température actuelle de la colonne vibrante ; et en réglant la longueur de la flamme, ainsi que la position du tube, il obtint sans peine le son fondamental, l'octave et la douzième. Quand le tube parle, le frémissement incertain de la flamme se change en pulsations rythmées sur celles du tube : Wheatstone les a rendues manifestes au moyen d'un

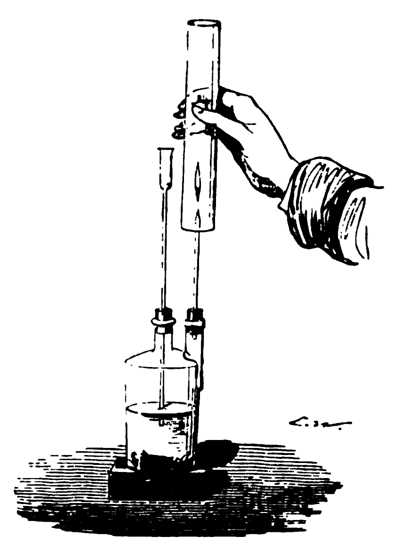


Fig. 81

miroir tournant, qui offre de la flamme une série d'images équidistantes, séparées par des intervalles paraissant complètement obscurs (1). L'action du tuyau sur la flamme peut même être assez énergique pour en amener l'extinction. Le comte Schaffgotsch (2) et M. Tyndall (3) ont fait voir qu'un tube, sur le point de parler, peut être mis en vibration par la voix ou un instrument quelconque donnant à distance le son du tube (4), et qu'inversement un éclat de voix peut réduire au silence un tube qui chante.

(1) La méthode stroboscopique a permis à Tœpler d'étudier les transformations successives de la flamme entre ses états extrêmes (Tœpler, *Pogg. Ann.*, CXXXVIII, 108 et 126; 1866).

(2) Comte Schaffgotsch, *Pogg. Ann.*, C, 352 ; 1857.

(3) Tyndall, *Phil. mag.*, (4), XIII, 473; 1857.

(4) L'expérience réussit également bien avec un tuyau d'orgue dont l'embouchure est réglée de façon que l'instrument soit près de chanter.

De la Rive [1], ayant chauffé une boule contenant un peu d'eau et surmontée d'un tube capillaire, et ayant ainsi obtenu un son évidemment dû à la condensation périodique de la vapeur dans le tube, attribua à la même cause la production du son dans l'harmonica chimique. Faraday [2] montra que cette explication était inexacte en plaçant le tube dans une enceinte chauffée à plus de 100°, et aussi en remplaçant l'hydrogène par de l'oxyde de carbone, dont la flamme ne donne lieu à aucune vapeur condensable; et il regarda le son comme provenant d'une série d'explosions : le gaz inflammable, entraîné par le courant d'air, forme avec cet air un mélange qui détone, est remplacé par une nouvelle quantité de mélange qui détone à son tour, et ainsi de suite. Cette manière de voir rend compte des apparences de la flamme dans le miroir tournant. Elle est confirmée d'ailleurs par l'expérience de Martens [3] : une toile métallique, placée dans le tube immédiatement sur la flamme de façon à empêcher les détonations, supprime le son.

Les explosions successives peuvent donner naissance à des sons d'une grande intensité. Avec la flamme d'un grand bec Bunsen livrant passage au gaz par une sorte de pomme d'arrosoir et un long tuyau de $4^m,50$, M. Tyndall obtient un son d'une puissance extraordinaire; en modérant la flamme on fait entendre le premier harmonique; en la réduisant encore on amène le second; si on laisse arriver tout le gaz, le son fondamental et ses harmoniques éclatent ensemble en produisant « un véritable ouragan musical ». Dans d'autres conditions, ces tubes à flammes rendent des sons très harmonieux, que l'on a cherché à utiliser en musique. M. Kastner [4] a construit sous le nom de *pyrophone* une sorte d'orgue dont le jeu est établi sur ce fait que si l'on place dans un même tuyau, au tiers de la hauteur, deux petites flammes en contact, le tuyau reste muet, tandis qu'il se met à parler dès qu'on les sépare.

(1) De la Rive, *Journal de physique de De la Métherie*, LV, 165; 1802. Les *tubes à boule* ont été étudiés expérimentalement par Pinaud et Sondhaus, la théorie en a été donnée par M. Bourget (Pinaud, *Mém. de l'Ac. de Toulouse*, V; et *Institut*, III, 366; 1835; Sondhauss, *Pogg. Ann.*, LXXIX, 1 et CXL, 53 et 219; 1850-70; Bourget, *Ann. de l'Éc. norm.*, (1), IV, 1867).

(2) Faraday, *Quarterly Journal of science*, V, 274; 1818; et *Annales de chim. et de phys.*, VIII, 363; 1818.

(3) Martens, *Bulletin de l'Académie des sciences de Bruxelles*, VI, part. 2, 442; 1839.

(4) Kastner, *C. R.*, LXXVI, 699; 1873.

366. Flammes sensibles. — En 1858, M. Leconte [1] obse
que les flammes du gaz dans une salle de concert exécutaient
bonds à certaines notes, particulièrement à celles du violoncel
accusant les trilles de cet instrument avec une telle perfection qu' «
sourd aurait pu voir l'harmonie ». Il reconnut en même temps q
pour être sensible une flamme devait, par l'effet d'une pression s
fisante, être sur le point de ronfler. C'est là en effet la condition
sentielle du phénomène. La sensibilité d'une flamme dépend d'
leurs de la forme du bec, de la largeur des tuyaux de condu
(l'interposition d'un robinet dans le voisinage du bec peut ren
une flamme absolument réfractaire), des notes enfin que l'on don
(une flamme est sensible aux sons qu'elle est elle-même sur le po
d'émettre). Toutes ces circonstances ont été étudiées en détail
MM. Tyndall [2] et Barrett [3]; nous rapporterons quelques-unes
leurs expériences les plus remarquables [4].

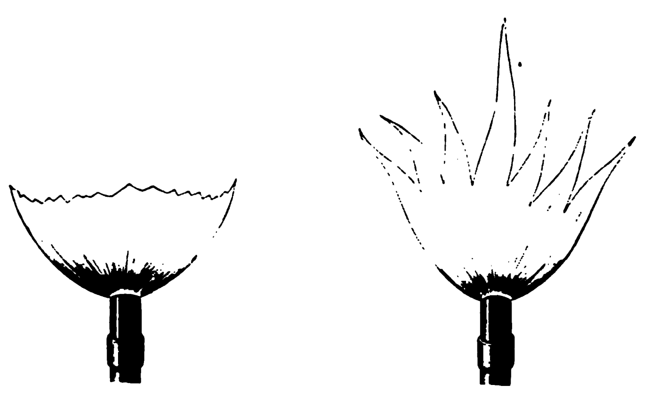


Fig. 82

Une flamme en aile de chauve-souris (fig. 82), alimentée
petit gazomètre sous une pression plus forte que celle de
mètres de la ville, s'allonge en même temps qu'elle se divise
langues à chaque coup qu'un marteau frappe sur une
éloignée.

(1) Leconte, *Silliman's Journal*, XXV, 62; et *Phil. mag.*, (4), XV, 2
(2) Tyndall, *Phil. mag.*, (4), XXXIII, 92; 1867.
(3) Barrett, *Phil. mag.*, (4), XXXIII, 216 et 287; 1867.
(4) Voir Tyndall, *On Sound*, 250.

Une longue flamme droite et brillante (fig. 83) s'affaisse en perdant tout éclat au bruit d'un trousseau de clefs. Les diverses voyelles l'affectent différemment : ou est sans effet, E ébranle et A écrase cette *flamme aux voyelles :* la sifflante s la terrasse complètement.

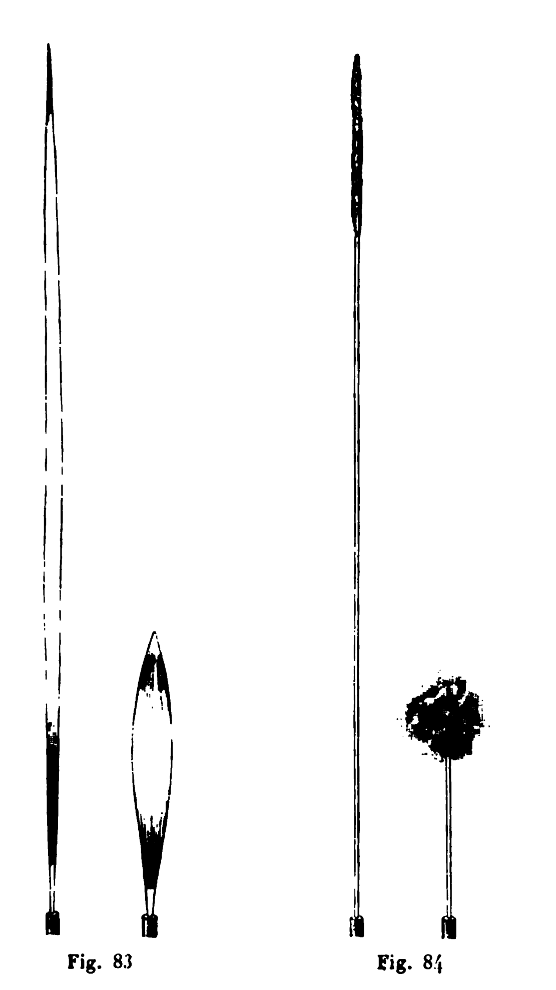


Fig. 83 Fig. 84

Certaines flammes sont plus sensibles aux sons graves; d'autres aux sons aigus. D'ailleurs la communication des vibrations se manifeste tantôt par un allongement, tantôt par un raccourcissement.

La flamme peut être remplacée par une colonne de fumée (fig. 84) et en général par un jet de gaz froid : pour rendre alors le phéno-

mène visible, M. Govi (1) projette l'ombre du jet sur un écran accroît la visibilité en faisant passer le gaz dans un flacon c nant de la ponce imbibée d'une essence qui en augmente le voir réfringent (Lissajous). Si alors on produit un son à dist on voit la partie limpide de la veine se raccourcir comme dan expériences de Savart sur la veine liquide (256).

On peut aussi employer une flamme de gaz d'éclairage so pression ordinaire de ce gaz au moyen de l'artifice suivant à M. Govi (2) : le gaz, sortant par un petit trou, rencontre une métallique serrée, au-dessus de laquelle on l'enflamme ; on so la toile jusqu'au moment où la flamme s'étale en perdant son é il suffit alors d'abaisser la toile un tant soit peu au-dessous de position pour communiquer à la flamme une sensibilité tell le plus faible bruit de hauteur convenable l'étale en la fa ronfler. Le ronflement est beaucoup plus fort quand on p comme M. Geyser (3), un tube au-dessus de la toile. Avec un vertical de cuivre de 4^{cm} de diamètre et 15 à 20^{cm} de hau fermé à sa partie inférieure par une toile métallique et disp quelque distance au-dessus d'un bec Bunsen, Lissajous (4) o en allumant le gaz dans le tube un son aigu presque aussi in que celui d'un sifflet de locomotive (5).

367. Mesure de la vitesse du son dans les gaz moyen des tuyaux sonores. — Les tuyaux sonores se pr à une mesure indirecte, très précieuse, de la vitesse du son dan gaz.

La formule fondamentale

$$\lambda = V\tau = \frac{V}{N}$$

(1) Govi, *Atti della reale Accademia della science di Torino*, V, 475; 18 *Journal de physique*, II, 29 ; 1873 (Lissajous).

(2) Govi, *ibid.*, 394 ; et *Journal de physique*, *loc. cit.* Cf. Neyreneuf, *Jour. physique*, IX, 280, et X, 127; 1880-81.

(3) Geyser, *American journal of science and arts*, (3), III, 340; 1872.

(4) Lissajous, *Journal de physique*, II, 98; 1873.

(5) Un appareil semblable avait déjà été employé par Rijke d'une autre man dans un tube de verre était introduite une toile métallique que l'on chauff rouge avec une lampe à alcool, puis on retirait la lampe ; un son se pr sait alors, le passage à travers la toile chaude amenant dans la colonne ga une série de secousses périodiques (Rijke, *Pogg. Ann.*, CVII, 339 ; 1859).

montre en effet que si l'on peut mesurer dans le gaz proposé la longueur d'onde λ d'un son de hauteur connue N, on en déduira immédiatement la vitesse V du son dans ce gaz. Or les tuyaux sonores nous permettent de déterminer λ, N étant donné d'autre part, ils fournissent donc indirectement V.

Recherches de Dulong (¹). — En 1829, Dulong entreprit une série de recherches fondées sur ce principe.

Il essaya d'abord d'évaluer la vitesse du son dans l'air en mesurant sur divers tuyaux ouverts, rendant leur son fondamental, la hauteur N du son et la longueur L du tuyau ; il admit que cette longueur L était égale à la demi-longueur d'onde du son N, et il calcula en conséquence V au moyen de la formule

$$V = 2LN.$$

Il trouva ainsi des nombres beaucoup trop faibles (360).

Il fit alors rendre aux tuyaux leur premier harmonique et il mesura au moyen d'un piston la distance d des deux nœuds qui se forment dans ces conditions ; cette distance représentait $\frac{\lambda}{2}$; la hauteur N′ du son étant prise à la sirène, la formule

$$V = 2dN'$$

lui donna V. Les nombres furent meilleurs sans être satisfaisants : les écarts atteignaient encore 10^m en valeur absolue.



Fig. 85

Cependant la méthode des concamérations est exacte dans son principe, et nous avons vu plus haut que la mesure même des concamérations était susceptible d'une certaine précision.

S'il n'obtint pas ainsi une valeur exacte de la vitesse du son dans l'air, Dulong n'en arriva pas moins à des résultats importants. Il reconnut en effet que la position des nœuds et des ventres dans un tuyau est indépendante de la nature du gaz vibrant. On n'avait dès lors qu'à mesurer les hauteurs des sons fournis par

(¹) DULONG, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLI, 113 ; 1829.

les différents gaz parlant dans un même tuyau pour en déduire les vitesses relatives du son dans ces gaz. Dulong détermina donc, au moyen de la sirène, les nombres N,N′,N″,... des vibrations effectuées successivement par l'air et divers gaz dans un tuyau ouvert de 60^cm de longueur; et, admettant que la vitesse du son dans l'air à 0° était 333^m, il n'eut qu'à multiplier ce nombre 333 par les rapports $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N}, \ldots$ pour avoir les vitesses du son dans les gaz soumis à l'expérience. Il obtint ainsi les nombres suivants :

Air....................	333^m,00 (nombre admis).
Oxygène................	317 ,15
Hydrogène..............	1 269 ,50
Oxyde de carbone........	337 ,40
Acide carbonique........	261 ,60
Protoxyde d'azote........	261 ,90
Gaz oléfiant.............	314 ,00

Mesures de Masson (¹). — Masson reprit ces expériences et opéra sur un grand nombre de gaz et de vapeurs. Le tableau suivant renferme quelques-uns de ses résultats :

Air.....................	333^m,00 (nombre admis).
Oxyde de carbone........	339 ,76
Acide carbonique........	256 ,83
Protoxyde d'azote........	256 ,45
Gaz oléfiant.............	318 ,73
Gaz des marais..........	431 ,82
Ammoniaque............	415 ,00
Vapeur d'eau...........	401 ,00

Travaux de Wertheim (²). — D'autre part, pour compléter le travail de Dulong, Wertheim avait cherché à obtenir la mesure absolue de la vitesse du son, en évaluant, comme nous l'avons indiqué plus haut, la quantité dont il faut augmenter la longueur d'un tuyau donnant le son fondamental, pour la rendre égale à la longueur théorique $\left(\frac{\lambda}{2}\right.$ si le tuyau est ouvert, $\frac{\lambda}{4}$, s'il est fermé$\left.\right)$. Les di

(¹) Masson, *Ann. de chim. et de phys.* (3), LIII, 257; 1858.
(²) Wertheim, *loc. cit.*

férentes déterminations furent suffisamment concordantes (à 1/100 près en général) et le résultat final

$$a = 330^{m},9\ (^1)$$

ne diffère certainement pas beaucoup de la vraie valeur de la vitesse du son dans l'air libre à 0°.

Expériences de M. Kundt [2]. — M. Kundt a donné une forme très élégante à la méthode des concamérations, en forçant celles-ci à se dessiner elles-mêmes par des lignes de poussière, semblables à celles que Chladni avait jadis fait surgir à la surface des corps solides en vibration.

L'appareil de M. Kundt, sous sa forme définitive, consiste en un

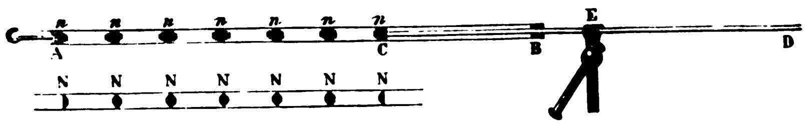


Fig. 86

long tube de verre AB, fermé à ses extrémités par des bouchons : l'un A, muni d'une petite tige qui permet de l'enfoncer ou de le retirer un peu; l'autre B, fixe et traversé à frottement doux par une verge CD, terminée elle-même à l'intérieur du tube par un disque C d'un diamètre un peu moindre que le tube. Celui-ci a été préalablement saupoudré d'une poussière légère (lycopode, silice amorphe, ou mieux poudre de liège), et on n'en a laissé que juste ce qui adhérait aux parois [3]. La verge étant saisie en son milieu dans un étau E, on l'excite longitudinalement, elle se met à vibrer exactement à la manière d'un tuyau ouvert aux deux

[1] Ce nombre est légèrement supérieur à celui qu'obtint plus tard Regnault avec des tuyaux considérablement plus larges. Mais les sons employés ici étant beaucoup plus aigus, l'influence du diamètre était moindre (p. 68, note). Elle ressortait cependant déjà nettement : si en effet on réunit les nombres relatifs à un même diamètre, on trouve comme moyenne particulière :

Tuyau	de laiton	de 4^{cm}	de diamètre.....	331^{m},89
—	laiton	2	—	330 ,11
—	verre	2	—	329 ,98
—	laiton	1	—	329 ,12

[2] KUNDT, *Pogg., Ann.*, CXXVII, 497; CXXVIII, 337; et CXXXV, 337 et 527; 1866-68.

[3] Une quantité de poussière un peu grande retarde notablement le son.

bouts rendant le son fondamental ; le disque C communique ses déplacements à l'air renfermé dans le tube, et la colonne gazeuse tend à se diviser en segments de longueur telle qu'ils puissent chacun vibrer à l'unisson de la verge. Mais, pour que cette division puisse se produire effectivement, il faut que la longueur de la colonne CA soit un multiple exact de la demi-longueur d'onde du son considéré dans l'air. C'est pour obtenir ce résultat qu'on a laissé au bouchon A une certaine mobilité ; et on est guidé dans le réglage par l'aspect des figures acoustiques. La poussière est chassée vers les nœuds $n\,n\,n$,... et les lignes nodales, d'abord confuses, se dessinent de plus en plus nettement à mesure que l'ajustement devient plus parfait : quand la colonne d'air se trouve un multiple exact de la demi-longueur d'onde, la poussière quitte complètement les ventres et se rassemble en petits tas isolés marquant nettement les nœuds N,N,N,... Il n'y a plus dès lors qu'à mesurer la distance l de deux lignes nodales pour avoir la demi-longueur d'onde dans l'air $\frac{\lambda}{2}$ du son, dont la demi-longueur d'onde dans le solide $\frac{\Lambda}{2}$ est égale à la longueur L de la verge ; et la proportion

$$\frac{l}{L}=\frac{v}{V}$$

donne le rapport des vitesses du son dans l'air et dans le solide.

Voici, par exemple, les nombres obtenus pour la longueur d'une concamération (déduite de la mesure de la longueur totale de 8 à 10 concamérations), dans une expérience avec une verge de laiton de $0^{m},9415$ de longueur, rendant le son 2.

	$43^{mm},25$
	43 , 25
	43 , 50
	43 , 28
	43 , 41
	43 , 33
	43 , 44
	43 , 13
	43 , 13
moyenne :	43 , 30

L'erreur moyenne ne dépasse pas $0^{mm},10$.

M. Kundt trouve ainsi, conformément à la théorie de M. von Helmholtz, que :

1° La vitesse du son dans un tube diminue avec le diamètre, dès que celui-ci est inférieur au quart de la longueur d'onde du son considéré;

2° La diminution est plus grande pour les sons graves que pour les sons aigus.

A l'appui de ces conclusions nous reproduirons le tableau suivant, dans lequel on a représenté pour chaque son la vitesse dans le tuyau le plus large par le nombre de Moll et van Beck.

Diamètre du tuyau	Vitesse du son		
	$\lambda = 180^{mm}$	$\lambda = 90^{mm}$	$\lambda = 60^{mm}$
55^{mm}	$332^m,80$	$332^m,80$	$332^m,80$
26	332 ,73	332 ,66	333 ,45
13	329 ,47	329 ,88	330 ,87
6,5	323 ,00	327 ,14	328 ,14
3,5	305 ,42	318 ,88	»

M. Kundt a vérifié en outre que la vitesse était indépendante de la pression, entre 400^{mm} et 1760^{mm}.

Il a confirmé encore la loi d'après laquelle la vitesse varie proportionnellement à $\sqrt{1+\alpha t}$. En opérant sur de l'air à $100°$, il a trouvé

$389^m,21$ $388^m,84$ $389^m,15$ $388^m,47$ $389^m,02$ $389^m,64$ $388^m,60$

moyenne : $388^m,99$; et le nombre théorique, calculé avec $\alpha = 0,003665$, est $389^m,03$ (¹).

Enfin, il a cru pouvoir déduire de ses expériences que la vitesse est indépendante de l'intensité du son. Mais la méthode n'est pas assez précise pour trancher la question : on ne peut répondre du chiffre des décimètres.

La méthode de M. Kundt convient au contraire très bien pour comparer les vitesses de propagation du son dans les différents gaz : on dispose alors sur l'autre bout D de la verge CD un deuxième tube,

(¹) La longueur d'onde d'un son donné dans l'air variant avec la température comme $\sqrt{1+\alpha t}$, tout appareil permettant de mesurer cette longueur d'onde peut servir de *pyromètre acoustique* (MAYER, *Dana's and Sillimann's American Journal* (3), IV, 425; 1872; et *Journal de physique*, II, 227; CHAUTARD, *Journal de physique*, III, 78; 1874). Il faut remarquer toutefois que la sensibilité d'un tel pyromètre décroît avec la température : pour une élévation de température de 1° la variation de la longueur d'onde de $ut_4 = 512^v$, variation qui est de plus de 1^{mm} à la température ordinaire, tombe à $1/2^{mm}$ vers $1000°$.

semblable au tube à air AB, et on le remplit du gaz à étudier; les distances respectives des tas de poussière dans les deux tubes sont exactement proportionnelles aux vitesses, les conditions étant identiques des deux côtés.

M. Wüllner ([1]) a déterminé par ce procédé non seulement les vitesses relatives du son dans les divers gaz, mais encore les vitesses absolues d'après le nombre des vibrations de la verge excitatrice, en tenant compte de l'influence du diamètre du tube au moyen de la formule de M. Kirchhoff; il a trouvé ainsi :

	Vitesse relative	Vitesse absolue
		m
Air.	1	331,90
Oxyde de carbone.	1,016	337,13
Acide carbonique	0,781	259,38
Protoxyde d'azote	0,782	259,64
Ammoniaque.	1,253	415,99
Éthylène.	0,952	315,90

Pour la démonstration on peut disposer les appareils très simplement, en utilisant comme verges vibrantes les tubes mêmes qui renferment les gaz. Dans cette disposition, qui fut la première adoptée par l'auteur, chaque tube rempli du gaz à étudier et contenant un peu de poussière est fermé à ses deux bouts. Il suffit de le saisir d'une main en son milieu et de le frotter de l'autre avec un drap mouillé pour faire apparaître la division de la colonne d'air en concamérations. Toutefois les figures de poussière sont moins nettes qu'avec l'appareil à verge, les lignes nodales du tube lui-même tendant à se produire sous la forme d'une spirale remarquée jadis par Savart; et le lycopode, se distribuant autrement, dessine un anneau autour de chaque nœud et des stries

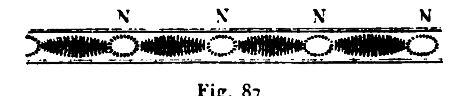


Fig. 87

transversales sur les ventres. La distance des centres de deux anneaux consécutifs mesure une concamération ou une demi-longueur d'onde. Un tube en verre de Bohême plein d'air présente

([1]) Wüllner, *Wied. Ann.*, IV, 321; 1878; et *Lehrbuch der Experimentalphysik*, I, 803.

16 segments, montrant ainsi immédiatement que la vitesse du son dans l'air est 1/16 de la vitesse dans le verre de Bohême. Avec quatre tubes identiques, respectivement pleins d'air, d'acide carbonique, de gaz d'éclairage et d'hydrogène, et excités de façon à donner l'octave, M. Kundt a obtenu 32, 40, 20 et 9 segments. Les vitesses relatives du son dans ces quatre gaz sont donc 1, 0,8, 1,6, 3,56.

368. Mesure de la vitesse du son dans les liquides au moyen des tuyaux sonores. — Les vibrations des colonnes liquides obéissant aux mêmes lois que les vibrations des colonnes gazeuses, on a cherché à mesurer la vitesse du son dans les liquides en les enfermant dans des tuyaux et en leur appliquant les mêmes procédés qu'aux gaz.

La figure 88 montre l'appareil employé à cet effet par Wertheim. Un tuyau *b*, dont on voit en bas le détail, était plongé dans une cuve A contenant le liquide à étudier et recevait d'une pompe B un courant du même liquide, courant régularisé par la sphère C remplie d'air à la pression convenable. Le tuyau *b*, muni d'une embouchure dont les deux lèvres *d* et *e* se plaçaient à la distance voulue au moyen des colliers *f*, *f*, était formé de plusieurs parties s'ajoutant l'une à la suite de l'autre, et il pouvait en outre recevoir un bouchon *k* sur le dernier pas de vis *h*. Wertheim se proposait de déterminer la perturbation à l'origine sur le tuyau fermé, et la somme des perturbations aux deux extrémités sur le tuyau ouvert. Mais il reconnut bientôt que, le fond prenant toujours fortement part aux vibrations du liquide, il ne pouvait pas opérer avec le tuyau fermé. Il se borna donc à expérimenter sur le tuyau ouvert; même dans ce cas le mouvement se communique encore aux parois, ce qui explique la faiblesse du nombre que trouva Wertheim pour la vitesse du son dans l'eau (1173^m à $11°$) [1].

[1] Ce nombre multiplié par $\sqrt{\frac{3}{2}}$ se trouvant égal à 1437, c'est-à-dire à très peu près au résultat de Colladon et Sturm, Wertheim en conclut que pour les liquides, comme pour les solides, la vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal dans une colonne cylindrique n'est que les $\sqrt{\frac{2}{3}}$ de la vitesse dans une masse indéfinie. Cette assimilation des liquides aux solides est évidemment insoutenable.

M. von Helmholtz (¹) signala presque aussitôt la raison de cette faiblesse, en faisant remarquer que la perte de force vive devait

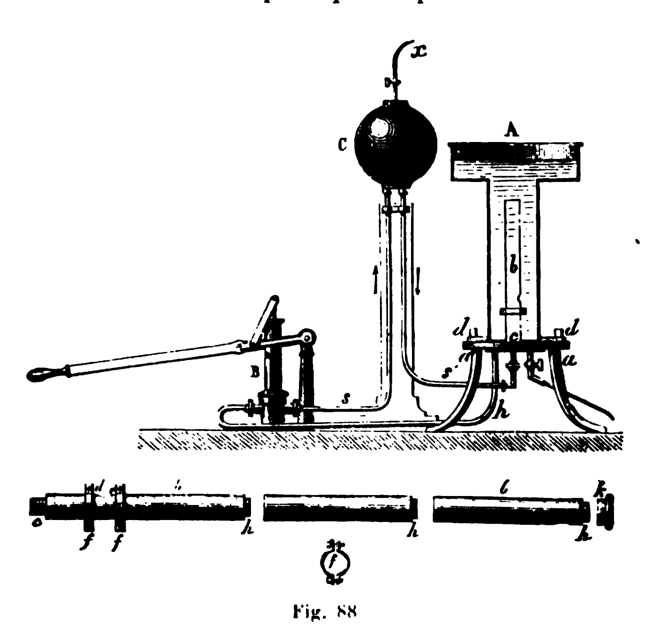


Fig. 88

dépendre du diamètre du tuyau, de l'épaisseur des parois et de leur élasticité. Récemment, MM. Kundt et Lehmann (²) ont vérifié cette interprétation en mesurant par la méthode des poussières, avec de la limaille de fer, la vitesse V de propagation du son à travers l'eau dans des tubes en verre de différentes épaisseurs *e* et de différents diamètres intérieurs 2R; ils ont trouvé en effet les nombres suivants à une température voisine de 18° :

e	2R	V
mm	mm	mm
2,2	28,7	1040
3,0	34,0	1228
3,0	23,5	1262
2,5	21,0	1358
5,0	16,5	1360
5,0	14,0	1383

(¹) HELMHOLTZ, *Fortschritte der Physick im Jahre* 1848. Cf. ANDRÉ, *C. R.*, LXX, 568; 1870.
(²) KUNDT et LEHMANN, *Pogg. Ann.*, CLIII, 1; 1874.

M. Dvorák (¹), par la même méthode employée d'une manière un peu différente, avec de la poudre à canon débarrassée du salpêtre par lixiviation, a obtenu des résultats tout semblables :

e	2R	V
mm	mm	mm
0,82	17,9	998
0,63	11,7	1046
0,52	8,46	1164
2	15	1213
2	11	1281

L'erreur diminue quand l'épaisseur augmente et quand le diamètre décroît, quand par conséquent la résistance des parois devient plus grande; mais elle ne s'atténue pas assez pour qu'on puisse mesurer par cette méthode la vitesse du son dans les liquides.

La méthode convient au contraire très bien aux solides, ainsi que nous le verrons plus loin.

(¹) Dvorák, *Pogg. Ann.*, CLIV, 156; 1875.

CHAPITRE VI

CORDES VIBRANTES

369. Lois des cordes vibrantes. — *Historique.* — Grecs attribuent l'invention de la lyre à Apollon, les Hébreu Jubal, les Égyptiens à leur Mercure Trismégiste, les Chinois à C fucius. Sans nous arrêter à ces légendes, nous sommes du m certains qu'au temps de Ramsès III (1250 ans avant J.-C.), Égyptiens possédaient un grand nombre d'instruments à co construits avec un art parfait, depuis les grandes harpes jusq modeste luth. Les principales circonstances qui règlent les vi tions transversales des cordes furent donc très anciennement nues. Pythagore montrait sur un monocorde que, pour rendre tave ou la quinte, une corde doit être réduite à la moitié ou deux tiers de sa longueur première. Il chercha aussi l'influ de la tension, mais il ne paraît pas en avoir trouvé l'expres exacte.

Lois. — Au commencement du dix-septième siècle, Mersen établit expérimentalement les lois du phénomène (327); cent plus tard Taylor [2] en donna la théorie et obtint la formule vante, qui contient toutes les lois découvertes par Mersenne,

$$N = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

[1] MERSENNE, *loc. cit.*, liv. II, prop. 18.

[2] TAYLOR, *Phil. Trans.*, 1713; et plus en détail dans son célèbre ouv *Methodus incrementorum*. London; 1715.

g désignant l'accélération due à la pesanteur,
T — la tension totale [1],
P — le poids total,
et L — la longueur de la corde.

Si la corde est un cylindre de rayon R et de poids spécifique p, on a $P = \pi R^2 L p$, et la formule peut s'écrire

$$N = \frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{gT}{\pi p}}.$$

La hauteur du son fondamental (définie, comme d'habitude, par le nombre des vibrations de ce son) est :

1° En raison inverse de la longueur ;

2° En raison inverse du diamètre ;

3° En raison inverse de la racine carrée de la densité de la corde ;

4° En raison directe de la racine carrée du poids tenseur.

Vérifications expérimentales. — Toutes ces propositions se vérifient aisément avec le sonomètre différentiel de Marloye (fig. 19), sur lequel sont tendues deux cordes dont l'une sert de terme de comparaison, tandis que l'autre est soumise aux diverses conditions de l'expérience. Toutefois, pour estimer exactement la tension, il est préférable d'employer, à l'exemple de Savart, un sonomètre vertical, dans lequel les cordes sont tendues directement par des poids attachés à leur extrémité inférieure : deux étaux fixés à la planchette permettent de limiter les portions vibrantes.

La vérification est d'autant plus précise que la corde satisfait mieux à sa définition théorique (372) : *un fil parfaitement flexible et dépourvu d'élasticité propre*. Les cordes à boyau sont généralement préférables aux cordes métalliques.

Sons supérieurs. — Outre le son fondamental, il existe des sons supérieurs, que Mersenne [2] remarqua en écoutant attentivement la note émise ; à mesure qu'elle s'éteint, les sons supérieurs deviennent de plus en plus distincts : on peut entendre ainsi l'octave (qui échappa à Mersenne à cause de sa ressemblance avec la tonique),

(1) La tension totale est mesurée par le poids qui, attaché à l'extrémité de la corde, produirait effectivement cette tension.

(2) MERSENNE, *loc. cit.*

la douzième, la double octave (qui lui fit aussi défaut) et la dix-septième.

Expérience de Noble et Pigott. — En 1673, deux élèves de Wallis à Oxford, Noble et Pigott ([1]), établirent l'existence de ces sons supérieurs par une expérience curieuse. Les musiciens avaient depuis longtemps observé que si une corde est attaquée sur un instrument quelconque, une corde voisine, accordée à l'unisson, entre elle-même en vibration. Qu'arrivera-t-il si la deuxième corde est à l'octave grave, à la douzième basse, à la double octave grave,... de la corde directement attaquée ? Les élèves de Wallis prouvèrent que, dans tous les cas, cette deuxième corde se met à vibrer à l'unisson de la première : elle se partage en 2, 3, 4... segments, rendant chacun le son donné et séparés par des nœuds immobiles. Noble et Pigott montraient ces nœuds en y posant de petits cavaliers de papier qui restaient immobiles, tandis que partout ailleurs ils étaient désarçonnés.

Expérience de Sauveur. — De son côté, Sauveur ([2]), en France



Fig. 89

faisait la même expérience sous une forme un peu différente, l'un des segments de la corde étant directement excité à l'archet; et y ajoutait cette observation instructive. Une corde émettant le son fondamental et vibrant par conséquent sur toute sa longueur, il

([1]) Noble et Pigott, cités par Wallis, *Phil. Trans.*; 1677; et *Algebra* II, 46 London; 1685.

([2]) Sauveur, *Mémoires de l'Acad. des Sciences*; 1701.

touchait avec une barbe de plume à la moitié, au tiers, au quart,... : on entendait alors l'octave, la douzième, la double octave,... [1] ; et en même temps on constatait la subdivision de la corde au moyen de cavaliers blancs et noirs placés respectivement aux nœuds et aux ventres (ces deux appellations sont de Sauveur).

Expérience d'Young. — Young [2] montra que si la corde est pincée, frappée ou, pouvons-nous ajouter, attaquée à l'archet [3] en son milieu, les sons pairs ne se forment pas : car il suffit de toucher ensuite la corde en ce même milieu avec une barbe de plume, pour éteindre complètement le son. De même, quand la corde est attaquée au tiers, les sons 3, 6, 9,... font défaut. En général, dans le cortège des sons supérieurs manquent tous ceux qui auraient un nœud au point d'attaque.

Analogie des lois des cordes avec celles des tuyaux sonores. — Les principales circonstances du mouvement transversal [4] des cordes offrent avec les lois des vibrations longitudinales des tuyaux ou des verges une analogie frappante. C'est qu'en effet, dans les deux cas, un même mode de combinaison de mouvement entraîne une même relation entre la vitesse de propagation du son et le nombre des vibrations.

370. Relation entre la vitesse de propagation du son et le nombre des vibrations. — Reprenons le long tube de caoutchouc fortement tendu, fixé à un bout et saisi à l'autre, dont nous nous sommes déjà servis (343) : par une brusque secousse produisons un ébranlement transversal à l'origine, et nous consta-

[1] Les violonistes mettent à profit ce fait pour obtenir des sons très élevés et très purs : ils touchent légèrement avec le doigt la corde vibrante au point convenable.

[2] YOUNG, *Phil. Trans.*; 1880 ; et *Miscellaneous Works* (éd. Peacock. London; 1855), I, 64.

[3] Delezenne, ayant observé qu'une corde attaquée à l'archet juste en son milieu restait muette, pensait que la présence de l'octave était nécessaire à la production du son fondamental. Mais, bien que la largeur de l'archet rende l'expérience difficile, on peut, en le passant au milieu de la corde, tirer de celle-ci un grand nombre de sons impairs. (DELEZENNE, *Recueil des travaux de la Société des sciences de Lille*; 1827; DUHAMEL, C. R., X, 855; 1840; ANTOINE, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVII, 191 ; 1849.)

[4] Les cordes vibrantes sont aussi susceptibles de vibrer longitudinalement. Nous étudierons ces vibrations longitudinales en même temps que celles des verges dont elles ne diffèrent pas.

terons aisément que cet ébranlement, propagé jusqu'à l'extrémité fixe, s'y réfléchit avec changement de signe de la vitesse (la protubérance se transformant en dépression), pour revenir éprouver contre la main un nouveau changement de signe ([1]). Par suite, un mouvement périodique entretenu à l'origine se trouve rapidement amplifié, l'onde deux fois réfléchie étant identique à l'onde directe si la durée du double voyage de l'onde est un nombre entier k de périodes. Ainsi, V étant la vitesse de propagation du mouvement transversal dans la corde de longueur L soumise à l'expérience, la condition du renforcement sera

$$\frac{2L}{V} = k\tau,$$

ou

$$N = k\frac{V}{2L},$$

ce qui est la formule même établie pour les tuyaux sonores (359

Un changement de période amène aisément la division du tub en un nombre quelconque de parties vibrant à l'unisson. Mais est possible de donner à l'expérience une forme plus précise, du à M. Melde, de Marbourg.

371. Expériences de Melde ([2]). — Un long cordonnet de so blanche est tendu horizontalement entre une cheville ou une poul fixe et un diapason vertical. Le plan des branches du diapason co tenant le cordonnet, l'extrémité de celui-ci se déplacera longitudi nalement quand le diapason vibrera. Le cordonnet, successiveme relâché puis retendu, s'abaissera, redeviendra horizontal, s'élèver retournera à la position horizontale et ainsi de suite, le mouveme longitudinal du point d'attache provoquant un mouvement tran versal du système avec une période double; la corde entière osciller donc à l'octave grave du diapason ([3]). Mais pour que la corde puiss

([1]) Les frères Weber ont suivi avec beaucoup de soin la propagation d'u ébranlement dans une grande ficelle de coton, très flexible et très peu élast que : ils ont trouvé que la vitesse de la propagation était indépendante de nature de l'ébranlement (chiquenaude, choc d'un marteau), indépendante aus du chemin déjà parcouru (E. H. et W. WEBER, *loc. cit.*, 460.).

([2]) MELDE, *Pogg. Ann.*, CIX, 193 et CXI, 513 ; 1860-64.

([3]) Si les vibrations du diapason s'effectuaient perpendiculairement à la di

vibrer ainsi, une tension convenable est nécessaire : au début il

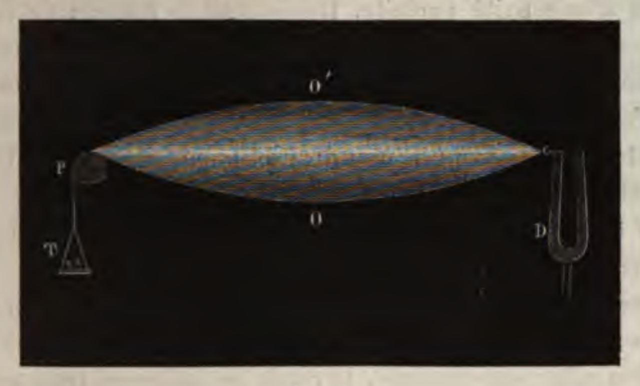


Fig. 90

ne se produira en général qu'un frémissement irrégulier ; en modi-

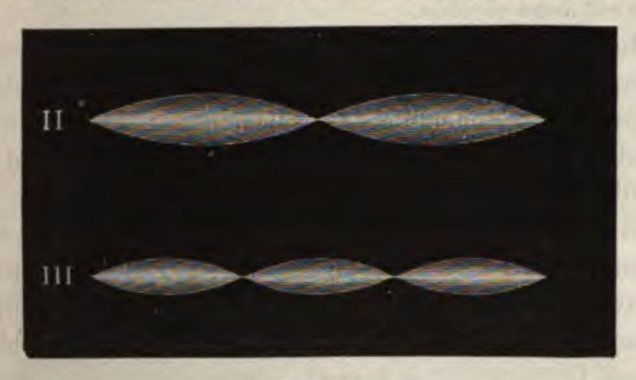


Fig. 91

fiant graduellement la tension, nous arriverons à la valeur vou-

rection de la corde, l'accord s'établirait à l'unisson. Par conséquent, la corde

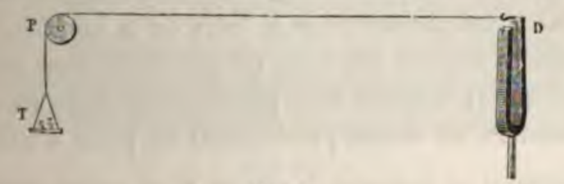


Fig. 92

étant d'abord à l'octave grave du diapason (fig. 90), si l'on fait tourner celui-ci de 90° sur lui-même, on verra se former deux fuseaux égaux séparés par un nœud.

lue, et la corde s'épanouira en un fuseau d'un blanc perlé adı rable et d'une fixité parfaite. Diminuons la tension de la cor tout se déforme et se brouille pour rentrer dans l'ordre qua la tension sera devenue égale exactement au quart de ce qu'(était d'abord : la corde se partagera alors en deux segme oscillants, séparés par un nœud absolument immobile. Une t(sion égale au neuvième de la valeur originelle amènera la di sion en trois segments; et ainsi de suite, chaque forme se prés(tant avec une netteté saisissante ([1]).

Comme, d'ailleurs, dans tous les cas, chacun des segments vil à l'unisson de l'octave grave du diapason, il en résulte que si p(la tension 1/9, par exemple, la corde se divise en trois segmeı c'est que pour cette tension 1/9 le son fondamental est 1/3, ou douzième basse du son de la corde tendue par le poids 1. La loi tensions est donc vérifiée.

L'influence de la longueur se mettra facilement en évidence a deux diapasons de hauteur différente : pour s'étaler semblableme les longueurs d'une même corde également tendue, excitée succ sivement par ces deux diapasons, devront être en raison inve des nombres de vibrations des deux diapasons.

Si l'on veut reconnaître l'influence du poids de la corde, on pr(dra d'une part un cordonnet de longueur L qui sous la tensioı donne avec le diapason *a* un fuseau unique, et d'autre part qua cordonnets identiques, disposés parallèlement en une seule co de même longueur L, à laquelle on appliquera la même t(sion T et que l'on attachera à un diapason A (octave grave du p cédent); cette corde s'étalera de même en un seul fuseau ; donc poids de la corde ayant quadruplé, le son fondamental est descen à l'octave grave. On peut aussi, comme l'indique M. Tynd: prendre une corde formée sur le tiers de sa longueur de qua brins parallèles et pour les deux tiers restants d'un seul brin même cordonnet; amenée à se partager en deux fuseaux, c(corde présentera un nœud précisément au point d'attache de

([1]) En substituant au cordonnet de soie un fil de platine chauffé au ro par un courant électrique, M. Tyndall rend l'expérience visible à un nombı auditoire : les ventres, refroidis par leur passage rapide à travers l'air, : obscurs, tandis que les nœuds brillent avec éclat, l'incandescence dimint rapidement de part et d'autre de chaque nœud.

deux portions d'inégal diamètre, le segment de longueur simple et de diamètre double battant synchroniquement avec le segment de longueur double et de diamètre simple.

Enfin, avec des fils de substances différentes, également longs et également gros, attachés à un même diapason, on vérifiera aisément que les poids tenseurs nécessaires pour les faire vibrer à l'unisson de l'octave grave du diapason sont proportionnels aux poids spécifiques des substances employées : ce qui donnerait à la rigueur un moyen de déterminer au diapason les poids spécifiques relatifs des métaux susceptibles d'être étirés en fils minces et flexibles.

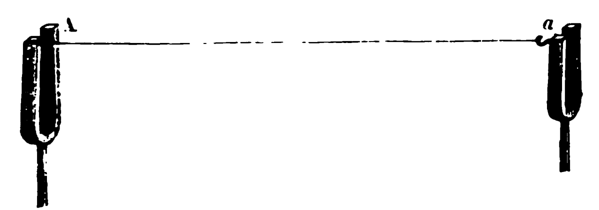


Fig. 93

En superposant sur une même corde les actions de deux diapasons à l'octave l'un de l'autre, on obtient une série de formes dont la

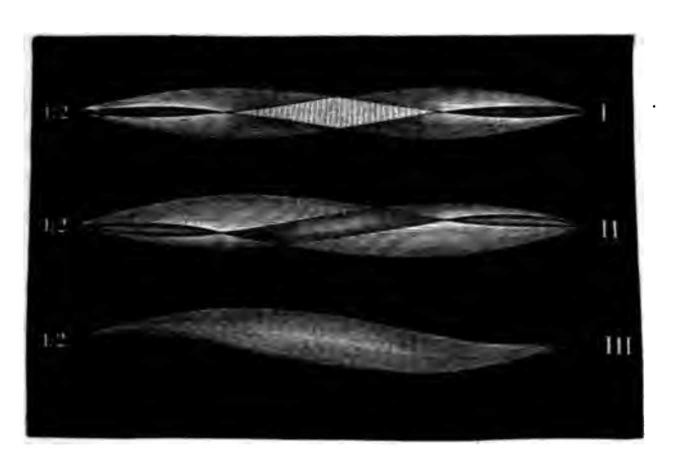


Fig. 94

figure ci-contre représente les principales, et dans lesquelles se distinguent les deux mouvements vibratoires.

La figure 95 montre l'un des aspects qui résultent de l'excit tion simultanée par deux diapasons sonnant à la douzième.

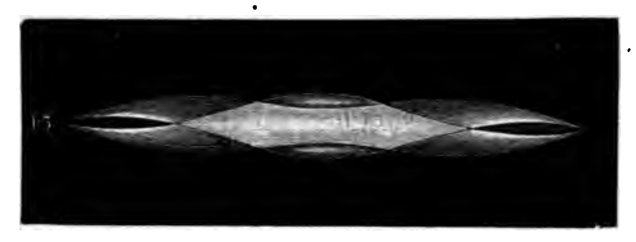


Fig. 95

Le procédé de Melde, étant particulièrement commode pour entre tenir la vibration, permet d'étudier aisément les formes successive de la corde au moyen d'une lumière à éclipses intermittentes. A c effet, M. Neumann dirige sur une corde filée (recouverte de fil mé tallique) la lumière vive sortant d'une fente parallèle. Devant cet fente il dispose une lame de verre portant un trait noir à l'encre d Chine et fixée à un diapason de telle sorte qu'au repos le trait no occulte la lumière. Mais quand le diapason vibre, la lumière éclai en général la corde qui offrira encore l'apparence d'un fuseau brilla sur lequel on verra se mouvoir lentement une ligne sombre affecta les formes successives de la corde, si celle-ci est à peu près à l'o tave du diapason. La ligne serait immobile si l'accord était exac

372. Théorie des cordes vibrantes. — *Équation d cordes vibrantes.* — La théorie des cordes vibrantes, commenc par Taylor, a fait l'objet des recherches de Jean et de Daniel Be noulli, de d'Alembert, d'Euler, de Lagrange, et a su intéress encore de nos jours plus d'un mathématicien.

Pour établir cette théorie, on suppose la corde parfaitement flexib et dénuée d'élasticité, ce qui pratiquement revient à admettre :

1° Que les dimensions transversales de la corde sont assez petit pour que celle-ci puisse être regardée comme un simple fil abs lument flexible ;

2° Que la corde est suffisamment tendue et n'éprouve que d déformations assez faibles pour que les forces élastiques variabl résultant de ces déformations soient complètement négligeabl relativement à la tension permanente T.

En se bornant à de telles déformations, on pourra considérer l'angle qu'un élément quelconque de la corde fait à tout instant avec sa position initiale comme infiniment petit et en négliger les puissances supérieures à la première.

Soit donc, à un instant quelconque du mouvement, $a'b'$ un élément ds qui était en ab à l'état d'équilibre. Aux deux extrémités de cet élément agissent deux forces égales à T, mais non directement opposées et qui par conséquent ne se font pas équilibre : soient α

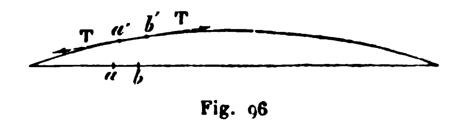


Fig. 96

l'angle que la tangente en a' fait avec la position première AB de la corde prise pour axe des x, et β l'angle que fait avec le même axe la tangente en b', l'élément $a'b'$ est sollicité dans une direction oy perpendiculaire à ox par une force

$$F = T(\sin\beta - \sin\alpha) = T\, d\sin\alpha,$$

ou, si, d'après notre hypothèse sur la petitesse de α, nous identifions le sinus avec la tangente,

$$F = T\, d\,tg\,\alpha = T\frac{d^2y}{dx^2}dx.$$

L'équation du mouvement dans le sens des y est donc, μ désignant la masse de la corde par unité de longueur,

$$\mu ds\frac{d^2y}{dt^2} = T dx\frac{d^2y}{dx^2},$$

ou, comme ds ne diffère pas de dx au degré d'approximation où nous nous sommes placés,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2y}{dx^2},$$

ou enfin, si l'on pose $\frac{T}{\mu} = V^2$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = V^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

C'est la fameuse équation des cordes vibrantes que nous avons déjà vue présider à la propagation d'un ébranlement longitudinal dans un cylindre élastique (344).

A. — *Intégration par des fonctions arbitraires.* — On se rappelle que l'intégrale générale de cette équation peut se représenter par la somme de deux fonctions arbitraires,

$$y = f(x + Vt) + F(x - Vt),$$

indiquant la superposition de deux déformations qui se propagent en sens contraire avec la même vitesse V.

Cette solution s'applique immédiatement au cas d'une corde indéfinie, et on peut l'étendre au problème d'une corde finie par l'artifice qui nous a déjà servi pour un tuyau limité.

Si nous supposons d'abord la corde terminée d'une part à l'origine et s'étendant indéfiniment dans le sens des x positifs, nous pourrons la regarder comme faisant partie d'une corde indéfinie dans les deux sens, pourvu que les déplacements et les vitesses initiales dans la partie négative soient réglés de manière que, la corde étant abandonnée à elle-même, l'origine reste perpétuellement au repos : en d'autres termes, l'onde positive du côté négatif doit être telle qu'en se superposant à l'onde négative donnée du côté positif elle laisse l'origine en repos ; ou encore, l'onde positive émanant de l'origine doit être précisément celle que produit la réflexion de l'onde réelle à l'extrémité fixe.

De là, on passe aisément au cas de la corde attachée aux deux bouts : la perturbation initiale se partage d'elle-même en ondes positives et en ondes négatives qui sont réfléchies aux extrémités, ch[illegible] gent de signe à chaque réflexion, pour reprendre leur état prim[illegible] après un nombre pair quelconque de réflexions, de sorte que [illegible] période du mouvement est le temps requis pour parcourir deux [illegible] la longueur de la corde, $\tau = \frac{2L}{V}$, ou un sous-multiple de ce te[illegible]

Corde fixée à ses deux bouts. — Le cas d'une corde attaché[illegible] deux bouts étant celui qui intéresse réellement la pratique [illegible] exposerons avec quelque détail la méthode par laquelle [illegible] [illegible] cas général en supposant la corde prolongée in[illegible]

ment dans les deux sens et en disposant des conditions initiales de façon à assurer l'immobilité constante des extrémités de la portion considérée.

a) Déplacements initiaux sans vitesses.

Examinons d'abord le cas où la corde, dérangée de sa position d'équilibre, est ensuite abandonnée librement à elle-même, sans vitesse initiale; et, comme les deux ondes se partageront également le déplacement, soit $y=2f(x)$, x étant compris entre o et L, l'équation de la courbe que dessine la corde déformée. Construisons la courbe $y=f(x)$, pour les valeurs de x comprises entre o et L. Soit *acb* cette courbe; traçons la courbe *bc'b'* symétrique de *acb* par rapport au point *b*, puis la symétrique de celle-ci par rapport à *b'*, et ainsi de suite indéfiniment; opérons de même à gauche. Le mouvement de la corde donnée sera celui de la portion *ab* d'une corde indéfinie dont l'état initial serait figuré par tous les arcs de courbe que nous venons de tracer et dans laquelle la déformation se propagerait dans les deux sens avec la vitesse V, c'est-à-dire qu'il sera représenté à un instant quelconque par l'équation

$$y=f(x+Vt)+f(x-Vt).$$

En effet, on a

à l'époque $t=0$, pour toute la corde, $y=2f(x)$, $\frac{dy}{dt}=0$,

et à toute époque, aux points $x=0$ et $x=L$, $y=0$.

Le mouvement d'un point quelconque est périodique, car

$$f(x\pm 2L)=f(x),$$

et par conséquent

$$f\left(x\pm V\left(t\pm\frac{2L}{V}\right)\right)=f\left(x\pm Vt\right),$$

c'est-à-dire qu'après un temps $\tau=\frac{2L}{V}$ la courbe reprend la même forme.

Soit par exemple une corde pincée, ou mieux écartée de sa posi-

tion d'équilibre avec une pointe fine (telle que le plectrum joueur de lyre), et ayant reçu à l'époque $t=0$ la forme A

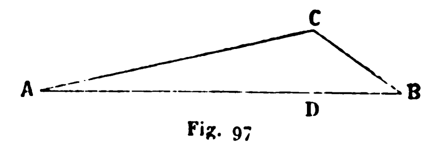


Fig. 97

constituée par deux portions rectilignes. Réduisant les ordonnées

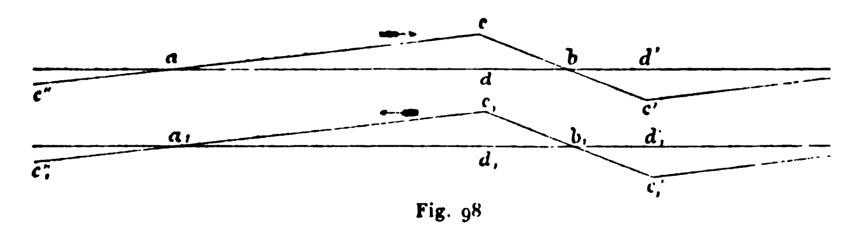


Fig. 98

moitié, effectuons le tracé marqué par la figure 98, où la cou supérieure représente les ondes positives et la courbe inférieure

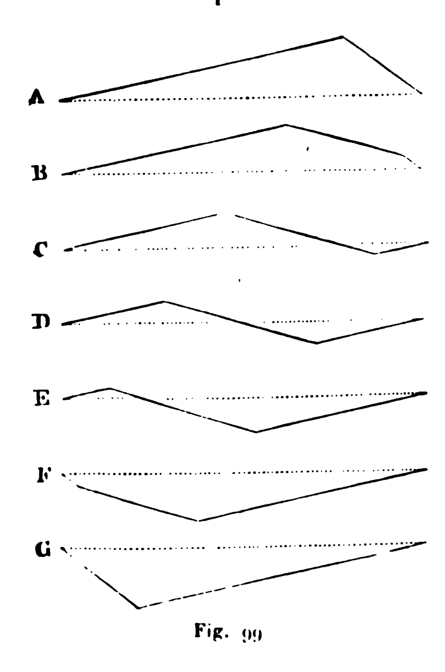


Fig. 99

ondes négatives dans leur position initiale. Il suffit de combiner deux courbes déplacées en sens inverse chacune de Vt pour a

la forme de la courbe à l'époque t. On obtient ainsi les figures ci-contre, qui correspondent à des époques distantes d'un douzième de période. Au bout d'une demi-période la corde a pris la forme G, d'où elle revient à la forme primitive en passant par les mêmes figures, composées exclusivement de portions rectilignes.

b) Vitesses initiales sans déplacements.

Si la corde dans sa position d'équilibre reçoit en chacun de ses points une vitesse initiale $2\varphi'(x)$ (nécessairement nulle aux extrémités), on verra de même que l'équation

$$y' = \varphi'(x+Vt) + \varphi'(x-Vt)$$

donnera les vitesses, et

$$y = \frac{1}{V}\Big[\varphi(x+Vt) - \varphi(x-Vt)\Big]$$

les déplacements à un instant quelconque, les deux fonctions y' et y étant encore périodiques et de même période $\tau = \frac{2L}{V}$.

c) Vitesses et déplacements initiaux.

Si enfin les deux conditions, déplacements et vitesses, se superposent primitivement aux divers points de la corde, on pourra toujours, en ajoutant les deux solutions précédentes, déterminer à un instant quelconque l'état de la corde en chacun de ses points.

La question doit donc être regardée comme complètement résolue.

Formule de Taylor. — Dans tous les cas, le son fondamental aura pour période $\tau = \frac{2L}{V}$, ou pour hauteur

$$N = \frac{V}{2L}.$$

Or nous avons posé $V^2 = \frac{T}{\mu}$, T étant le poids tenseur, et μ étant

la masse par unité de longueur, ou $\frac{P}{gL}$, si nous appelons P le p
de la corde entière; on a donc

$$N=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

ce qui est bien la formule de Taylor.

A l'aide des équations aux dimensions (72) des diverses quan
entrant dans cette formule

$$T=[MLt^{-2}], \quad g=[Lt^{-2}], \quad P=[MLt^{-2}], \quad L=[L],$$

nous vérifierons aisément que $N=[t^{-1}]$, et que par conséq
la formule est homogène (¹). Si nous tenions pour évi
a priori que la période ne dépend que de L, T et μ, l'équation
dimensions de μ étant $\mu=[ML^{-1}]$, comme la seule combinaiso
ces quantités capable de représenter un temps est $T^{-\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}L$, la
dition d'homogénéité nous donnerait la formule de Taylo
facteur numérique restant seul indéterminé.

B. — Intégration par des séries trigonométriques. — Si la méth
de Lagrange résout complètement le problème de mécaniqu
reste à savoir au point de vue physique quelle sera la nature du
produit par le mouvement de la corde. La réponse à cette ques
se trouve dans une deuxième manière de satisfaire à l'équa

$$\frac{d^2y}{dt^2}=V^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

différentielle dont l'intégrale générale peut être mise sous la fo
d'une série trigonométrique, ainsi que l'a montré D. Bernoull
Suivant l'exemple de Taylor, nous chercherons d'abord
solution particulière. Et, à cet effet, prenant pour guide l'ol

(¹) Plus simplement, on peut remarquer que, T et P étant des forces, par
séquent le rapport $\frac{P}{T}$ un nombre abstrait, et $\frac{L}{g}$ étant le carré d'un temps (la n
du carré du temps que met un corps pesant à tomber de la hauteur L), la
mule représente bien l'inverse d'un temps.

(²) D. Bernoulli, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1753.

vation, nous nous demanderons s'il est possible de résoudre le problème par un mouvement pendulaire

$$y = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right)$$

d'amplitude a variable avec le point x considéré.

Pour que cette valeur de y convienne, il faut que l'on ait

$$-\frac{a}{V^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{d^2a}{dx^2},$$

ou, puisque $V\tau = \lambda$,

$$\frac{d^2a}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a;$$

d'où, en intégrant,

$$a = A \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} + B \cos 2\pi\frac{x}{\lambda}.$$

Le mouvement proposé sera donc possible, si l'amplitude en chaque point obéit à cette équation. Mais, les deux extrémités de la corde étant fixes, y et par suite a doit être nul pour $x = 0$ et $x = L$, ce qui exige que $B = 0$ et que $\sin 2\pi\frac{L}{\lambda} = 0$, ou $\lambda = \frac{2L}{k}$, ou $\tau = \frac{1}{k}\frac{2L}{V}$, k étant un nombre entier quelconque. Ainsi la corde peut exécuter tout mouvement pendulaire dont la période est égale à un sous-multiple de $\frac{2L}{V}$ (ou à cette quantité même), et elle ne peut pas en exécuter d'autres, le mouvement d'indice k étant exprimé par

$$y = A_k \sin\frac{k\pi x}{L} \cos\left(\frac{k\pi Vt}{L} - \varepsilon_k\right),$$

si l'on pose

$$2\pi\varphi_k = \varepsilon_k.$$

Le son fondamental correspond à $k = 1$, et par conséquent il a pour hauteur, comme nous l'avons déjà trouvé autrement,

$$N = \frac{V}{2L}.$$

A une valeur quelconque de k correspond un harmonique natu du son fondamental.

Pour cet harmonique, y est nul à toute époque aux points

$$0, \quad \frac{L}{k}, \quad \frac{2L}{k}, \quad \frac{3L}{k}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{(k-1)L}{k}, \quad L;$$

tous ces points sont des nœuds. D'ailleurs la forme de la courbe à instant quelconque est une sinussoïde.

Mais, d'après le principe de la superposition des petits mou ments, la corde peut exécuter à la fois tous ces mouvements penc laires.

Analytiquement, l'équation des cordes vibrantes étant linéai la somme d'un nombre quelconque de solutions particulières encore une solution. Si donc on fait la somme d'un nombre in de solutions telles que

$$y = A_k \sin\frac{k\pi x}{L}\cos\left(\frac{k\pi V t}{L} - \varepsilon_k\right),$$

on aura la solution générale

$$y = \sum_0^\infty A_k \sin\frac{k\pi x}{L}\cos\left(\frac{k\pi V t}{L} - \varepsilon_k\right),$$

le signe $\sum_0^\infty$ indiquant la sommation de tous les termes en nom infini que l'on obtient en donnant à k successivement toutes les leurs entières depuis zéro jusqu'à l'infini dans l'expression pla sous le signe $\sum$.

Physiquement, cela signifie que tout mouvement vibratoire d' corde peut être considéré comme la superposition de mouveme pendulaires de périodes sous-multiples de $\frac{2L}{V}$, et d'amplitudes e phases convenables [1] (déterminées par les conditions initiales)

[1] Dans chaque mouvement l'amplitude est variable avec l'abscisse du p de la corde considéré, la phase est la même en tous points.

[2] La proposition est vraie pour un système vibrant quelconque, ainsi nous le verrons plus loin (théorème de Fourier).

a) Déplacements initiaux sans vitesses.

Si nous supposons d'abord qu'au début on déplace la corde sans lui imprimer de vitesse initiale, on doit avoir $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$, ce qui exige que tous les ε_k soient nuls. L'expression générale se réduit alors à

$$y = \sum_0^\infty A_k \sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi V t}{L}.$$

La condition qu'au temps $t = 0$ la corde affecte la forme

$$y = f(x)$$

se traduit donc par la relation

$$f(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{L} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \quad \ldots\ldots \quad + A_k \sin\frac{k\pi x}{L} + \ldots\ldots$$

Pour déterminer l'un des coefficients, A_k, il suffit de multiplier les deux membres de cette équation par $\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$, et d'intégrer suivant toute la longueur de la corde. Tous les termes du deuxième membre de l'intégrale sont nuls, excepté celui qui a pour coefficient A_k et qui devient $\frac{L}{2}$ (1). On en conclut

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx.$$

(1) On a en effet pour un terme quelconque d'ordre k'

$$\int_0^L \sin\frac{k'\pi x}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left[\cos\frac{(k-k')\pi x}{L} - \cos\frac{(k+k')\pi x}{L}\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(k-k')\pi}\sin\frac{(k-k')\pi x}{L} - \frac{L}{(k+k')\pi}\sin\frac{(k+k')\pi x}{L}\right]_0^L,$$

quantité identiquement nulle si k' est différent de k; et pour le terme en A_k,

$$\int_0^L \sin^2\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{L}\right)dx$$
$$= \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{L}\right)_0^L = \frac{L}{2}.$$

Cas d'une corde pincée. — Considérons, par exemple, le cas d'u corde pincée en son milieu de façon à former au début les d côtés d'un triangle isocèle de hauteur h et de base L[1]. Multipli les ordonnées du triangle par celles de la sinussoïde d'ordre k p avoir celles de la courbe

$$y = f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

Si k est pair, la sinussoïde ayant un nombre pair de festons, l'ai de la courbe comprise entre o et $\frac{L}{2}$ est égale et de signe contrai à l'aire comprise entre o et $-\frac{L}{2}$, par conséquent l'aire totale nulle ; tous les coefficients A_k d'ordre pair sont donc nuls.

Si k est impair, les deux aires s'ajoutent et l'aire totale est ég à leur somme, de sorte que l'on a

$$\text{pour } k \text{ impair,} \qquad A_k = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

ou, en remplaçant $f(x)$ par son expression analytique entre o $\frac{L}{2}$, savoir $\frac{2h}{L}x$,

$$A_k = \frac{8h}{L^2}\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx,$$

et, en intégrant par parties,

$$= \frac{8h}{L^2}\left[-\frac{L}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{L} + \left(\frac{L}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi x}{L}\right]_0^{\frac{L}{2}},$$

ou

$$= \frac{8h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

(1) Voir Mathieu, *Cours de Physique mathématique*, p. 19.

Le mouvement de la corde est donc représenté par la formule

$$y=\frac{8h}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi Vt}{L}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi Vt}{L}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L}\cos\frac{5\pi Vt}{L}\cdots\right].$$

Cette série est rapidement convergente. Le son fondamental prédominera donc, les harmoniques pairs manquant complètement suivant la loi de Young, et les harmoniques impairs s'affaiblissant rapidement.

On traiterait sans plus de peine le cas où la corde est pincée en un point l quelconque ([1]), et l'on trouverait, h désignant toujours la hauteur à laquelle ce point est soulevé,

$$A_k=\frac{2hL^2}{k^2\pi^2 l(L-l)}\sin\frac{k\pi l}{L}.$$

Le coefficient d'ordre k s'annule quand $\sin\frac{k\pi l}{L}=0$, ou quand l égale $\frac{L}{k}$, ou $\frac{2L}{k}$, ou $\frac{3L}{k}$,..., c'est-à-dire quand la corde est attaquée à l'un des nœuds du k^e son partiel.

b et c) Vitesses initiales sans ou avec déplacements.

Si les vitesses initiales ne sont pas nulles, on doit prendre pour chaque terme l'expression complète

$$y=A_k\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\left(\frac{k\pi Vt}{L}+\varepsilon_k\right),$$

ou l'expression équivalente

$$y=A_k\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi Vt}{L}+B_k\sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{k\pi Vt}{L};$$

([1]) HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la musique*, p. 489.

et, $\varphi'(x)$ étant la vitesse de chaque point au temps $t=0$, on aura

$$\varphi'(x) = -\frac{\pi V}{L}\sum_0^\infty k B_k \sin\frac{k\pi x}{L},$$

d'où l'on tirera par le même procédé que tout à l'heure

$$B_k = -\frac{2}{k\pi V}\int_0^L \varphi'(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$

Cas d'une corde frappée. — Si une corde est frappée brusqueme[nt] par un marteau dur et tranchant, et si le marteau se relève as[sez] vite pour qu'au début le point touché (dont nous désigner[ons] toujours l'abscisse par l) possède seul une certaine vitesse, sa[ns] avoir d'ailleurs éprouvé de déplacement sensible, les coefficients seront tous nuls; et l'on aura

$$y = \frac{2c}{\pi V}\left[\sin\frac{\pi l}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi V t}{L} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi l}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{2\pi V t}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi l}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}\sin\frac{3}{\ldots}\right.$$

c étant le produit de la vitesse initiale par la longueur extrêmeme[nt] petite de la portion ébranlée, de sorte que l'expression générale [de] B_k devient ici

$$B_k = \frac{2c}{k\pi V}\sin\frac{k\pi l}{L}.$$

Le coefficient d'ordre k fait encore défaut quand le point d'attaq[ue] est à l'un des nœuds du son k. D'ailleurs les sons partiels ont re[la]tivement plus d'intensité que dans la corde pincée, le dénominate[ur] de B_k contenant seulement k au lieu que celui de A_k contenait [k^2]. Dans le piano, où la mollesse et l'élasticité du marteau prolonge[nt] le choc, la force des harmoniques varie d'après une loi plus com[-] plexe, k^3 intervenant alors selon M. von Helmholtz.

Cas d'une corde excitée par l'archet. — Sur le violon, quand l'[ar]chet est bien conduit, les sons partiels valent le 1/4, le 1/9, le 1/16 du son fondamental : le rapport des intensités des harmoniques [est] donc le même que dans une corde pincée en son milieu, sauf q[ue]

celle-ci ne présente que les sons impairs. Quant au mouvement de la corde, « on peut le décrire brièvement, en disant que le pied d de l'abcisse du sommet va et vient sur la ligne ab avec une vitesse

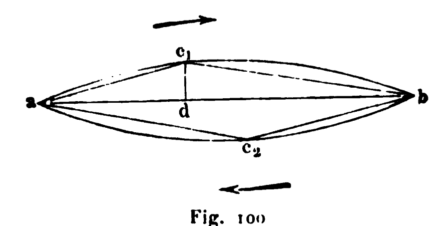


Fig. 100

constante, tandis que le sommet lui-même parcourt l'un après l'autre les deux arcs de parabole ac_1b et bc_2a, la corde étant tendue suivant les deux droites ac_1 et bc_1 (ou ac_2 et bc_2). »

Cas de l'expérience de Melde. — Dans le cas de l'expérience de Melde, la corde attachée d'une part à un point fixe, de l'autre à un diapason vibrant, doit remplir les conditions relatives aux extrémités :

$$\text{pour } x = 0, \quad y = 0,$$
$$\text{pour } x = L, \quad y = \alpha \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Si donc elle prend un mouvement pendulaire, synchrone à celui du diapason, $a = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} + B \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ étant toujours l'amplitude, on devra avoir

$$B = 0,$$
$$A \sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = \alpha, \qquad \text{avec } \lambda = V\tau;$$

et l'équation du mouvement sera

$$y = \alpha \frac{\sin 2\pi \frac{x}{\lambda}}{\sin 2\pi \frac{L}{\lambda}} \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

On aura des nœuds aux points $\frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots$

Si L est un multiple exact de $\frac{\lambda}{2}$, en d'autres termes si l'une des périodes de la corde coïncide avec celle du diapason, le dénominateur devient nul. L'amplitude sera donc alors, non pas infinie, mais maximum et très grande : l'énergie dépensée pour mettre la corde en mouvement étant empruntée au diapason, l'amplitude cessera de s'accroître quand la perte (dissémination du mouvement dans l'air et dans les pièces solides tenant la corde, production de chaleur par les frottements) compensera l'apport, lequel d'ailleurs épuiserait bientôt le mouvement du diapason, si celui-ci n'était pas entretenu électriquement.

373. Effet de la raideur des cordes. — Les lois théoriques des cordes vibrantes se vérifient très exactement sur des cordes longues, flexibles et fortement tendues ; mais si les cordes sont courtes, grosses et peu tendues, le nombre des vibrations réellement effectuées est toujours supérieur au nombre théorique, et d'autant plus que la *raideur* de la corde est plus grande.

Cette raideur agit, en effet, à peu près comme une certaine tension constante T_0 s'ajoutant au poids tendant T, de sorte que le nombre réel des oscillations N est donné par la formule

$$N^2 = \frac{g}{2Lp}(T + T_0),$$

ou

$$N^2 = n^2 + n_0^2,$$

n étant le nombre théorique relatif à une corde parfaitement flexible tendue par le poids effectivement employé, et n_0 le nombre des oscillations qu'une corde semblable exécuterait sous l'action d'un poids produisant le même effet que la raideur de la corde réelle.

Cette formule a été établie empiriquement par N. Savart au moyen du sonomètre vertical (369). Duhamel l'a justifiée théoriquement. Toutefois l'assimilation de la raideur à une tension constante n'est pas tout à fait exacte, et la formule ne doit être regardée que comme approximative.

A. Seebeck préfère l'expression

$$N = n\left(1 + \frac{R^2}{L}\sqrt{\frac{\pi E}{Tg}}\right),$$

qui met en évidence l'influence du coefficient d'élasticité E de la matière de la corde.

La correction est d'autant plus forte que la corde est plus grosse, plus courte, plus élastique.

CHAPITRE VII

VERGES VIBRANTES

374. Distinction entre les verges et les cordes. — *On* appelle verges en acoustique des tiges rigides, par opposition aux cordes que l'on suppose parfaitement flexibles. La rigidité absolue ne se rencontre pas plus que la flexibilité parfaite ; toutefois ces deux cas extrêmes méritent une étude spéciale, à cause de leur intérêt théorique et de leur importance pratique.

Les verges peuvent être le siège de vibrations longitudinales ou transversales ou tournantes (Chladni a nommé ainsi celles qui ont lieu en vertu de la torsion de la barre autour de son axe).

I. — VIBRATIONS LONGITUDINALES.

375. Vibrations longitudinales des verges. — *Lois.* — Un ébranlement parallèle à l'axe se propageant dans une colonne élastique suivant un mécanisme indépendant de la substance qui constitue cette colonne, les verges en vibrations longitudinales obéissent aux mêmes lois que les tuyaux sonores, comme l'a montré Chladni (1).

La section est indifférente tant que les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur.

Une verge libre aux deux bouts (2) se comporte de la même manière qu'un tuyau ouvert aux deux extrémités.

Une verge fixée à un bout et libre à l'autre est l'analogue d'un tuyau bouché.

(1) Chladni, *Acta Academiæ Moguntiacæ*, *Erfurd*. 1796 ; et *Traité d'acoustique*, p. 101.

(2) Ou fixée aux deux bouts.

riences : Chladni, Savart, Biot. — Pour faire vibrer une ɔngitudinalement, on la frotte dans le sens de la longueur ; doigts, ou mieux avec un morceau de drap, saupoudré phane si la verge est métallique, imbibé d'eau acidulée ɔpère sur du verre.

d la verge doit être libre aux deux bouts, on la soutient par un

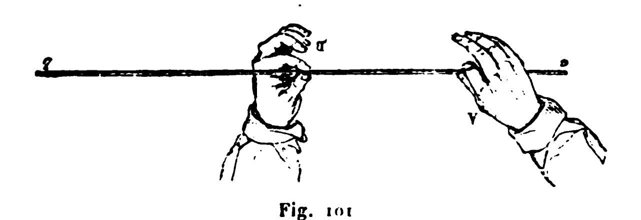


Fig. 101

ı l'on veut avoir un nœud, au milieu par conséquent (fig. 101) :herche à en tirer le son fondamental, au l'on désire l'octave.



Fig. 102

ue extrémité est alors un ventre ; le déplades molécules parallèlement à l'axe y est ım. Nous avons déjà vu (324) comment on ıdre manifeste le va-et-vient de la section . Savart [1] a mesuré l'amplitude de ce ıent au moyen d'un sphéromètre, et il a ju'en vibrant une verge s'allonge autant ; une traction de plusieurs milliers de kilo-:s. L'allongement peut même aller jusqu'à re; et c'est une circonstance dont il faut npte dans les calculs de résistance des ma- : on ne devra jamais oublier qu'un faible pété peut produire des déformations que ɔnnerait pas une force incomparablement ıre appliquée en une seule fois [2]. Ainsi nt vibrer un peu fortement une verge de

RT, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXV, 12, 138 et

:ident du pont d'Angers, dont les câbles en fer se t sous le pas cadencé d'un régiment, est demeuré tristement célèbre.

cristal, on la verra se briser en un grand nombre de fragments par des cassures perpendiculaires à l'axe.

Aux nœuds le mouvement est nul, mais la condensation est maximum. Biot [1] a montré le changement de densité aux nœuds par une expérience devenue justement classique et qui s'appuie sur le fait suivant que nous étudierons plus loin : Si entre deux spaths croisés et éteignant toute lumière on place une lame de verre ordinaire, l'obscurité persiste. Mais si, par un procédé quelconque, on détruit dans ce verre l'égalité de répartition des molécules, si par exemple on fléchit la lame entre les doigts, la lumière reparaît. Biot dispose donc entre deux spaths croisés une longue lame de verre de manière que le faisceau lumineux concentré par une lentille traverse cette lame tout près de l'endroit où elle est

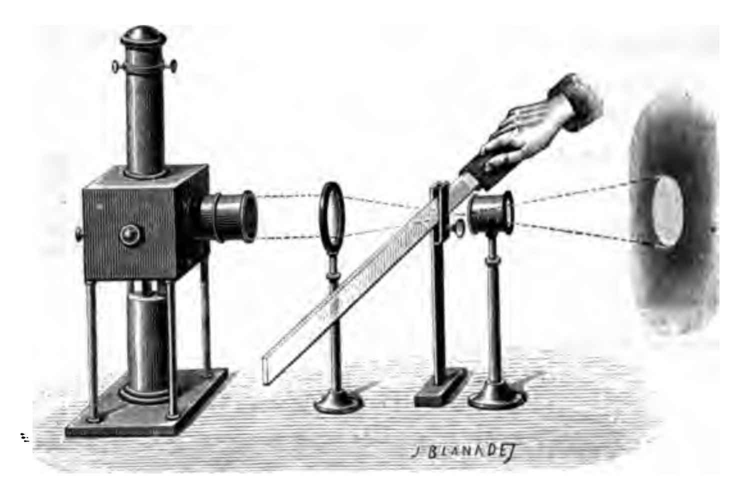


Fig. 103

saisie dans la pince qui la supporte ; la lumière reste éteinte. Fait-on vibrer la verge, l'oreille entend un son et en même temps l'œil voit une tache brillante illuminer l'écran. Cette tache, bien qu'elle semble persister tant que dure le son, est en réalité intermittente : l'intensité lumineuse, maximum quand la condensation ou la dilatation est elle-même maximum, s'annule chaque fois que la variation de densité, changeant de signe, passe par zéro. Le phénomène

(1) Biot, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XIII, 386 ; 1820.

est d'ailleurs d'autant moins marqué qu'on s'éloigne davantage d'un nœud, et il disparaît complètement à un ventre, où la condensation est nulle.

Applications à la musique et à la mesure de la vitesse du son dans les solides. — Les sons que donnent les verges vibrant longitudinalement ne sont pas dénués de charme, et Marloye a construit avec des verges de bois, implantées d'un bout dans un soc et libres de l'autre, une sorte de harpe à frottement, dont un exécutant habile pourrait sans doute tirer parti.

Mais l'application la plus importante que l'on ait faite de ce genre de vibrations est leur emploi à la mesure de la vitesse du son dans les corps solides.

Chladni ([1]), partant de ce fait que les vitesses dans deux verges quelconques, une tige solide et une colonne d'air par exemple, de même longueur, sont dans le même rapport que les hauteurs des sons rendus par ces deux verges, dressa le tableau suivant des vitesses de propagation du son dans les solides, la vitesse dans l'air étant prise pour unité : étain, à peu près 7 1/2; argent, 9; cuivre, 12; fer, verre, 17; bois divers, de 11 à 18.

M. Kundt ([2]), en ajustant à son tube à poussière (367) des verges de différentes natures, a pu déterminer plus facilement et plus exactement ces vitesses relatives; il a trouvé ainsi :

Laiton	10,87
Cuivre	11,96
Acier	15,34
Verre	15,25

Ces nombres sont presque identiques à ceux que Wertheim avait déduits de mesures des coefficients d'élasticité (348) ([3]).

376. Vibrations longitudinales des cordes. — On peut faire vibrer longitudinalement une corde de la même manière qu'une tige. C'est alors l'élasticité et non plus la tension de la

([1]) Chladni, *Traité d'acoustique*, 318.
([2]) Kundt, *Pogg. Ann.*, CXXVII, 497; 1866.
([3]) On conçoit sans peine comment inversement les vibrations longitudinales permettent d'obtenir les coefficients d'élasticité (152).

corde qui intervient. Le son fondamental, comme pour une verge fixée aux deux bouts, est donné par la formule

$$N_l = \frac{V}{2L},$$

ou encore, V étant remplacé par sa valeur connue (348),

$$N_l = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{gE}{p}}.$$

Si l'on rapproche cette expression de celle qui représente le nombre des vibrations du son fondamental de la corde vibrant transversalement (369)

$$N_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

en remarquant que $p = \frac{P}{LS}$, on a

$$\frac{N_l}{N_t} = \frac{\sqrt{\frac{gES}{PL}}}{\sqrt{\frac{gT}{PL}}} = \sqrt{\frac{ES}{T}},$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{E}{\tau}},$$

τ étant la tension par unité de surface $\frac{T}{S}$,

ou

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{L}{\lambda}},$$

λ étant l'allongement que la corde de longueur L éprouve sous la tension T, allongement défini, d'après l'équation (9) du paragraphe 142, par $\lambda = \frac{TL}{ES}$,

et, sous l'une ou l'autre de ces deux formes, on voit que le son dû

aux vibrations longitudinales est beaucoup plus élevé que celui qui résulte des vibrations transversales.

Les sons que l'on tire des cordes excitées longitudinalement sont en effet remarquables par leur acuité [1].

II. — VIBRATIONS TRANSVERSALES.

377. Théorie. — Le problème des vibrations transversales, attaqué déjà par D. Bernoulli [2], a été résolu pour la première fois par Euler [3]; il fut ensuite repris et développé par Riccati [4], Cauchy [5], Poisson [6], et plus récemment par Strehlke [7], Lissajous [8] et Seebeck [9].

Quand une verge élastique est fléchie perpendiculairement à sa longueur, les forces élastiques longitudinales, développées dans chaque section droite de la barre, contrebalancent à l'état d'équilibre l'effet des actions transversales (151), et déterminent avec celles-ci à l'état dynamique le mouvement de la verge.

Prenons pour axe des x la direction du filet moyen de la verge en repos, et pour axe des y la perpendiculaire en un point de cette droite dans le plan de flexion. Supposons toujours l'épaisseur de la verge petite par rapport à sa longueur et bornons-nous à de petites déformations : le mouvement sera alors le même pour tous les points d'une même section droite, et il suffira de considérer le filet moyen; chaque point x de ce filet oscillera suivant une petite droite perpendiculaire à la direction naturelle de la fibre moyenne, y sera l'écart à l'époque t. Considérons le prisme élémentaire li-

[1] Pour étudier les vibrations longitudinales d'une corde il est bon de remplacer les chevalets du sonomètre par des mâchoires garnies de plomb, afin de limiter plus exactement la longueur de la portion en mouvement.

[2] D. Bernoulli, *Comment. Acad. Petrop.*, XIII, 186; 1741.

[3] Euler, *Act. Acad. Petrop.* pro anno 1779; pars I, 103.

[4] Riccati, *Memorie di mat. e fis. della Societa Italiana*, I, 484, Vérona; 1782.

[5] Cauchy, *Exercices de mathématiques;* 1827.

[6] Poisson, *Mémoires de l'Institut;* 1828; et *Traité de mécanique*, 2e éd., II, 368; 1833.

[7] Strehlke, *Pogg. Ann.*, XXVII, 505, et XXVIII, 512; 1833.

[8] Lissajous, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXX, 385; 1833.

[9] A. Seebeck, *Abhand. d. math. phys. Clas. d. k. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch.*, 133. Leipzig; 1849.

mité par les deux sections droites x et $x+dx$; le mouvement transversal de ce prisme est réglé par l'équation

$$P-\left(P+\frac{dP}{dx}dx\right)=SD\,dx\,\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{SD}\frac{dP}{dx}, \tag{1}$$

P étant la force élastique tangentielle (force de glissement, effort tranchant) dans la section x, S l'aire de cette section que nous supposerons uniforme tout le long de la barre, et D la densité de la matière constitutive de celle-ci.

Pour déterminer la force P, appliquons le théorème des moments (58) par rapport à un axe perpendiculaire au plan de flexion et passant par le centre de gravité du prisme élémentaire. La somme des moments des forces P est $-Pdx$. Le moment des forces élastiques longitudinales pour la section x est $\frac{EI}{R}$ (¹), E étant toujours le coefficient d'élasticité du corps, I le moment d'inertie de la section $\int r^2 dS$, et R le rayon de courbure de la verge au point x, dont l'inverse peut être pris égal à $\frac{d^2y}{dx^2}$; pour la section voisine ce sera $EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}dx\right)$, et pour les deux ensemble $EI\frac{d^3y}{dx^3}dx$. On a donc

$$-P+EI\frac{d^3y}{dx^3}=0, \text{(²)}$$

(¹) Nous avons trouvé en effet pour moment de ces forces dans le cas d'une barre prismatique (151)

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} Eh\frac{d\theta}{dx}y^2dy=E\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} h\,dy\,y^2\frac{d\theta}{dx}=\frac{EI}{R}.$$

(²) Nous négligeons ici, au deuxième membre, le terme ID $\frac{d^3y}{dx\,dt^2}$, provenant de l'inertie due aux petites rotations alternatives des sections transversales de la verge que l'axe en se courbant incline en des sens alternativement opposés, inertie du même ordre que les quantités négligées plus haut.

ou

$$P = EI\frac{d^3y}{dx^3}\text{[1]}. \qquad (2)$$

En portant cette valeur dans (1), et en posant

$a^2 = \frac{E}{D}$ (a vitesse des vibrations longitudinales)

et $b^2 = \frac{I}{S}$ (b rayon de gyration de la section autour d'un axe mené par son centre de gravité perpendiculairement au plan de flexion),

on obtient l'équation des verges vibrantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2b^2\frac{d^4y}{dx^4} = 0. \qquad (3)$$

Cherchons si un mouvement pendulaire d'amplitude variable u peut satisfaire à cette relation ; posons en conséquence

$$y = u\cos\left(\frac{ab}{L^2}m^2t + \varepsilon\right), \qquad (4)$$

L étant la longueur de la barre et m un nombre abstrait qu'il s'agit de déterminer. En portant cette valeur de y dans (3), on a

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{m^4}{L^4}u. \qquad (5)$$

Si $u = e^{p\frac{mx}{L}}$ est une solution particulière, p est une des quatre ra-

[1] C'est le théorème fondamental pour l'étude de la résistance des matériaux : la force tangentielle totale dans une direction transversale quelconque est égale à la dérivée, par rapport à la coordonnée longitudinale, du moment de flexion autour d'une droite tracée sur la section perpendiculairement à cette direction.

cines quatrièmes de l'unité, $+1$, -1, $+i$, $-i$; la solution complète est donc

$$u = \alpha \cos m\frac{x}{L} + \beta \sin m\frac{x}{L} + \gamma e^{\frac{mx}{L}} + \delta e^{-\frac{mx}{L}}, \qquad (6)$$

ou, si l'on introduit les cosinus et les sinus hyperboliques (¹), et si l'on pose pour abréger $x' = m\frac{x}{L}$,

$$u = A(\cos x' + \operatorname{coh} x') + B(\cos x' - \operatorname{coh} x') + C(\sin x' + \operatorname{sih} x') + D(\sin x' - \operatorname{sih} x').$$

L'expression de u contient donc quatre constantes, les trois rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, et m, que détermineront les quatre conditions initiales (deux à chaque bout).

Nous examinerons successivement les six cas qui peuvent se présenter suivant que chaque extrémité est *libre*, ou *fixée* (encastrée dans une paroi inébranlable, à laquelle elle reste constamment perpendiculaire), ou *appuyée* (butée contre un obstacle qui ne gêne point sa flexion).

1° *Les deux bouts libres.* — Sur une section libre le moment d'élasticité $\frac{EI}{R}$ est constamment nul et aussi la force de glissement P; on doit donc avoir à toute époque $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

Par conséquent, il faut d'abord que, pour $x = 0$, $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$, ce qui exige que $B = 0$ et $D = 0$, de sorte que l'équation (8) se réduit à

$$u = A(\cos x' + \operatorname{coh} x') + C(\sin x' + \operatorname{sih} x').$$

(¹) Ces fonctions sont définies, comme l'on sait, par les équations

$$\operatorname{coh} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$\operatorname{sih} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

d'où la relation fondamentale

$$\operatorname{coh}^2 x - \operatorname{sih}^2 x = 1.$$

Il faut en outre que $\frac{d^2u}{dx^2}$ et $\frac{d^3u}{dx^3}$ s'annulent encore pour $x=l$ ou pour $x'=m$, ce qui donne (¹)

$$\left.\begin{array}{l} A(-\cos m+\operatorname{coh} m)+C(-\sin m+\operatorname{sih} m)=0, \\ A(\ \ \sin m+\operatorname{sih} m)+C(-\cos m+\operatorname{coh} m)=0, \end{array}\right\}$$

équations dont la compatibilité exige que

$$(\operatorname{coh} m-\cos m)^2=\operatorname{sih}^2 m-\sin^2 m,$$

ou

$$\cos m \operatorname{coh} m=1. \qquad (8)$$

Telle est l'équation qui détermine les valeurs de m convenant à la question (²).

Si cette équation est satisfaite, les deux équations de condition fournissent pour le rapport $\frac{C}{A}$ une seule et même valeur qui, substituée dans l'expression précédente de u, donne (à un facteur constant près, H)

$$=(\cos m-\operatorname{coh} m)\left(\cos\frac{mx}{l}+\operatorname{coh}\frac{mx}{l}\right)+(\sin m+\operatorname{sih} m)\left(\sin\frac{mx}{l}+\operatorname{sih}\frac{mx}{l}\right);$$

et la solution harmonique simple cherchée est, avec cette valeur de u,

$$y=\mathrm{H}u\cos\left(\frac{ab}{\mathrm{L}^2}m^2t+\varepsilon\right). \qquad (9)$$

(¹) Nous rappellerons que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{coh}x=\operatorname{sih}x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sih}x=\operatorname{coh}x,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{coh}x=\operatorname{coh}x, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sih}x=\operatorname{sih}x,$$

et ainsi de suite.

(²) POISSON, *loc. cit.*

Le nombre des vibrations de ce mouvement est

$$N = \frac{ab}{2\pi L^2} m^2. \tag{10}$$

Ainsi,

1° Une verge libre aux deux bouts peut rendre une série de sons dont les nombres de vibrations sont entre eux comme les carrés des nombres définis par l'équation (8). Les valeurs de m satisfaisant à cette équation étant

$$(3{,}011)\frac{\pi}{2}, \quad (5{,}000)\frac{\pi}{2}, \quad (7{,}000)\frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

les sons considérés varient à très peu près comme les carrés des nombres impairs successifs :

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} \frac{(2n+1)^2}{4}, \tag{11}$$

cette loi étant d'autant plus approchée que l'ordre n du son est plus élevé ;

2° Un son d'ordre donné est inversement proportionnel au carré L^2 de la longueur de la verge, directement proportionnel au rayon de giration b et par conséquent à l'épaisseur (ou au diamètre) de la verge et indépendant de la largeur, directement proportionnel enfin à la vitesse a des vibrations longitudinales dans la substance considérée ;

3° Les nœuds sont placés aux points x pour lesquels $u = 0$ [1], c'est-à-dire, sur une barre de longueur 1, aux points

Son.	Nœuds.								
1	0,224	0,776							
2	0,132	0,500	0,868						
3	0,094	0,357	0,643	0,906					
..	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	$\frac{1{,}322}{4n+2}$	$\frac{4{,}982}{4n+2}$	$\frac{9{,}001}{4n+2}$	.....	$\frac{4k-3}{4n+2}$	.....	$\frac{4n-7{,}001}{4n+2}$	$\frac{4n-2{,}982}{4n+2}$	$\frac{4n+0{,}678}{4n+2}$.

(1) Les points de recoupement ne coïncident pas avec les points d'inflexion, lesquels correspondent aux nœuds de la barre fixée-fixée ; mais, sauf pour les nœuds extrêmes, les deux sortes de points sont très voisins.

Dès que le son est d'ordre n un peu élevé, et quand le rang k des nœuds est supérieur à 3 et inférieur à $n-3$, c'est-à-dire pour toute la région moyenne de la verge, les nœuds sont également espacés et la distance de deux nœuds consécutifs est, la longueur L de la verge remise en évidence,

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \qquad (12)$$

Les ventres, en dehors des extrémités o et 1, sont placés aux points où u est maximum :

Son.	Nœuds.
1	0,500 (où l'amplitude est 0,608, l'excursion aux extrémités étant 1)
2	0,308 et 0,692 (où l'amplitude est 0,664)
3	0,220 0,780 (où l'amplitude est 0,935) et 0,500 (où elle est moindre).

2° *Les deux bouts fixés.* — La fixité d'une extrémité est définie par les deux conditions $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=0$. Quand l'extrémité était libre nous avions $y''=0$ et $\frac{dy''}{dx}=0$, y satisfaisant d'ailleurs à l'équation différentielle (3). Le cas actuel se ramène donc immédiatement au précédent. La même équation

$$\cos m \operatorname{coh} m = 1 \qquad (8)$$

règle la succession des nombres m, dont les carrés déterminent la suite des sons que peut rendre la verge ; on a donc encore très sensiblement, sauf pour le son fondamental,

$$N = \frac{\pi}{2}\frac{ab}{L^2}\frac{(2n+1)^2}{4}. \qquad (11)$$

Les nœuds, en dehors des deux extrêmes coïncidant avec les bouts mêmes, sont placés comme il suit :

Son.	Nœuds.							
1	»							
2	0,500							
3	0,359	0,641						
..	....	....	....	....	....	....	....	....
n	$\frac{5,018}{4n+2}$	$\frac{8,999}{4n+2}$	.....	$\frac{4k+1}{4n+2}$	.....	$\frac{4n-6,999}{4n+2}$	$\frac{4n-3,018}{4n+2}$.	

La distance de deux nœuds consécutifs vers le milieu de la verg rendant un son d'ordre un peu élevé, est encore

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \qquad (12)$$

3° *Un bout libre, un bout fixé.* — Les coefficients A et C s'an nulant alors, u prend la forme

$$u = (\cos m + \text{coh}\, m)\left(\cos\frac{mx}{l} - \text{coh}\frac{mx}{l}\right) + (\sin m - \text{sih}\, m)\left(\sin\frac{mx}{l} - \text{sih}\right.$$

et y peut encore être représenté par un mouvement harmoniq simple (9), m étant défini par l'équation

$$\cos m \,\text{coh}\, m = -1.$$

Les racines de cette équation étant

$$(1,194)\frac{\pi}{2}, \quad (2,989)\frac{\pi}{2}, \quad (5,000)\frac{\pi}{2}, \quad (7,000)\frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots, \quad (2n+1$$

les différents sons que peut rendre la verge, à l'exception des de premiers, sont encore entre eux sensiblement comme la suite carrés des nombres impairs,

$$N = \frac{\pi}{2}\frac{ab}{L^2}\frac{(2n-1)^2}{4}; \ (^1) \qquad (11)$$

Mais le son fondamental de la barre libre-fixée est au s fondamental de la barre libre-libre ou fixée-fixée, comm $(1,194)^2 : (3,011)^2 = 1 : 6,36$, soit plus de deux octaves et dem au-dessous.

(1) Si la barre n'était pas suffisamment mince, l'inertie rotatoire pourr amener un abaissement sensible des sons élevés ; la hauteur exacte étant effet $N' = N\left[1 - \left(m + \frac{m^2}{2}\right)\frac{b^2}{L^2}\right]$, le terme en $\frac{b^2}{L^2}$ ne serait plus négligeable po les grandes valeurs de m (Lord Rayleigh, *loc. cit.*, I, 239).

Les nœuds, en dehors de l'extrémité fixe, se placent aux distances suivantes du bout libre :

Son.	Nœuds.							
1	»							
2	0,226							
3	0,132	0,500						
4	0,094	0,356	0,644					
..	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	$\frac{1,322}{4n-2}$	$\frac{4,982}{4n-2}$	$\frac{9,001}{4n-2}$	.....	$\frac{4k-3}{4n-2}$	.....	$\frac{4n-10,999}{4n-2}$	$\frac{4n-7,018}{4n-2}$.

Quand le son est élevé, vers le milieu de la barre les nœuds sont équidistants de

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \qquad (12)'$$

4° *Un bout libre, un bout appuyé.* — Dans ces conditions, la verge se comporte comme une demi-verge libre aux deux bouts vibrant suivant un mode pair, avec un nœud au milieu.

5° *Un bout fixé, un bout appuyé.* — Les vibrations de la verge sont alors les mêmes que celles d'une demi-barre fixée aux deux bouts, vibrant avec un nœud central.

6° *Les deux bouts appuyés.* — Les conditions analytiques qui traduisent l'appui sont $y = 0$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, le moment d'élasticité devant être nul sur la tranche extrême. Il en résulte d'abord $A = 0$ et $B = 0$, puis $C - D = 0$, et $\sin m = 0$; de sorte que la solution, la seule qu'Euler ait établie complètement, est

$$y = H \sin \frac{n\pi x}{L} \cos\left(\frac{n^2\pi^2 ab}{L^2} t - \varepsilon\right),$$

n étant un nombre entier quelconque.

La verge présente alors les formes d'une corde vibrante, se partageant en n segments égaux qui vibrent à l'unisson :

$$D = \frac{L}{n}. \qquad (12)''$$

Mais la loi de succession des sons est différente, les nombres d vibrations variant comme les carrés des nombres entiers cons cutifs,

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} n^2. \qquad (12)''$$

Loi de Lissajous. — Quelles que soient les conditions aux extr mités, si l'on compare, pour les sons d'ordre un peu élevé, nombre N des vibrations à la distance D des nœuds intermédiaire on a

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{D^2}.$$

Chaque internœud vibre comme une lame de même longueur do les deux extrémités seraient appuyées; et le nombre des vibration toutes choses égales d'ailleurs, est inversement proportionnel au car de la distance D *entre deux nœuds consécutifs* [1].

L'influence des extrémités ne s'exerce donc pas sensiblement s la partie intermédiaire de la lame, qui se comporte de même da tous les cas.

Propagation du mouvement transversal dans une verge. — To en négligeant des quantités sans importance, nous n'en avons p moins rencontré dans la théorie des vibrations transversales d verges une complication plus grande que dans la théorie d vibrations transversales des cordes. La raison de l'extrême simpl cité de celle-ci réside, comme le fait remarquer lord Rayleigh [2] en ce fait que les ondes du type harmonique se propagent da la corde avec une vitesse indépendante de la longueur d'ond de sorte qu'une onde quelconque y voyagera sans altération. Da les verges, la constante de l'équation différentielle (3) ne représent plus une vitesse.

Soit un mouvement harmonique

$$y = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

(1) Lissajous, *loc. cit.*, 408.
(2) Lord Rayleigh, *loc. cit.*, I, 246.

où, la vitesse étant mise en évidence au moyen de la relation fondamentale $\lambda = V\tau$ [1],

$$y = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x),$$

mouvement transversal entretenu à l'origine, et se propageant dans la verge sous la forme d'un train d'ondes identiques. Pour satisfaire à l'équation (3), ce train doit marcher avec la vitesse

$$V = \frac{2\pi ab}{\lambda},$$

inversement proportionnelle à λ.

Une onde complexe, formée de la superposition de plusieurs mouvements simples, se déformera donc en se transmettant. Soient par exemple deux mouvements vibratoires de même amplitude et de longueurs d'ondes très peu différentes, se propageant ensemble dans un même milieu,

$$y = \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau'} - \frac{x}{\lambda'}\right) = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x) + \cos\frac{2\pi}{\lambda'}(V't - x).$$

Cette équation pouvant s'écrire

$$y = 2\cos\pi\left[t\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) - x\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\right]\cos\pi\left[t\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'}\right) - x\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\right],$$

on voit que la progression simultanée de ces deux mouvements harmoniques se présente comme un train d'ondes de même période $\tau_1 = 2\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'}$, de même longueur d'onde $\lambda_1 = 2\frac{\lambda\lambda'}{\lambda + \lambda'}$, mais d'amplitudes oscillant lentement entre 0 et 2, de sorte que le train entier est formé d'une série de groupes séparés par des intervalles relativement libres (battements). Dans une corde vibrant transversalement, comme dans un cylindre élastique vibrant longitudinalement, λ varie proportionnellement à τ, et les différents groupes

[1] Dans cette relation, qui est à proprement parler la définition de λ, on doit regarder la période τ comme donnée (c'est la caractéristique du son considéré), et la vitesse de propagation V comme une fonction de τ et par suite de $\lambda = V\tau$.

avancent avec la même vitesse que le train lui-même. Il n
plus de même dans une verge animée de vibrations transve
dont la vitesse de propagation est fonction de la longueur d
La position au temps t du milieu du groupe qui se trouvait
lement à l'origine est donnée par l'équation

$$t\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau'}\right)-x\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)=0,$$

la vitesse du groupe est donc

$$U=\frac{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau'}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}}=\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\frac{1}{\lambda}},$$

ou, d'après la relation fondamentale $\tau=\frac{\lambda}{V}$,

$$U=\frac{d\frac{V}{\lambda}}{d\frac{1}{\lambda}}.$$

Si donc $V=K\lambda^{-1}$,

$$U=2V. \text{ (1)}$$

(1) D'une manière générale, si la vitesse du train V varie comme λ^n, l
du groupe est

$$U=(1-n)V.$$

A la surface d'une eau profonde où $V=K\lambda^{\frac{1}{2}}$, $U=\frac{1}{2}V$. On a remarqué
depuis longtemps que lorsqu'un groupe d'ondes avance sur l'eau, la vi
groupe est moindre que celles des ondes qui le constituent : celles-ci pa
avancer à travers le groupe, s'éteignant quand elles approchent de sc
Le tableau suivant, emprunté à lord Rayleigh, résume les cas particu
plus intéressants.

$V=K\lambda$	$U=0$	Mouvements pendulaires (Reynold, *Nature*, 23 Au
$V=K\lambda^{\frac{1}{2}}$	$U=\frac{1}{2}V$	Ondes liquides pesantes.
$V=K\lambda^{0}$	$U=V$	Ondes aériennes.
$V=K\lambda^{-\frac{1}{2}}$	$U=\frac{3}{2}V$	Ondes liquides capillaires (W. Thomson, *Phil. Mag.* N
$V=K\lambda^{-1}$	$U=2V$	Ondes de flexion.

378. Expériences. — Les vibrations transversales des verges ont été étudiées expérimentalement dans chacun des cas distingués plus haut.

1° *Les deux bouts libres.* — Poisson, ayant traité spécialement ce cas, détermina le rapport des sons fondamentaux rendus par une verge libre aux deux bouts et vibrant d'abord transversalement, puis longitudinalement, et il pria Savart de mesurer expérimentalement ce même rapport.

Voici le calcul très simple de Poisson.

Le son fondamental d'une verge vibrant transversalement est

$$N = \frac{(3{,}011)\pi^2}{8} \frac{ab}{L^2}.$$

Pour une verge rectangulaire d'épaisseur e et de largeur h, b^2 ou $\frac{I}{S}$ est égal à $\frac{he^3}{12} : he = \frac{e^2}{12}$; donc $b = \frac{e}{2\sqrt{3}}$. Pour une verge circulaire de diamètre e, $b^2 = \frac{\pi e^4}{64} : \frac{\pi e^2}{4} = \frac{e^2}{16}$; donc $b = \frac{e}{4}$.

Une verge rectangulaire vibrant transversalement rend donc le son fondamental

$$N_T = 1{,}028 \frac{ae}{L^2},$$

et une verge circulaire

$$N'_T = 0{,}890 \frac{ae}{L^2}.$$

D'ailleurs pour toute verge vibrant longitudinalement le son fondamental est

$$N_L = \frac{a}{2L}.$$

On a donc

$$\frac{N_T}{N_L} = 2{,}056 \frac{e}{L},$$

et

$$\frac{N'_T}{N_L} = 1{,}780 \frac{e}{L}.$$

Savart a mesuré le nombre des vibrations longitudinales sur des verges de près de 1 mètre, et en a conclu le nombre des vibrations longitudinales et par suite celui des vibrations transversales qu'effectueraient ces mêmes verges réduites au 1/8 de leur longueur et il l'a comparé au nombre des vibrations transversales qu'accomplissaient effectivement ces verges réduites au 1/8. Nous transcrirons seulement deux des sept résultats ainsi obtenus :

a) Verge parallélipipédique en laiton

$$L = \frac{0^m,825}{8} \quad e = 3^{mm},92 \quad N_L = 34133 \quad N_T \text{calculé } 2668, \text{ observé } 2667.$$

b) Verge cylindrique en laiton

$$L = \frac{0^m,825}{8} \quad e = 4^{mm},8 \quad N_L = 34133 \quad N_T \text{calculé } 2829, \text{ observé } 2844.$$

Antérieurement, Chladni avait observé les sons successifs rendus par une même verge (donnant comme son fondamental ut_{-1} quand elle était fixée par un bout et libre à l'autre); et il avait trouvé les notes suivantes, dont les nombres de vibrations sont entre eux comme les nombres placés au-dessous :

$sol_2\sharp$	$ré_4$	$ré_5$	$si_5\flat$	fa_6+	si_6	...
3^2	5^2	7^2	9^2	11^2	13^2	...

L'intervalle $sol_2\sharp : ut_{-1} = 6,25$ diffère peu du rapport théorique 6,36. Quant à la série des sons successifs observés par Chladni elle est exacte à partir du deuxième terme; le premier terme se est un peu faible : 3^2 ou 9 au lieu de $(3,011)^2$ ou 9,066.

Ces déterminations ont été reprises par M. Mercadier (¹) à l'a de la méthode graphique qui lui a permis de vérifier les lois tenues dans la formule $N = K\frac{e}{L^2}$, où K désigne une constante la valeur théorique est 102,78 V. Pour l'acier K vaut en 532 000 (le centimètre étant l'unité de longueur).

(¹) Les vibrations de la lame étaient entretenues électriquement c celles du diapason chronographique (MERCADIER, *Journal de physique*, (189; 1884).

Strehlke et Lissajous ont mesuré avec soin la position des nœuds. Nous citerons, à titre d'exemple, les nombres relevés par Lissajous sur une lame de laiton longue de 500 millimètres et portant à sa surface une division millimétrique très soignée. Comme on obtenait la distance D de deux nœuds moyens consécutifs en prenant l'intervalle de deux nœuds éloignés et en le divisant par le nombre des internœuds, cette distance s'est trouvée d'autant plus exactement déterminée que le nombre des nœuds était plus grand. La distance d_1 du nœud le plus voisin de l'extrémité à cette extrémité même était mesurée directement aux deux bouts, ainsi que la distance du nœud suivant à l'extrémité : on en a déduit par soustraction la distance d_2 du premier nœud au deuxième. Dans la première colonne est inscrit le nombre des nœuds, égal à $n+1$, n étant toujours le rang du son.

Nombre des nœuds.	d_1 calculée.	d_1 observée.		d_2 calculée.	d_2 observée.		D calculée.	D observée.
5	36,4	36,8	36,9	102,4	101,3	101,7	111,1	111,6
6	30,0	30,0	30,0	83,6	83,0	83,0	90,9	91,0
7	25,4	25,5	25,5	70,7	70,3	70,3	76,9	76,9
8	22,0	22,2	22,2	61,3	60,8	61,0	66,6	66,6
9	19,4	19,6	19,6	54,1	52,5	53,6	58,8	58,8
10	17,3	17,5	17,6	48,4	47,9	47,9	52,6	52,6
11	15,7	15,8	16,0	43,8	43,4	43,2	47,6	47,7
12	14,3	14,4	14,6	40,0	39,6	39,4	43,5	43,5
13	13,2	13,4	13,4	36,8	36,3	36,5	40,0	40,0
14	12,2	12,3	12,4	34,0	33,8	33,6	37,0	37,0

Pour soutenir la verge dans ces expériences, on la fait reposer

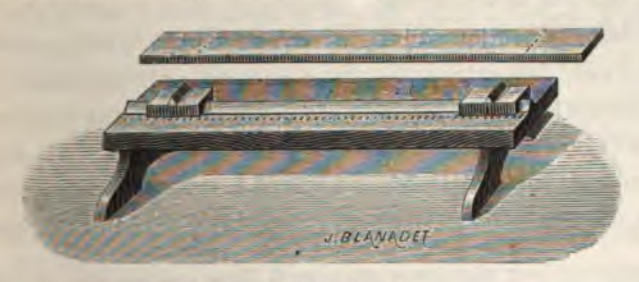


Fig. 104

deux lignes nodales sur les arêtes de deux couteaux en liège, supportent de lourds pieds en plomb doublés de drap; et on

la maintient en appuyant du doigt au-dessus de l'un des cou teaux. La verge est attaquée de champ à ce bout avec un archet ou frappée en un ventre avec un petit marteau; et si l'on a pro jeté à la surface un peu de sable, selon la méthode de Chladni, o le voit se rassembler sur les lignes nodales et les dessiner nett ment, ce qui permet d'abord de rectifier, au besoin, la positio des lignes d'appui, lesquelles doivent coïncider avec des nodale pour ne pas contrarier le mouvement de la verge. Il est ensuit facile d'effectuer les mesures voulues.

2° *Les deux bouts fixés.* — Chladni avait reconnu que les son émis par une verge fixée aux deux bouts sont absolument les même que si les deux bouts sont libres, malgré la grande différence de courbures. Lissajous mesura les distances des nœuds pour les dix- sept premiers sons et les trouva tout à fait conformes à la théorie, quand il eut pris soin d'encastrer complètement chaque extrémité dans un bloc de métal terminé par une face plane normale à la lame ([1]).

3° *Un bout libre, un bout fixé.* — Chladni donne pour ce cas la suite des sons :

	ut_{-1}	sol_2 ♯	$ré_4$	$ré_5$ —	si_5 ♭	fa_6 +	. . .
ou	1	6 1/4	17 1/2	34 1/4	56 1/2	84	. . .
ou	$(1,2)^2$	3^2	5^2	7^2	9^2	11^2	. . .

Théoriquement, les sons à partir du troisième se succèdent en effet comme les carrés des nombres impairs, le son fondamenta étant $(1,194)^2$ et le deuxième $(2,989)^2$.

Pour déterminer les nœuds, Lissajous plaçait la verge horizonta lement, l'une des extrémités fixée comme précédemment, tandi qu'un chevalet de liège soutenait la lame suivant une ligne nodale il pouvait alors attaquer l'extrémité libre à l'archet, et il constata que les nœuds intermédiaires occupent les mêmes places que dan les deux cas précédents. Les nœuds extrêmes sont l'un au bout fixé

([1]) L'archet ne peut plus alors attaquer la lame que par côté, ce qui tend produire des vibrations tournantes. Il y a là une difficulté qui arrête mêm entièrement, si, par hasard, les lignes nodales du son que l'on veut produi se confondent avec les lignes nodales transversales de l'un des modes vibrations tournantes.

l'autre à une distance du bout libre égale à celle qui l'en séparerait sur une lame entièrement libre et de pareille longueur; les deuxièmes nœuds sont à mêmes distances des extrémités voisines; au delà, les nœuds sont également espacés.

4° *Un bout libre, un bout appuyé.* — Une verge libre-appuyée équivaut à la moitié d'une verge libre-libre vibrant avec un nœud au milieu.

Chladni trouve en effet :

ré$_2$	*si*$_3$ ♭	*si*$_4$ —	*sol*$_5$ ♯	*ré*$_6$ ♯ +	*la*$_6$ . . . ,
5^2	9^2.	13^2	17^2	21^2	25^2 . . . .

le son fondamental étant à celui de la même verge libre-libre comme $5^2 : 6^2$; le rapport exact est $5^2 : 2^2\ (3{,}011)^2$.

De son côté, Lissajous a vérifié que la position des nœuds est la même que dans une lame libre aux deux bouts et de longueur double. La condition de l'appui est pratiquement assez difficile à réaliser : il pressait la lame contre un mur en interposant un liège d'un centimètre d'épaisseur.

5° *Un bout fixé, un bout appuyé.* — L'expérience a de même prouvé qu'une verge fixée-appuyée se comporte identiquement comme chacune des moitiés d'une verge fixée-fixée de longueur double à nœud médian, et par conséquent donne les mêmes sons et présente les mêmes nœuds que libre-appuyée.

6° *Les deux bouts appuyés.* — Chladni a confirmé dans ce cas les résultats de l'analyse d'Euler, aussi bien quant à l'équidistance des nœuds que quant à la hauteur des sons, pour lesquels il obtint la série suivante :

fa$_1$ ♯	*fa*$_3$ ♯	*sol*$_4$ ♯	*fa*$_5$ ♯	*ré*$_6$	*sol*$_6$ . . . ,
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2 . . . ,

en remarquant que le son fondamental est à celui du premier cas comme $2^2 : 3^2$.

379. Vibrations complexes ; caléidophone. — Les vibrations d'une verge ne s'effectuent généralement pas dans un plan ;

mais son mouvement peut être considéré comme résult superposition de deux mouvements vibratoires rectan obéissant aux lois que nous venons d'établir. Wheatstone l'on doit la découverte de ce fait, employait un appareil t nieux et très simple, le *caléidophone* (καλός beau, εἶδος f φωνή voix), série de verges implantées verticalement d planchette solide, et portant à leur extrémité supérieure u sphère (perle étamée, boule d'acier poli) sur laquelle la forme un point brillant. Vient-on à ébranler une de ce son point lumineux dessine une courbe qui semble cor qui, en général, se déforme graduellement d'après une l minée. Avec des verges longues et déliées, favorables supérieurs, des sinuosités variées se superposent à la cou cipale et donnent des effets curieux. Mais c'est cette courl qui est particulièrement intéressante; nous l'étudierons au prochain chapitre.

380. Instruments à verges. — Les verges libres bouts se rencontrent dans un instrument fort primitif, le *bois*, série de planchettes *ab*, *a'b'*, de longueur et d'é



Fig. 105

convenables, soutenues aux nœuds du son fondamental ficelles *cd*, *c'd'*, ou des tresses de paille (il prend alors le *violon de paille*), et que l'on frappe avec une baguette

(¹) Wheatstone, *Quarterly Journal of science*, I; 1827.

par un tampon élastique. La vogue fut quelque temps aux *carillons*, aux *harmonicas*, constitués de même par des lames de métal ou de verre; Mozart en avait introduit un dans la *Flûte enchantée* pour imiter le son des cloches. Nos orchestres emploient encore, sous le nom de *triangle*, une longue verge rendant par percussion une abondance de sons supérieurs.

Le *violon de fer* est un instrument formé de tiges de fer fixées à leur partie inférieure sur une caisse d'harmonie, libres à leur partie supérieure, et dont un archet habile peut tirer des sons acceptables. Les *anches* appartiennent à ce genre de verges, que l'on trouve également dans les *boîtes à musique*.

Mais l'application la plus importante des verges vibrantes est le *diapason*.

381. Diapason. — Le diapason est une fourche métallique à queue faisant corps avec les branches (et non rapportée). Les

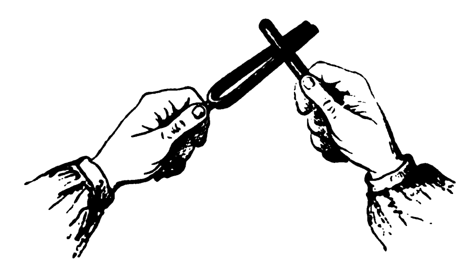


Fig. 106

deux branches sont égales et vibrent à l'unisson; chacune d'elles se comporte sensiblement comme une verge libre à un bout et fixée par l'autre, ce bout fixe étant la région où la branche considérée s'appuie contre sa jumelle par l'intermédiaire de la partie courbe [1].

La hauteur du son fondamental est donc indépendante de la

[1] Cette manière de voir n'était pas celle de Chladni, qui regardait le diapason comme une verge libre aux deux bouts et simplement repliée sur elle-même; mais la loi de succession des sons supérieurs (von Helmholtz) et le nombre absolu des vibrations du son fondamental (Mercadier) montrent que l'assimilation de Chladni n'était pas exacte.

largeur (nous appelons toujours ainsi la dimension perpendic au plan de vibration), proportionnelle à l'épaisseur e, et en inverse du carré de la longueur L,

$$N = K \frac{e}{L^2} \text{ (}^1\text{)},$$

K désignant une constante ([2]), égale pour l'acier à environ 8 l'unité de longueur étant toujours le centimètre.

Les sons supérieurs se succèdent suivant la loi précédem établie :

$$1 \quad 6\ 1/4 \quad 17\ 1/2 \quad 34\ 1/4 \quad 56\ 1/2 \quad \ldots$$

En même temps, le diapason présente les systèmes de nœu de ventres indiqués par les figures ci-contre. Quand le dia

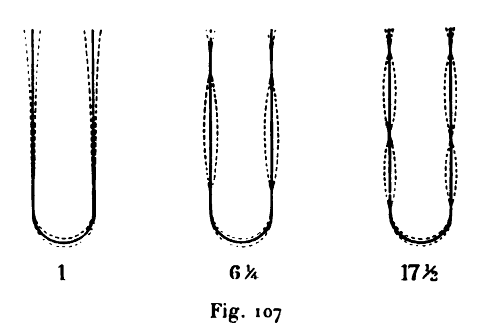


Fig. 107

rend le son fondamental, on a un nœud au bas de chaque bra au bout fixe de la verge; et le tronçon situé entre ces deux nœ compris la queue qui fait corps avec lui, vibre à l'unisson des ches. Le premier son supérieur correspond à la présence de nœuds ([3]) sur chaque branche; et ainsi de suite.

([1]) Dans cette formule, L doit être remplacé, d'après M. Mercadier, par l étant la projection de la ligne médiane d'une branche sur le plan de trie de l'instrument (Mercadier, C. R., LXXIX, 1001 et 1069; 1874).

([2]) En général, K = 0,164 V.

([3]) Chladni avait déjà reconnu que le premier son supérieur, dont déterminé la hauteur, correspondait à un nombre total de 4 nœuds, et système de 3 nœuds faisait défaut.

Les sons supérieurs ne sont pas absolument constants. Ils varient un peu selon la forme du diapason. Sur différents diapasons, M. Tyndall trouve pour le premier son supérieur des valeurs comprises entre 5,8 et 6,6. Deux diapasons, en apparence identiques et exactement à l'unisson quant au son fondamental, donnent en général des battements (386) sur le premier son supérieur, battements que l'on perçoit nettement si, après avoir ébranlé chaque diapason de manière à lui faire rendre simultanément les deux sons [1], on le touche en un nœud du premier son supérieur, qui alors subsiste seul. Quelles que soient ces petites variations, les sons supérieurs s'élèvent très vite, et l'oreille les distingue aisément du son fondamental, beaucoup plus intense [2]. Ils disparaissent d'ailleurs promptement, et au tintement initial succède bientôt un son simple, pendulaire, le son fondamental seul.

Le diapason est ainsi le véritable étalon de hauteur musicale (327). Pour que la hauteur du son émis par un diapason soit absolument déterminée, il est nécessaire toutefois que les oscillations restent très petites (pratiquement que l'amplitude ne dépasse pas le 1/100 de la longueur des branches), et que la température soit constante. D'habitude les diapasons sont accordés pour la tem-

[1] A cet effet on attaquera le diapason à l'archet, alternativement au bout et au milieu des branches. L'expérience est particulièrement aisée avec un diapason à branches minces, d'où l'on tirerait sans plus de peine le son fondamen-

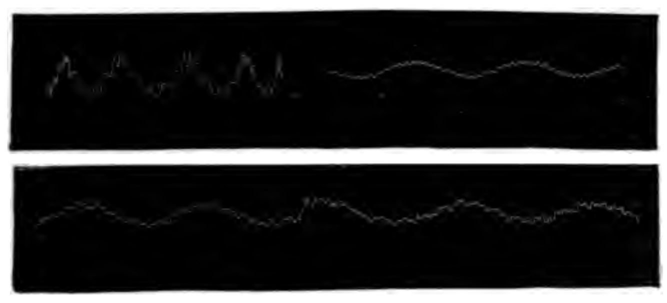


Fig. 108

tal et le deuxième son supérieur, ou même le son fondamental et les deux premiers sons supérieurs, comme le montrent les tracés ci-joints.

[2] On évite tout à fait le premier son supérieur, le seul habituellement sensible, en attaquant le diapason au point où ce son aurait un nœud.

pérature ordinaire (1) : le nombre de vibrations d'un diapas d'acier diminue de 1/8943 quand la température s'élève de 1°(Kc nig) (2). L'effet de la température consiste surtout dans la modific tion de l'élasticité, l'influence de la dilatation étant relativeme faible.

Si le diapason est monté sur une caisse de résonnance, celle-



Fig. 109

peut altérer l'isochronisme et le nombre des vibrations. Cette alt ration se produit quand le ton propre du système renforçant e très voisin de celui du diapason. Alors le diapason, attaqué à l'a chet, fait entendre un son très fort, une sorte de cri, qui s'éteint tr vite. Au contraire, quand le ton propre de la caisse est aussi élo gné de celui du diapason qu'il peut l'être sans que la résonnan cesse d'être sensible, le son du diapason est simplement renforc mais il ne subit aucune modification dans sa hauteur, et conser une longue durée (3).

L'isochronisme des petites oscillations du diapason, à tempér ture constante, en fait un chronographe précieux (331). Dans l applications chronographiques, il est souvent utile de maintenir l mouvement vibratoire qui de lui-même s'éteint assez vite. A c effet on se sert de l'électricité : Lissajous (4), qui le premier e

(1) Le diapason normal français a été établi par Lissajous avec 435 vd à 1 toutefois il ne battrait exactement ses 435 vd qu'à 24° 1/4, d'après Kœnig. Ce co structeur ajuste tous ses diapasons à 20°.

(2) Ainsi pour $ut_1 = 64^{vd}$, la variation correspondant à 1° est $-0^{vd},0071$
— $ut_3 = 256$ — — $-0^{vd},0286$

(3) Kœnig, *loc. cit.*, 180.

(4) Lissajous, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 147; 1857.

recours à ce procédé, disposait en face de chaque branche, munie au besoin d'un contact, un électro-aimant dont le courant était périodiquement rompu par un interrupteur vibrant, disposé de façon que sa période fût un sous-multiple exact de celle du diapason. M. von Helmholtz employa comme interrupteur un autre diapason de hauteur convenable. Actuellement on utilise à cet effet le diapason lui-même, et on ne fait plus usage que d'un seul électro-aimant intérieur : la figure ci-contre représente l'électro-

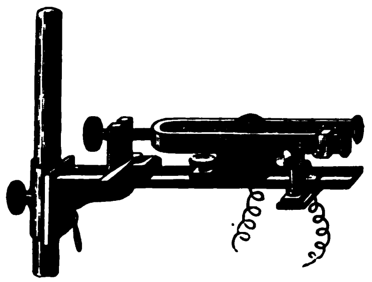


Fig. 110

diapason de M. Mercadier. Dans cet emploi de l'électricité à l'entretien des oscillations d'un diapason ([1]), il est essentiel que l'amplitude du mouvement vibratoire, ordinairement assez considérable, reste constante pour que l'isochronisme soit assuré. En tous cas, il est prudent d'inscrire, en même temps que les vibrations du diapason, les secondes données par une horloge astronomique, à l'exemple de Regnault (346) : on a ainsi un contrôle permanent de la marche du diapason.

On peut remplacer le pendule d'une horloge par un diapason. Cette disposition, réalisée d'abord par Niaudet ([2]), a été reprise par M. Kœnig ([3]) en vue d'obtenir un diapason type dont la hauteur fût toujours exactement connue. Pour avoir cette hauteur, il suffit en effet de comparer l'*horloge à diapason* avec un chronomètre ordinaire. Supposons que, comme dans l'appareil de M. Kœnig, le diapason qui agit sur l'échappement de l'horloge et

([1]) Il convient de remarquer que le dispositif électro-magnétique doit toute son efficacité à l'extra-courant, à tel point que le courant peut n'être fermé que pendant que la branche du diapason se rapproche de l'électro-aimant (LIPPMANN, *Bulletin des séances de la Société française de physique*; 1885; p. 25).

([2]) NIAUDET, C. R., LXIII, 991; 1866.

([3]) KŒNIG, *Wied. Ann.*, IX, 394; 1880; et *Quelques expériences*, 173.

en reçoit à chaque oscillation une légère impulsion, soit 64 vibrations doubles; si l'horloge retarde de 1' dans l'esp c'est que le diapason bat $\frac{3599}{3600}$. $64 = 63^{vd},928$ par seconde reil est d'ailleurs muni des pièces nécessaires pour sei comparer tel autre diapason que l'on voudra d'après la de Lissajous (347).

382. Coexistence des mouvements longitudi transversaux dans les verges. — Quand une verge tale vibre longitudinalement, le sable projeté sur sa fa rieure dessine des nodales auxquelles Savart [1] recc caractères suivants: 1° elles sont beaucoup plus nombre les nodales propres du mouvement longitudinal; 2° le porte en glissant sur la surface de la verge et non en 3° elles alternent sur les deux faces opposées, de sorte qu retourne la verge sens dessus dessous, le sable se di milieu des espaces qu'il laissait libres précédemment.

En mesurant les distances de ces lignes, Savart prouva q tement de deux nodales consécutives (placées sur deux fa sées) est, dans la partie moyenne de la verge, indépend largeur, et proportionnel à la racine carrée de l'épais qu'à la racine carrée de la longueur.

Il en conclut que ces nodales sont dues à un mouveme versal, synchrone du mouvement longitudinal. Les lois pr sont, en effet, d'accord avec cette hypothèse. Prenons pa la deuxième loi : le mouvement longitudinal est indépe l'épaisseur, tandis que le nombre des vibrations transve est proportionnel : donc, pour que le synchronisme persis que le carré de la longueur de l'internœud, carré auqu versement proportionnel le nombre des vibrations tran varie en raison directe de l'épaisseur.

A l'appui de son hypothèse, Savart montra que si l'on transversalement la verge de façon à obtenir sur la face su le système complet des nodales qui accompagnaient sur

[1] SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXV, 337; 1837.

faces le mouvement longitudinal, elle rendait en effet très sensiblement le même son que dans le premier cas.

Une verge rectangulaire plongeant par la tranche dans du mercure sur moitié de sa longueur, il ébranla longitudinalement l'autre moitié : il vit alors à la surface du mercure une multitude de rides transversales, séparées par des points de repos qui coïncidaient avec les nœuds des deux faces à la fois; par conséquent, la longueur des segments vibrant transversalement est bien égale à la moitié de la distance de deux lignes nodales sur l'une des faces.

Après avoir ainsi déterminé les conditions du phénomène, Savart entreprit de l'expliquer; mais là il fut moins heureux. Les premières idées exactes sur ce point furent émises par A. Seebeck (¹) : M. Terquem (²) les reprit et les développa.

M. Terquem établit d'abord que, quand les nodales de Savart ne se présentent pas d'elles-mêmes sur une verge vibrant longitudinalement, il suffit de diminuer graduellement et toujours très peu la longueur de cette verge pour les faire apparaître. En effet, cette diminution altère à peine le son longitudinal (³) et fait au contraire monter rapidement les sons transversaux, de sorte que bientôt l'un de ces sons se trouve sensiblement à l'unisson du son longitudinal. Telle est précisément la condition pour que le phénomène se manifeste.

Admettons que des vibrations longitudinales et des vibrations transversales se produisent alors simultanément, et cherchons le résultat de la coexistence de ces deux mouvements synchrones perpendiculaires. Soit en ABA'B' une coupe longitudinale de la verge : AB est la face supérieure, A'B' la face inférieure. La verge vibrant longitudinalement de façon à rendre le son fondamental, soit NN' un nœud transversal quelconque ne coïncidant pas avec le milieu de la verge. A un instant quelconque deux molécules m et m_1, situées de part et d'autre de NN', éprouveront longitudinalement des déplacements de même sens ml, m_1l_1, et transversalement des déplacements de sens contraire mt, m_1t_1', donnant les déplace-

(¹) A. Seebeck, *Dove's Repertorium*, VIII, 53; 1849.

(²) Terquem, *Vibrations longitudinales des verges prismatiques* (thèse). Paris, Mallet-Bachelier; 1859.

(³) Il n'est question ici que du son fondamental; mais tout ce que nous disons conviendrait à un harmonique longitudinal quelconque.

ments résultants mr, $m_1r'_1$; une demi-période après, les déplacements résultants seront mr', m_1r_1. Les deux molécules m, m_1 oscilleront donc suivant les droites rr', $r_1'r_1$. Il en sera de même des molécules superficielles M, M_1 ; du sable (ou mieux du sulfate de baryte passé au tamis de soie) placé en ces points sera lan-

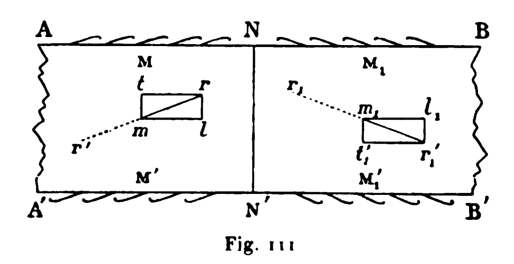


Fig. 111

cé vers N lorsque les molécules M, M_1 marcheront elles-mêmes vers N en se soulevant, et il restera en repos quand elles s'abaisseront. Comme les trajectoires des molécules sont très peu inclinées sur l'horizon, le mouvement horizontal étant beaucoup plus intense que le mouvement transversal, c'est par une sorte de glissement que le sable se portera vers N. Un glissement inverse l'éloignera de N'. La moitié des nœuds se trouveront ainsi dessinés sur l'une des faces, les autres se marqueront sur l'autre face dans les intervalles des premiers.

Il existe d'ailleurs deux modes de disposition des nœuds, suivant que le son transversal à l'unisson du son longitudinal correspond à

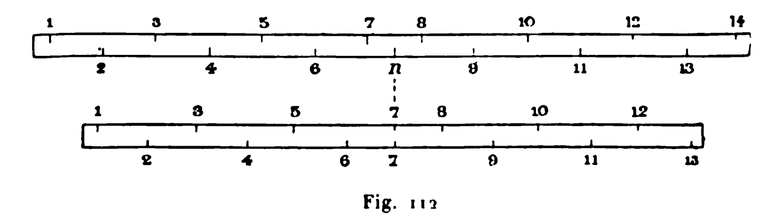


Fig. 112

un nombre pair ou impair de nœuds. Les deux figures ci-contre montrent ces deux modes différents, tels qu'ils se sont présentés à M. Terquem, le premier avec 14 nœuds sur une verge de laiton de 6^{mm} environ d'épaisseur et de 1^m de longueur [1], le deuxième

[1] Dans ce cas on peut aussi avoir, au lieu du nœud médian n, les deux nœuds 7 et 8, ce qui donne alors sur une même face quatre nœuds consécutifs 6,7,8,9.

avec 13 nœuds sur la même verge réduite à 857^{mm} de longueur. M. Terquem a constaté dans les deux cas que la disposition des nœuds vérifiait les formules de Lissajous (377).

Inversement, l'ébranlement transversal amène le mouvement longitudinal lorsque les périodes sont assez voisines : les nœuds alternent également sur les deux faces, mais en sens inverse.

Un fait digne de remarque c'est que le mouvement ne persiste que pour un accord approché entre les deux vibrations à angle droit, et que tout ébranlement devient impossible quand le son longitudinal est rigoureusement d'accord avec un harmonique tranversal.

La coexistence des deux sortes de mouvements explique encore le *son rauque* de Savart, son que fait entendre une verge longue et mince ébranlée longitudinalement avec énergie, et qui est à l'octave grave du son longitudinal. C'est un son transversal qui ne se manifeste que si le mouvement transversal peut en effet donner un son sensiblement à l'octave grave du son longitudinal. Le mouvement du sable est alors assez complexe, chacune des molécules parcourant la courbe en 8 de Lissajous.

III. — VIBRATIONS TOURNANTES.

383. Vibrations tournantes. — Dans ce mode de vibrations, chaque molécule décrit un petit arc de cercle autour de l'axe de la verge. On les excite avec l'archet conduit perpendiculairement à l'axe. Du sable projeté à la surface de la verge accuse une nodale régnant sur toute la longueur, coupée par un certain nombre de transversales. Les nœuds transversaux sont produits par les changements de sens de la rotation : le sable y reste en équilibre, mais il ne s'y rend pas des points voisins. Au contraire, il s'accumule sur la nodale longitudinale, poussé par le mouvement des bords.

La verge peut d'ailleurs être libre aux deux extrémités, ou fixée aux deux extrémités, ou libre à l'une des extrémités et fixée à l'autre. Chladni (1) a trouvé que dans tous les cas la position des

(1) CHLADNI, *Neue Schriften der Berliner Gesellschafft naturforschender Freunde*; 1799; et *Traité d'acoustique*, p. 110.

nœuds transversaux et la marche des sons supérieurs étai
mêmes que pour les vibrations longitudinales, sauf que le s
plus bas d'une quinte que dans le mouvement longitudinal
pondant. Wertheim (1) fixe l'intervalle à 1,63 pour une
carrée ou cylindrique, et à un rapport variable suivant l'ép
et la largeur quand la verge est rectangulaire.

M. Terquem (2) a reconnu que, dans ce dernier cas, les vib
tournantes peuvent coexister avec des vibrations longitudin
condition de la coexistence étant toujours que les deux mo
férents de vibrations produisent sensiblement le même s
observe encore une disposition alterne des nœuds, qui s'e
comme précédemment.

Enfin les vibrations tournantes coïncident souvent avec les
tions transversales ordinaires : les nodales s'inclinent alors e
sent même par se changer en courbes continues parcourant l
sur toute sa longueur.

Dans les tubes, ces différentes sortes de vibrations se super
facilement et donnent naissance à des spirales longuement d
par Savart (3).

(1) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), L, 258; 1857.
(2) Terquem, *loc. cit.*
(3) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXV, 337; 1837.

CHAPITRE VIII

MEMBRANES ET PLAQUES

I. — MEMBRANES.

384. Membranes. — *Définition.* — En acoustique, on admet entre les membranes et les plaques la même différence qu'entre les cordes et les verges.

La membrane théorique est une *lame solide, infiniment mince et parfaitement flexible*, soumise en tous sens à une tension assez forte pour rester sensiblement constante dans les petites déformations de la lame.

Les vibrations transversales d'une membrane fixée par son contour ont été étudiées avec soin, théoriquement et expérimentalement.

Théorie. — Dans son mémoire sur le mouvement vibratoire des tambours, Euler (¹) donna le premier l'équation de la membrane vibrante, considérée comme un tissu de fils élastiques se croisant rectangulairement. Plus tard, Poisson (²) démontra rigoureusement cette équation

$$\frac{d^2w}{dt^2}=\frac{T}{\mu}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}\right),$$

où w désigne le déplacement infiniment petit d'un point (x,y,o) perpendiculairement à la surface supposée primitivement plane; T est la tension par unité de longueur (219), et μ la masse de la

(¹) Euler, *Novi commentarii Academiæ Petropolitanæ*, X, 343; 1797. Voir aussi Riccati, *Saggi scient. e litter. dell' Accademia di Padova*, I, 414; 1786.
(²) Poisson, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VIII; 1829.

membrane par unité de surface. Un raisonnement tout semblable à celui que nous avons fait relativement à la corde vibrante (372), et facilité d'ailleurs par la connaissance que l'on a déjà (220) de la composante normale de la tension, permettra d'établir immédiatement cette formule.

Poisson avait à peu près épuisé la question dans le cas d'une membrane rectangulaire ([1]), mais pour la membrane circulaire il s'était borné aux vibrations identiques suivant tous les rayons. Le grand travail de M. Kirchhoff ([2]) sur les plaques fournit de fait la solution du problème de la membrane circulaire, qui fut traité par Clebsch ([3]) d'une façon complète ([4]). M. Mathieu ([5]) a donné la théorie de la membrane elliptique.

Expériences. — Dès 1826, Savart ([6]) étudiait empiriquement le phénomène d'après la méthode des figures sonores si heureusement appliquée aux plaques par Chladni. La membrane, fixée à un cadre rigide, était placée près d'un tuyau accordé deux ou trois octaves au-dessous du son fondamental de la membrane. Savart remarqua immédiatement la ressemblance des figures sonores d'une membrane avec celles d'une plaque de même forme; mais il crut observer que, contrairement à celles des plaques, ces figures passaient de l'une à l'autre d'une manière continue, la membrane répondant toujours au son du tuyau dont il faisait varier graduellement la hauteur à l'aide d'un piston.

Membranes carrées.

MM. Bourget et Bernard ([7]) ont repris le travail de Savart sur les membranes carrées, en s'efforçant d'égaliser leur tension en tous sens, et en excitant chacune d'elles au moyen d'un tuyau

([1]) Lamé, dans ses *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, simplifia la méthode et l'appliqua à la membrane carrée et à la membrane triangulaire équilatérale.

([2]) Kirchhoff, *Crelle's Journal*, XL, 51; 1850.

([3]) Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Carlsruhe; 1862. (Traduction française par de Saint-Venant et Flamant. Paris, Dunod; 1883.)

([4]) Bourget a exposé dans les *Annales de l'École normale*, (1), III, 55; 1866, la théorie des membranes circulaires, avec tableaux numériques détaillés.

([5]) Mathieu, *Journal de Liouville*, (2), XIII; 1868; et *Cours de physique mathématique*, p. 122.

([6]) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXII, 384; 1826.

([7]) Bourget et Bernard, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LX, 449; 1860.

rgue accordé au moins une octave plus haut que le son fon-
mental de la membrane. Le papier est le corps qui leur fourni les meilleurs résultats ; il suffit de le mouiller plus ou oins avant de le coller sur les bords du cadre pour obtenir une ision plus ou moins forte. On reconnaît d'ailleurs sans peine and cette tension est uniforme : supposons que, sous l'action in tuyau convenable, la membrane offre le système de nodales mposé de cinq parallèles à l'un des couples de côtés ; si la tension la même dans les deux sens, le plus léger changement dans la sition de la membrane au-dessus du tuyau amènera le système rallèle à l'autre couple de côtés ; chacune des figures sera très stable, et la membrane vibrera alternativement suivant l'un ou utre mode. Le sable se réunira alors en petits monticules aux

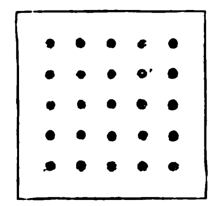


Fig. 113

oints qui restent immobiles dans les deux cas : l'apparition de es petits tas disposés en quadrillage régulier indiquera donc une nsion uniforme.

D'après la théorie, à chacun des sons possibles correspondent ne infinité de formes des nodales, telles que l'on peut passer de ne à l'autre par des déformations continues, en variant le mode ébranlement sans changer le son. Le type le plus simple de aque système est constitué par des parallèles aux côtés : on le présente par la notation h/k, dans laquelle h et k désignent le ombre de droites respectivement parallèles aux deux couples de ôtés [1]. MM. Bourget et Bernard ont reconnu qu'effectivement s figures sonores des membranes rectangulaires doivent être lassées par types formés de parallèles aux côtés, ainsi que Chladni

[1] Les systèmes (1/1), (2/2), (3/3), ... (h/h) ne sont susceptibles que d'une eule forme.

l'avait indiqué pour les plaques. La figure 114 montre q
unes des formes du type 1/o.

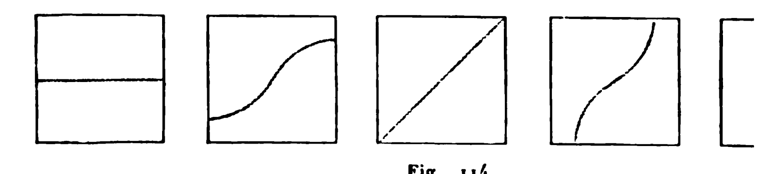


Fig. 114

Conformément aux idées de Chladni et contrairement à l
de Savart, ils ont trouvé ces types nettement séparés les
autres. Cette séparation est très marquée pour les premie
Que l'on prenne un tuyau donnant le son fondamental de l
brane (son que l'on obtient aisément en la frappant avec
marteau), et que l'on allonge ce tuyau, au moyen d'un
mobile, de manière à en abaisser suffisamment le son, le s
la membrane reste immobile; si l'on raccourcit peu à peu l
le son s'élève à l'unisson de la membrane : alors le sabl
énergiquement en même temps que le son du tuyau est r
Si l'on continue à diminuer la longueur du tuyau, le son
de plus en plus et le sable ne tarde pas à revenir au re
Puis apparaît la nodale 1/o, correspondant au premier s
périeur; et ainsi de suite. Il faut remarquer toutefois qu
chaque figure il existe un certain intervalle (qui peut aller
deux tons pour le son fondamental) dans lequel la me
vibre plus ou moins bien; de sorte que, pratiquement, dès
sième octave, où les sons propres de la membrane sont dé
rapprochés (voir le tableau ci-dessous), on peut dire avec
que la membrane répond à tous les sons, le passage d'une
à l'autre s'effectuant par un léger trouble, seul indice de
continuité.

Si l'on prend pour unité le nombre des vibrations du son
mental, les nombres ci-après définissent, suivant Poisson, t

(¹) On peut renverser l'expérience, prendre un tuyau à un ton pl
que la membrane, chauffer celle-ci de manière à lui donner momenta
une tonalité supérieure à celle du tuyau : placée au-dessus de l'oril
reste immobile. Mais en se refroidissant elle arrive à l'unisson. Le sabl
alors vivement; puis il retombe au repos, la membrane étant mainten
ton plus grave que le tuyau.

sons que la membrane peut rendre : on a mis en regard, d'un côté la nodale, de l'autre la désignation musicale du son correspondant, le son fondamental étant représenté par ut_1.

Nodales.	Sons correspondants.		Nodales.	Sons correspondants.	
0/0	1	ut_1	3/3	4	ut_3
1/0	1,581	sol_1 ♯	4/2	4,123	ut_3 +
1/1	2	ut_2	5/0	4,301	ut_3 ♯ +
2/0	2,236	$ré_2$ —	5/1	4,472	$ré_3$ —
2/1	2,550	mi_2 +	4/3	4,528	$ré_3$ +
3/0	2,915	sol_2 —	5/2	4,743	$ré_3$ ♯ —
2/2	3	sol_2	6/0 = 4/4	5	mi_3
3/1	3,161	sol_2 ♯ —	5/3	5,099	mi_3 +
3/2	3,536	la_2 ♯ —	6/1	5,147	mi_3 +
4/0	3,606	la_2 ♯ +	6/2	5,385	fa_3 +
4/1	3,808	si_2	.	.	.

L'expérience ne donne pas exactement ces hauteurs des sons successifs. L'écart est plus considérable pour les premiers sons. Il est moins marqué avec les papiers forts. Cela tient sans doute à ce que, comme le pense lord Rayleigh, la cause perturbatrice principale est la résistance de l'air.

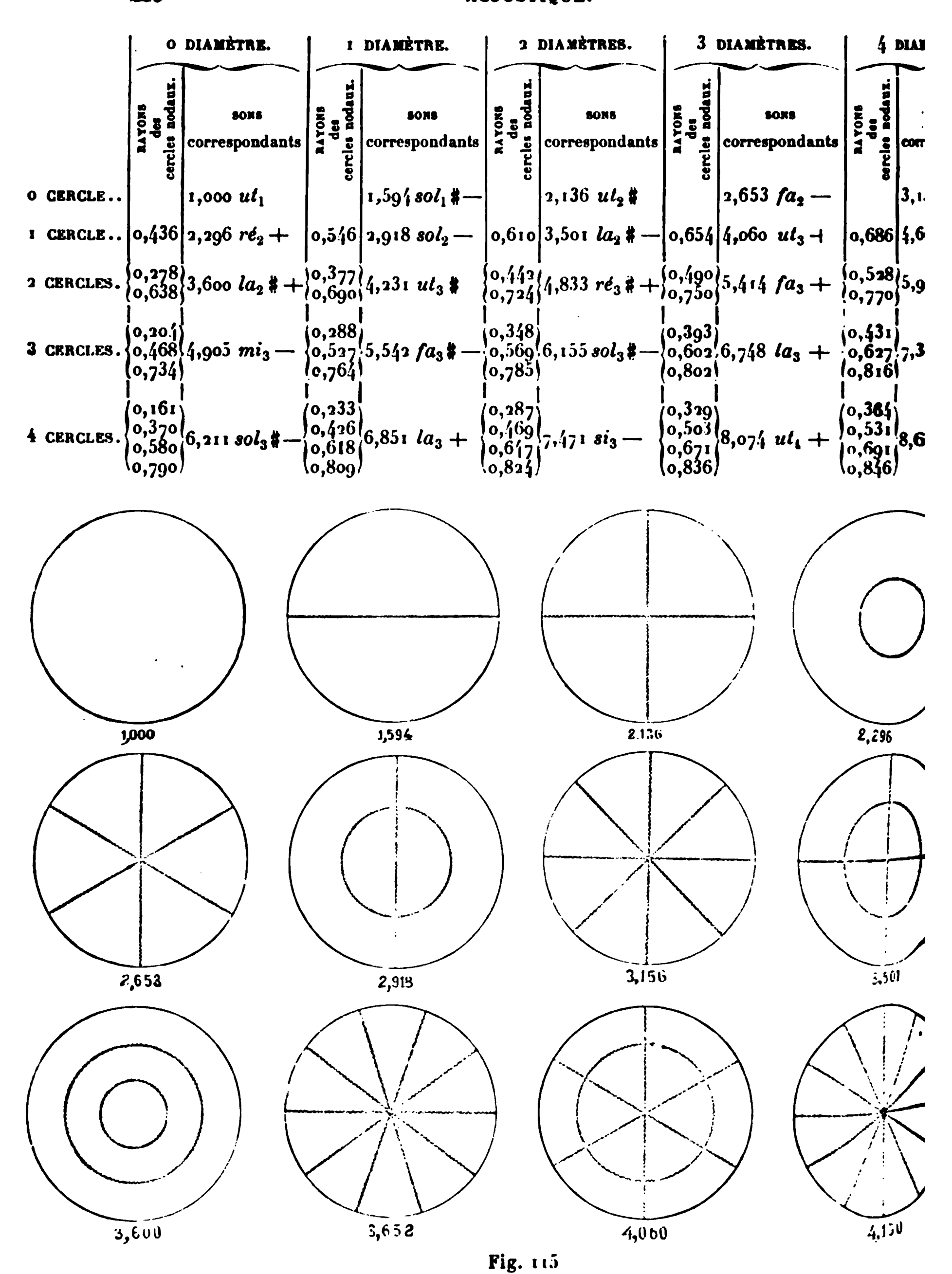
Membranes circulaires.

M. Bourget (1) a aussi étudié les membranes circulaires, et il est arrivé à des conclusions toutes semblables à celles que nous venons de rapporter pour les membranes carrées.

Les lignes nodales sont ou des cercles, ou des diamètres faisant entre eux des angles égaux, ou des combinaisons de cercles et de diamètres également inclinés, conformément à la théorie. Elles sont parfaitement régulières quand la membrane est bien tendue, et présentent exactement les dimensions théoriques, autant du moins que l'épaisseur des lignes permet de le constater.

Le tableau suivant, extrait du mémoire de M. Bourget, contient les nodales les plus simples et les sons théoriques correspondants (les sons observés ont présenté des écarts du même ordre que dans le cas des membranes carrées).

(1) BOURGET, *loc. cit.*



	0 DIAMÈTRE.		1 DIAMÈTRE.		2 DIAMÈTRES.		3 DIAMÈTRES.		4 DIA[...]	
	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	cor[...]
0 CERCLE..		1,000 ut_1		1,594 sol_1 ♯ —		2,136 ut_2 ♯		2,653 fa_2 —		3,1[...]
1 CERCLE..	0,436	2,296 $ré_2$ +	0,546	2,918 sol_2 —	0,610	3,501 la_2 ♯ —	0,654	4,060 ut_3 +	0,686	4,6[...]
2 CERCLES.	0,278 0,638	3,600 la_2 ♯ +	0,377 0,690	4,231 ut_3 ♯	0,442 0,724	4,833 $ré_3$ ♯ +	0,490 0,750	5,414 fa_3 +	0,528 0,770	5,9[...]
3 CERCLES.	0,204 0,468 0,734	4,905 mi_3 —	0,288 0,527 0,764	5,542 fa_3 ♯ —	0,348 0,569 0,785	6,155 sol_3 ♯ —	0,393 0,602 0,802	6,748 la_3 +	0,431 0,627 0,816	7,3[...]
4 CERCLES.	0,161 0,370 0,580 0,790	6,211 sol_3 ♯ —	0,233 0,426 0,618 0,809	6,851 la_3 +	0,287 0,469 0,647 0,824	7,471 si_3 —	0,329 0,503 0,671 0,836	8,074 ut_4 +	0,364 0,531 0,691 0,846	8,6[...]

Fig. 115

Applications. — Les membranes sont utilisées en musique (*tam-*

bours, *timbales* et autres instruments à percussion du même genre). L'appareil musical de la cigale est un véritable tambour à deux peaux sèches et convexes, dont l'insecte joue par la contraction brusque et simultanée de deux gros muscles allant du centre de l'instrument à chacune de ces timbales (¹). Dans l'oreille humaine les vibrations extérieures sont reçues d'abord par une membrane (*membrane du tympan*), qui paraît apte à vibrer à l'unisson d'un son quelconque ; mais il faut remarquer que, grâce à la chaîne des osselets, sa tension peut varier dans de larges limites. Le physicien utilise constamment les membranes pour recueillir les sons : nous nous contenterons de rappeler le phonautoscope de Scott (331) et les appareils récepteurs de Regnault (346).

II. — PLAQUES.

385. Étude expérimentale des vibrations transversales des plaques. — *Difficultés de la question.* — D'une plaque de verre ou de métal on peut tirer une infinité de sons aux tonalités compliquées, décelant une non moins grande complication dans les mouvements vibratoires dont la plaque est susceptible.

Chladni (²) le premier éclaira ce dédale ; et, par ses ingénieuses *figures sonores*, il montra les divers modes de division d'une plaque. Napoléon, ayant été témoin de ses expériences, en fut tellement frappé qu'il fit mettre au concours par l'Institut la théorie de ces curieux phénomènes ; Sophie Germain (³) aborda la question par un procédé évidemment heureux puisque Lagrange (⁴), en l'appliquant correctement, trouva l'équation

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 2\frac{d^4w}{dx^2dy^2} + \frac{d^4w}{dy^4} = F(x,y),$$

qui donne les déplacements verticaux w de tous les points du feuillet moyen de la plaque mince.

La démonstration de cette équation du quatrième ordre a exercé

(¹) CARLET, *Ann. des sc. nat.* ; 1877.

(²) CHLADNI, *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Leipzig, 1787 ; et *Traité d'acoustique*, 120.

(³) SOPHIE GERMAIN, *Mémoires de l'Institut*, 1810.

(⁴) LAGRANGE obtint cette équation en 1811, mais il ne la publia point ; on la trouva dans ses papiers, sans démonstration, en 1813.

les mathématiciens les plus éminents, Poisson ([1]) d'abord,
veau Poisson ([2]) et simultanément Cauchy ([3]), ensuite
chhoff ([4]), son élève M. Gehring ([5]), et Clebsch ([6]), puis
sinesq ([7]); mais l'exactitude même de l'équation n'a ja
contestée, tandis que les conditions au contour ont soulev
discussions. D'après Poisson, trois équations distinctes doi
vérifiées en chaque point libre du contour. M. Kirchhoff
que généralement il était impossible de satisfaire à ces t
tions en même temps : toutefois, dans le cas des vibratio
triques d'une plaque circulaire, l'une des équations se réd
identité, de sorte que les co
de Poisson relativement à c
tions sont justes; mais il n
ment que deux équations au
Cette manière de voir n'a p
mise sans résistance : M. M
et M. Maurice Lévy ([9]) ont
l'exactitude des raisonnen
M. Kirchhoff; néanmoins,
de ce dernier a prévalu.

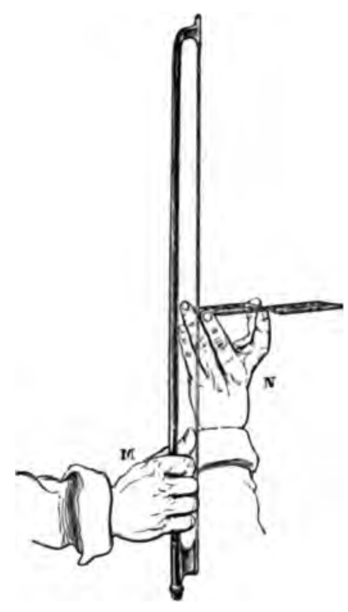


Fig. 116

Dispositions expérimentale
étudier expérimentalement l
tions transversales d'une pl
la soutient soit entre deux
liège fixés aux mâchoires d'
spéciale, dite *pince à pla*
entre les doigts si la plaque
trop lourde, ou, ce qui e
bon, on l'attache sur un support au moyen d'un cl

([1]) POISSON, *Mémoires de la 1re classe de l'Institut* pour l'année 181
([2]) POISSON, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VIII; 1829.
([3]) CAUCHY, *Exercices de mathématiques*, III, 328; 1829.
([4]) KIRCHHOFF, *loc. cit.*
([5]) GEHRING, *De æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et næ cristallinæ definiuntur* (Dissertation inaugurale). Berlin; 1852.
([6]) CLEBSCH, *loc. cit.*
([7]) BOUSSINESQ, *Journal de Liouville*, (2), XVI, 125; et (3), V, 163 et 3
([8]) MATHIEU, *Journal de Liouville*, (2), XIV, 241; 1869.
([9]) MAURICE LÉVY, *Journal de Liouville*, (3), III, 219; 1877.

comme les différentes pièces du *banc à plaques* représenté ici. On répand un peu de sable d'écolier à la surface, et on at-

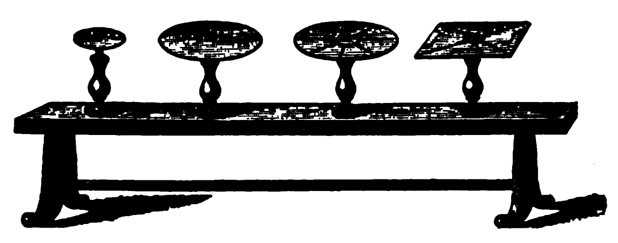


Fig. 117

taque le bord de champ avec l'archet, en choisissant le point d'attaque, en immobilisant au besoin quelque autre point sur lequel on pose le doigt, de façon à obtenir la figure sonore que l'on désire.

Figures sonores. — A chaque mode de vibrations de la plaque correspond une figure déterminée qui, sous un archet habile, apparaît avec une soudaineté et une netteté surprenantes (¹). C'est plaisir de voir les figures se succéder dans une variété inépuisable, *une figure donnée amenant toujours le même son;* mais la réciproque n'est pas vraie, *un même son répondant en général à différentes figures.* Nous indiquerons quelques-unes des formes les plus remarquables.

Plaques carrées.

Règles de Chladni. — Sur une plaque carrée ou rectangulaire Chladni, comme nous l'avons déjà dit, ramène toutes les figures à des systèmes de parallèles aux côtés, les *distorsions* des lignes primitives pouvant offrir les dessins les plus variés, sans modifier le son qui reste le même pour toutes les figures du même type. Nous dénommerons encore les figures par les nombres de parallèles aux côtés constituant le type.

(¹) Chladni recommande d'employer l'archet dans toute sa longueur, et, à la fin, après avoir renforcé un peu le mouvement, de retirer brusquement l'archet, afin de laisser la plaque vibrer *librement.* Pour les figures simples correspondant aux sons graves, il faut plus de pression et une marche plus lente de l'archet que pour les figures compliquées relatives aux sons aigus.

De tous les modes de vibrations, 1/1 est celui qui produit le s le plus grave (que nous appellerons ut_1) : on l'obtient facileme en fixant la plaque par le milieu et en l'attaquant près d' angle.

La plaque étant toujours saisie au milieu, si l'on appuie un do à l'un des sommets et qu'on passe l'archet au milieu d'un des cô adjacents, on obtient le deuxième son, qui est la quinte, $sol_1 =$ et la figure correspondante se compose des deux diagonales, plutôt de deux courbes asymptotes à ces diagonales, que Chlad regarde comme une distorsion de 2/0. Au même type 2/0 se mène, d'après lui, le carré aux angles arrondis qui se mont quand, serrant la plaque au milieu d'un côté, on la met en mo vement à l'un des angles les plus proches; cependant le son q donne alors la plaque, $la_1\sharp$, est plus aigu que le précédent de pı d'une tierce mineure.

Au troisième son, tierce de l'octave $mi_2 = \frac{5}{2}$, répond le sy tème 2/1, qui apparaît très facilement si, la plaque étant prise l'intersection de deux lignes, on l'attaque au milieu de l'un d côtés. Un petit changement des doigts peut amener la distorsion trois courbes diagonales.

Selon Chladni, 3/0 est le système le plus convenable po montrer les distorsions qui se produisent sans changement d son. En avançant progressivement les doigts *d* et l'archet *a*, o passe du système de trois droites parallèles (qui n'est autre qu celui d'une verge rendant le deuxième son transversal [1]) au figures ci-jointes, et en continuant le mouvement des doigts, o arriverait par les mêmes figures intermédiaires au système de tro droites parallèles à l'autre côté. Pendant toutes ces distorsion chaque partie vibrante conservant toujours la même grande relative, le son ne change pas : ce son, le quatrième de la séri est à peu près la double octave, $ut_3 = 4$, du son fondamental.

On a encore représenté dans la planche 118 quelques-unes d formes les plus faciles à obtenir, telles que 4/2 ($sol_4\flat = 11,5$ $sol_4 = 12$), ou les plus curieuses. Cette planche n'est pas la simp

[1] Voir la note de la page 235.

reproduction de celle de Chladni : en la dessinant on a tenu compte des observations de Strehlke [1] et de Savart [2] et surtout des plan-

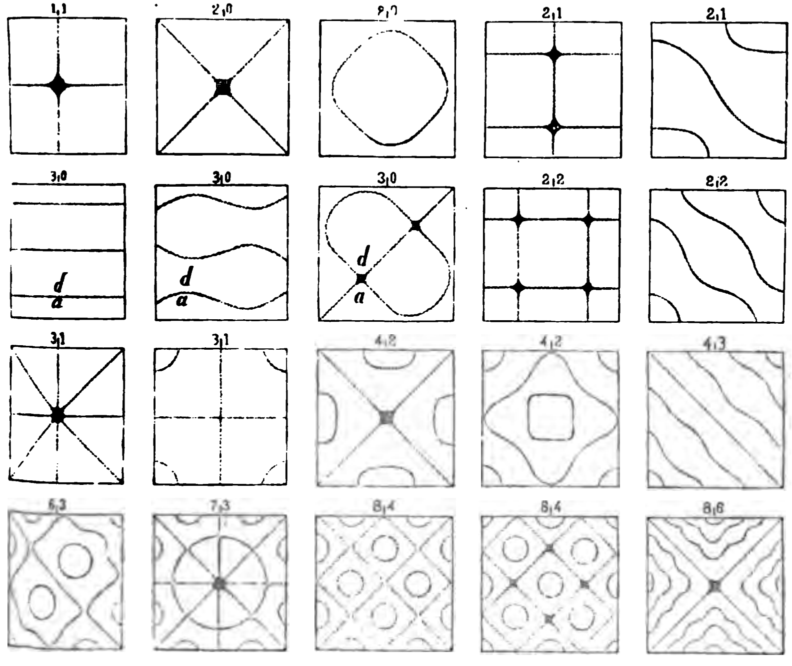


Fig. 118

ches de Savart qui, substituant au sable le tournesol gommé, a pu imprimer des centaines de figures sonores.

Observations de Strehlke et de Savart. — D'après ces deux physiciens, les types de Chladni sont des limites dont les nodales se rapprochent sans les atteindre : une nodale ne se montre jamais entièrement droite ; deux nodales ne se coupent jamais (à moins que l'on ne mette trop de sable sur la plaque).

Savart rapporte cependant chaque figure à un canevas formé de parallèles aux côtés et de diagonales : il admet que toutes les figures sonores des plaques carrées sont composées de parallèles aux côtés, toujours en nombre égal pour les deux sens [3], et de parallèles

[1] Strehlke, *Pogg. Ann.*, IV, 205 ; 1825.

[2] Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXIII, 225 ; 1840.

[3] On ne trouve pas dans ses planches les figures telles que notre première 2/1 donnée par Chladni et reproduite par Strehlke sous les réserves indiquées.

aux diagonales, en nombre égal ou inégal pour les deux sens. classe en conséquence les figures tout autrement que Chladni.

Ces classifications ont au fond peu d'importance. Des mesur comme celles en trop petit nombre dont nous parlerons dans instant, seraient beaucoup plus utiles. Seules elles pourraient p mettre une comparaison certaine avec la théorie.

Essais de théorie. — Celle-ci est malheureusement très peu ava cée pour le cas d'une plaque carrée à bords libres. Lord Rayleigh a effectué le calcul dans l'hypothèse de $\sigma = 0$, σ désignant toujo le coefficient de Poisson (242). Il trouve ainsi le système des de diagonales, le carré arrondi 2/0, la courbe en rectangle barré p une diagonale 2/0, etc. Il a déterminé pour le carré arrondi valeurs théoriques du rayon vecteur parallèle au côté $r_c = 0{,}4154$ du rayon vecteur diagonal $r_d = 0{,}3900$, le demi-côté du carré éta pris égal à 0,5000. Or Strehlke a obtenu, sur trois plaques de ver soigneusement choisies, pour r_c les valeurs 0,4198, 0,4198, 0,42 et pour r_d les valeurs 0,3856, 0,3855, 0,3864 ([2]). L'accord est ce tainement plus satisfaisant qu'on ne pouvait l'espérer en parta d'une hypothèse si éloignée des faits (on sait que pour le ver $\sigma = \frac{1}{4}$).

Il importe d'ailleurs de remarquer que les figures réelles so nécessairement altérées par les irrégularités inévitables de la plaqu (irrégularités d'autant plus sensibles que la plaque est plus mince, par le mode imparfait de support, et par l'action de l'archet qu n'est pas négligeable, les *vibrations forcées* pouvant différer beau coup des *vibrations libres*.

Explication de Wheatstone. — Wheatstone ([3]) avait imaginé un explication des figures sonores qui mérite d'être rappelée. Considérons une verge, libre aux deux bouts, vibrant transversalement de manière à donner le son fondamental : elle offre alors

([1]) Lord RAYLEIGH, *loc. cit.*, I, 309.

([2]) D'après Strehlke, ce carré arrondi est bien représenté par l'équation en coordonnées polaires

$$r = 0{,}4016 + 0{,}0170 \cos 4\omega + 0{,}00128 \cos 8\omega.$$

([3]) WHEATSTONE, *Phil. Trans.*, 1833, pars II, 593.

deux lignes nodales distantes des bouts de 0,224. La largeur de la verge étant indifférente dans certaines limites, nous la supposerons égale à la longueur : nous aurons ainsi une plaque carrée présentant deux nodales parallèles à l'un des systèmes de côtés [1]. Prenons une deuxième plaque carrée identique à la première et animée d'un mouvement égal et contraire. Superposons les deux

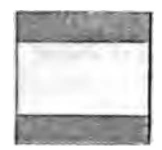




Fig. 119

plaques, ou, pour parler exactement, superposons les deux mouvements dans une même plaque, en les croisant à angle droit. Nous aurons un nouveau mode de mouvement vibratoire, caractérisé par un système de nodales passant par tous les points où les mouvements composants sont tous deux nuls ou s'annulent réciproquement. Nous obtiendrons ainsi dans le cas actuel le système des deux diagonales. Le principe de la superposition est juste, mais les mouvements que l'on superpose ne convenant pas en réalité aux plaques carrées à bords libres, les résultats ne seront qu'approximatifs. Ainsi, quand les mouvements des deux plaques croisées à angle droit sont concordants, Wheatstone trouve le carré inscrit, tandis que la forme réelle est le carré arrondi défini par Strehlke.

Sans nous attacher davantage aux défauts de la méthode, profitons des avantages qu'elle nous offre pour une première représentation des phénomènes. Elle va d'abord nous rendre compte de l'expérience suivante de Wheatstone sur les plaques de bois. Si une plaque de bois carrée est taillée de façon qu'un couple de côtés soit parallèle aux fibres, le son auquel correspondent deux nodales parallèles à cette direction est plus bas que le son

(1) Ce passage de la verge à la plaque est incorrect, à cause de la courbure perpendiculairement au plan de flexion, que l'on ne peut plus négliger dès que la largeur devient comparable à la longueur.

accompagné des mêmes nodales perpendiculaires aux fibres (ne pourra donc pas observer sur cette plaque les deux diag croisées : mais on les verra apparaître si la dimension pai aux fibres est diminuée de manière que la plaque rende à trè près le même son dans les deux sens. Une plaque de bois offrira au contraire immédiatement le système des deux diago si elle a les fibres en diagonale, ou si elle est formée par la s position de deux plaques identiques taillées suivant les fib croisées à angle droit, le son fondamental étant alors le dans les deux sens.

L'explication de Wheatstone s'étend aux plaques rectangul comme le montre le tableau ci-contre, dans lequel M. Kœni

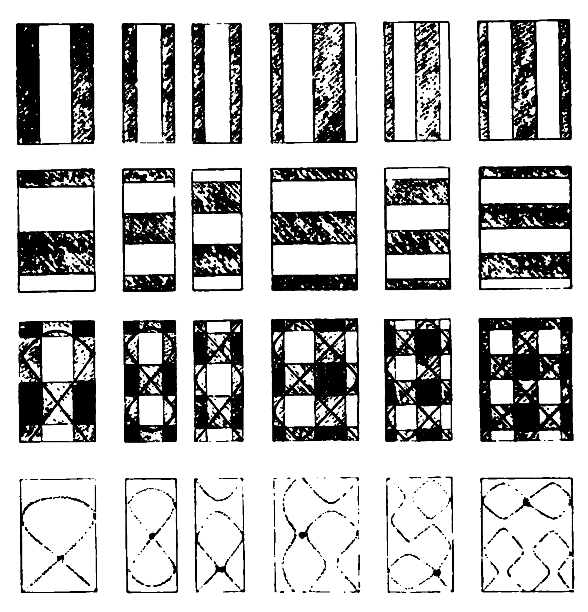


Fig. 120

représenté des plaques rectangulaires avec les divisions des v dans le sens de leur longueur, les mêmes plaques divisées da sens de leur largeur, les figures résultant de la combinaison des

([1]) Le bois résiste beaucoup mieux à la flexion quand il est taillé par ment aux fibres, comme chacun sait.

([2]) Kœnig, *Pogg. Ann.*, CXXII, 238; 1864; et *Quelques expériences*, 32.

systèmes orthogonaux, et enfin au-dessous les figures sonores réellement observées.

Remarques de M. Radau. — En étudiant l'explication de Wheatstone, M. Radau (1) a remarqué que l'équation de Lagrange admet comme solution particulière (2)

$$w = \left(\sin\frac{h\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{l} \pm \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{h\pi y}{l}\right)\sin 2\pi(h^2+k^2)\frac{e}{l^2}mt.$$

La hauteur du son serait alors proportionnelle à $\frac{e}{l^2}(h^2+k^2)$, le coefficient de proportionnalité étant pour le laiton, d'après les nombres de Wertheim $\left(\sigma = \frac{1}{3},\ V = 3600^m\right)$, environ 173 200, de sorte que l'on aurait avec les plaques de laiton

$$N = 173\,200\,\frac{e}{l^2}(h^2+k^2),$$

formule que vérifie l'expérience. En outre, on obtiendrait l'équation des nodales en égalant à zéro la parenthèse, dans laquelle d'ailleurs les sinus peuvent être remplacés par des cosinus (ce qui revient à un déplacement de l'origine); et en effet la plupart des nodales des plaques carrées sont représentées par l'équation

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(hx)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(ky) \pm \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(kx)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(ky) = 0,$$

l'origine étant au centre de la figure; toutefois la représentation n'est pas parfaite : ainsi on a pour la courbe 2/0 le carré inscrit, comme Wheatstone. C'est qu'en effet les conditions aux limites ne sont encore pas satisfaites; et les solutions trouvées conviennent aux membranes carrées à bords libres normalement ou aux pla-

(1) RADAU, *Moniteur scientifique de Quesneville*, VI, 468 et 540; 1864.

(2) Dans cette formule, l représente le côté du carré, e l'épaisseur (ces deux longueurs en centimètres), h et k sont des nombres entiers (marquant précisément le nombre de parallèles à chaque couple de côtés auxquelles on peut ramener la figure d'après Chladni), m est un coefficient dépendant du coefficient de Poisson σ et de la vitesse du son V dans le corps considéré.

ques carrées à bords supportés, mais non aux plaques carrées bords libres ([1]).

Plaques circulaires.

Accord de l'expérience et de la théorie. — On a pu au contra établir d'une façon complète la théorie des plaques circulaires bords libres, fixer analytiquement la forme des nodales, qui so des diamètres ou des cercles concentriques, et calculer la série d sons possibles.

Pour expérimenter, on saisit la plaque dans la pince à plaques o entre les doigts, ou on la pose sur des pointes en liège, ou bien o



Fig. 191

la fixe sur un support par son centre (la figure sonore présent alors nécessairement des diamètres); et on l'attaque soit avec l'ar chet en un point du contour, soit avec des crins passant par u trou ménagé au centre. On peut aussi attacher la plaque à l'extrémit d'une verge de longueur convenable que l'on fait vibrer longitu dinalement, comme le montre la figure 127 ([2]); le mouvement de l

([1]) Voir lord RAYLEIGH, *loc. cit.*, 307 et 314.

([2]) Le procédé est applicable aux plaques d'air (KUNDT, *Pogg. Ann.*, CXXXVII, 456; 1869).

verge se communique à la plaque dans laquelle il se trouve transversal (cette disposition est particulièrement commode pour obte-



Fig. 122

nir les figures formées exclusivement de cercles). Dans tous les cas,



Fig. 123

il suffit de projeter du sable à la surface de la plaque pour manifester les nodales. Ces nodales coïncident en général d'une manière

très étroite avec les cercles et les diamètres de la théorie [1].

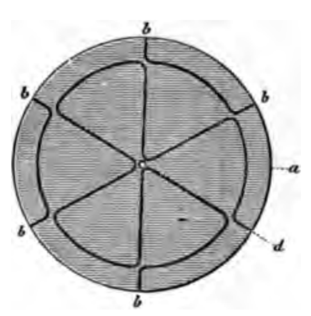


Fig. 124

Poisson a déterminé les rayons des cercles des figures sonores dépourvues de diamètres ; et Strehlke [2] a mesuré soigneusement quelques-uns de ces rayons sur une plaque de verre parfaitement travaillée. Voici les nombres obtenus, le rayon de la plaque vibrante étant pris pour unité.

	Calcul.	Observation.
1 cercle	0,6806	0,6782
2 cercles	0,3915	0,3913
	0,8420	0,8415
3 cercles	0,2568	0,2563
	0,5915	0,5911
	0,8938	0,8936

[1] En fixant certains points de la circonférence au moyen de bouchons convenablement placés, et en ébranlant la plaque par le centre, on obtient des figures à festons, connues depuis Chladni, mais dont la théorie n'a pas encore

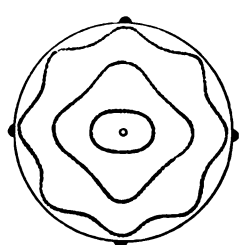


Fig. 125

été donnée : en même temps que ces festons apparaissent, le son monte sensiblement dans les premiers degrés, comme l'a constaté Wertheim, qui a remarqué en outre que ces figures ne se forment bien que sur les plaques de laiton (WERTHEIM, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXI, 19; 1851).

[2] STREHLKE, *Pogg. Ann.*, XCV, 577; 1855.

trehlke a encore vérifié sur d'autres disques, moins bons, quels-uns des résultats de la théorie de M. Kirchhoff :

	Calcul.	Observation.			
1 diamètre, 1 cercle.....	0,7814	0,781	0,783	0,781	0,783
2 diamètres, 1 cercle.....	0,8219	0,790	0,810	0,820	
3 diamètres, 1 cercle.....	0,8452	0,838	0,842		
1 diamètre, 2 cercles....	0,8706	0,869	0,869		
	0,4977	0,488	0,492		

Relativement à la hauteur, la théorie confirme la loi posée par ladni :

Sauf pour les sons répondant aux figures formées exclusivement diamètres (1), *le nombre des vibrations est proportionnel à* $(d+2c)^2$, étant le nombre des diamètres et c le nombre des cercles de la ure sonore correspondant au son considéré (2).

Si l'on représente par ut_1 le son le plus grave (2 diamètres, 0 cere), la théorie donne pour les figures formées de 1 cercle avec 0 diaètre $sol_1\sharp+$, avec 1 diamètre si_2-, avec 2 diamètres $sol_3\sharp+$, avec diamètres $ré_4\sharp+$,..., toutes valeurs extrêmement voisines de celles ue Chladni avait trouvées expérimentalement.

Sur une plaque un peu grande, on observe fréquemment la production simultanée de plusieurs figures sonores, le bord de la

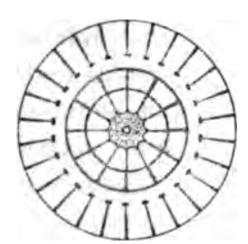


Fig. 126

laque se subdivisant en un plus grand nombre de parties que la ortion centrale, ce qui correspond à la production simultanée de lusieurs sons (lesquels peuvent être à l'unisson).

Effet d'un défaut de symétrie, d'une surcharge. — Dans une plaue parfaitement homogène, la position des nodales diamétrales est

(1) Ces sons forment une série très simple 2^2, 3^2, 4^2, ... (le nombre des diaètres étant 2, 3, 4, ...), mais complètement séparée des autres.

(2) Dans l'influence de la subdivision de la plaque sur la hauteur du son, un imètre vaut deux cercles.

complètement arbitraire, et ne dépend que du point d'attaque. Mais quand il y a un défaut de symétrie, la figure sonore n'est stable que pour deux positions dérivant l'une de l'autre par rotation de la moitié de l'angle compris entre deux diamètres adjacents du groupe. Et encore le défaut de symétrie ne doit-il pas être trop considérable, sinon la figure sonore ne serait plus du tout composée de cercles et de diamètres.

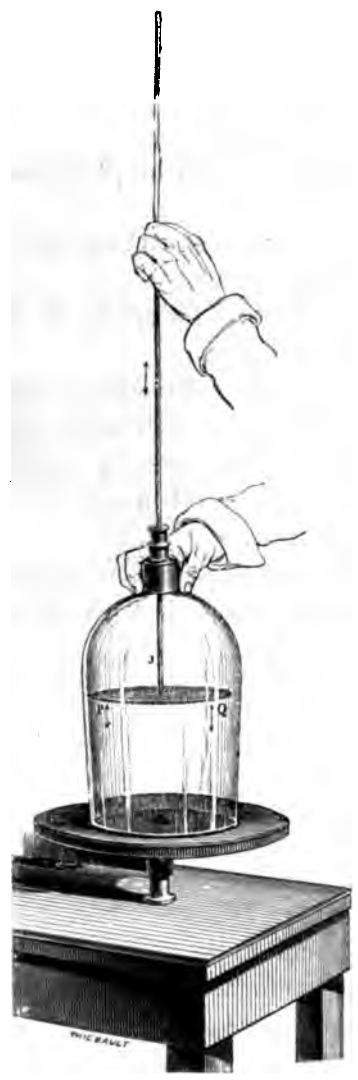


Fig. 127

Si l'on ajoute à la plaque une petite surcharge (en dehors d'une nodale circulaire), l'un des systèmes diamétraux passe par le point d'application de la surcharge, et la période de ce système n'est pas modifiée; la période de l'autre s'accroît.

Figures tracées par le lycopode. — Avec une poussière très légère, telle que la poudre de lycopode, les figures sonores offrent un aspect tout différent : on voit s'accumuler sur les ventres des amas de poudre en mouvement. Faraday a montré que ce phénomène, déjà connu de Chladni, est dû à de petits tourbillons d'air qui prennent naissance au-dessus des ventres, et auxquels on peut faire soutenir une mince feuille d'or à plusieurs millimètres de hauteur. Dans le vide les amas ventraux disparaissent, et toute la poussière se place sur les nodales.

En expérimentant avec la poudre de lycopode, Savart a vu la figure, oscillant entre ses deux positions d'équilibre, dépasser l'une d'elles sous l'action répétée de l'archet et prendre un mouvement continu de rotation en formant

: sorte de nuage annulaire. Il convient d'employer une plaque ace et large, rendant un son d'ordre élevé. On peut même, à :emple de Savart, supprimer le lycopode, et faire tomber sur la que un faisceau de lumière qui dessine une étoile tournant si idement que bientôt on ne distingue plus qu'un cercle lumineux.

Expériences de Chladni et de Savart. — Chladni et Savart ont :ore étudié les plaques polygonales et elliptiques : dans ces rnières les figures sonores se composent essentiellement d'elses et d'hyperboles homofocales.

Lois de Chladni. — En tous cas, la matière, la forme et le mode vibration (caractérisé par la figure sonore) étant les mêmes, *son d'une plaque homogène est en raison directe de l'épaisseur en raison inverse de la surface.*

Si la matière est différente, le son est *en raison directe de la racine rrée de la rigidité E et en raison inverse de la racine carrée du ids spécifique.*

Ces lois, énoncées pour la première fois par Chladni, sont des onséquences immédiates des principes de l'élasticité (387), et ont té confirmées par toutes les recherches ultérieures. On rapportera :ulement ici les mesures récentes de M. Mercadier [1] sur les plaues circulaires : une plaque d'acier, supportée par trois bouchons e liège suivant trois points du cercle de diamètre 0,68, et par onséquent disposée pour émettre le deuxième son, était entretenue électriquement en vibration, et ses oscillations s'inscrivaient à ôté de celles d'un diapason chronographique, comme dans les expériences sur les verges (378); la formule $N = K\frac{e}{d^2}$, où K est une onstante, e l'épaisseur et d le diamètre de la plaque, s'est vérifiée rès exactement dès que l'épaisseur de la plaque a été supérieure 2 millimètres.

Applications. — Les disques circulaires conviennent bien pour étulier l'élasticité des corps solides, ainsi que l'a montré Wertheim [2].

Les vibrations transversales des plaques sont utilisées dans les *ymbales* et les *tam-tams*, que leur richesse en sons supérieurs rend articulièrement remarquables. Dans les *téléphones*, le disque mé-

(1) MERCADIER, *Journal de physique*, (2), IV, 541 ; 1885.
(2) WERTHEIM, *loc. cit.*

tallique est évidemment susceptible de vibrations déterminées par sa nature et sa forme, mais il est, en outre, capable d'une résonnance générale (401), en vertu de laquelle il peut transmettre tout mouvement vibratoire. C'est presque exclusivement cette dernière propriété qui est mise en jeu dans l'appareil ([1]); la première, bien qu'elle ne se manifeste pas comme dans un disque *libre*, amène le renforcement de certains sons, renforcement fâcheux, car il a pour effet d'altérer le timbre. L'effet est d'autant moindre que l'épaisseur est plus faible et la surface plus grande, de sorte qu'une lame élastique large et mince constitue un bon récepteur pour tous les sons usuels. Tel est l'*audiphone* de M. Rhodes, de Chicago ([2]) : une plaque mince en caoutchouc durci, semblable à ces écrans que l'on tient à la main, et s'appliquant contre les dents de la mâchoire supérieure, reçoit les sons qui se propagent dans l'air et les transmet, par l'intermédiaire des os de

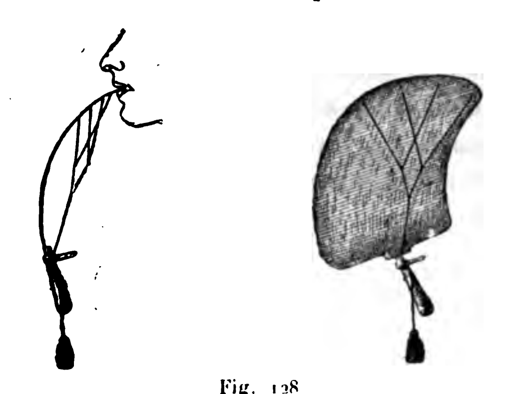


Fig. 128

la tête, jusqu'aux nerfs auditifs. Cet appareil, représenté figure 128 de profil et par derrière, et qui peut être réduit à une feuille de carton mince et flexible (carton à satiner) ([3]), paraît apte à rendre grand service aux sourds chez lesquels les nerfs de l'audition ne sont pas complètement atrophiés.

386. Timbres et cloches. — Aux disques circulaires se rattachent les timbres et les cloches. Tous ces instruments dans leurs

([1]) Voir Mercadier, *Annales télégraphiques;* 1886, passim.
([2]) Rhodes, *American patents;* 1879.
([3]) Colladon, *La Nature,* VIIIe année, 1er semestre, 161; 1880.

s se partagent en un nombre pair de segments séparés par les méridiennes. Lorsqu'une cloche sonne sa note fonda- elle se divise en 4 segments égaux, séparés par 2 plans laires; le point où frappe le battant est toujours le mi- segment. Les sons supérieurs correspondent à 6, 8, 10,... séparés par 3, 4, 5,... plans diamétraux. Pour rendre sen- plans nodaux, on peut employer le pendule acoustique (324). aussi remplir la cloche d'eau qui accuse les ventres par se creusant à sa surface et, si l'amplitude est suffisante, gouttelettes lancées en tous sens. L'expérience se fait très

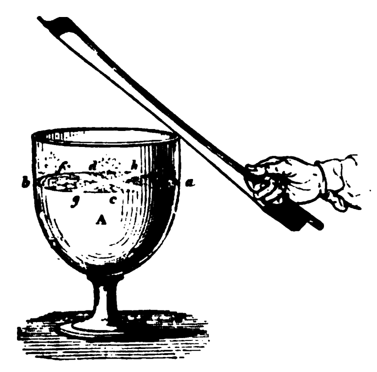


Fig. 129

c une cloche de verre, ou même un simple verre à boire, excite à l'archet ([1]). Au lieu d'eau, M. Melde emploie de u de l'alcool : les gouttelettes se détachent plus facilement,

([1]) ottant circulairement le bord du verre avec un doigt mouillé d'eau,



Fig. 130

t encore le partage en 4 parties vibrantes, mais la position de ces ange à chaque instant.

et, une fois formées, elles roulent à la surface, sans se mêler au liquide, dans une sorte de caléfaction qui est favorisée par l'élévation de la température.

Les nodales d'une cloche parfaitement régulière sont stables et le son émis est toujours le même, quel que soit le point d'attaque. Mais toute irrégularité dans la matière ou dans la forme entraîne des perturbations analogues à celles des plaques. Chladni le montrait avec une tasse à thé ([1]), qu'il ébranlait de façon que l'anse se trouvât sur une ligne nodale ou sur un ventre : dans le premier cas, la surcharge ne gênait pas le mouvement, et le son était plus élevé que dans le deuxième. La plupart des cloches par défaut de symétrie sont ainsi susceptibles d'émettre deux sons distincts, dont la coexistence ([2]) produit des battements (388) que l'on entend surtout quand le son est près de s'éteindre.

Si une cloche était suffisamment régulière et avait partout la même épaisseur, la série des sons, correspondant à 2, 3, 4,... nodales méridiennes, serait 2^2, 3^2, 4^2,..., comme dans une plaque ronde divisée de la même manière. Mais, en pratique, la hauteur et l'intensité relative des différents sons dépendent de la forme adoptée par le fondeur ([3]). Ainsi, la grosse cloche du dôme d'Erfurth, fondue en 1477, donne, d'après M. von Helmholtz, les notes mi_1, mi_2, $sol_2\sharp$, si_2, mi_3, $sol_3\sharp$, si_3, $ut_4\sharp$, qui sont toutes harmoniques, sauf la dernière.

Quelle que soit la forme adoptée, la loi de similitude (387) permet d'obtenir facilement une série de cloches dont les sons fondamentaux soient entre eux dans des rapports voulus, et par conséquent de construire des *carillons* harmonieux.

387. Systèmes semblables ([4]). — Considérons deux systèmes

([1]) L'expérience réussit non moins bien avec une cruche de grès (Tyndall).

([2]) Les deux directions du maximum et du minimum de résistance à la déformation correspondent seules à des vibrations simples; dans toute autre direction il se produit deux sons.

([3]) M. Sax a construit pour l'Opéra, à l'occasion de *Patrie*, une cloche faite d'une simple feuille de laiton emboutie en forme de cornet à renflements superposés. Cette cloche qui ne pèse que 7 kilogrammes, donne, dans un espace fermé, un son imitant complètement celui d'une cloche de 7,000 kilogrammes à l'air libre.

([4]) Cauchy, *Mémoires de l'Académie des sciences*, IX, 118; 1830.

mblables et semblablement constitués, γ étant le rapport des densités. Supposons que dans ces systèmes deux points semblablement lacés, x, y, z et sx, sy, sx, soient animés de mouvements vibratoires ls qu'aux époques respectives t et αt les déplacements soient entre ux comme $1 : \delta$; le rapport des vitesses sera $\frac{\delta}{\alpha}$, et celui des accéérations $\frac{\delta}{\alpha^2}$. Les masses des deux parallélipipèdes élémentaires $lxdydz$ et $s^3dxdydz$ étant comme $1 : s^3\gamma$, le rapport des forces d'inertie est $\frac{s^3\gamma\delta}{\alpha^2}$. D'autre part, les forces réelles sont proportionnelles aux coefficients d'élasticité E, aux déplacements relatifs $\frac{\delta}{s}$ et aux surfaces des éléments s^2, par conséquent à $Es\delta$. On doit donc avoir

$$\frac{s^3\gamma\delta}{\alpha^2} = Es\delta,$$

ou, δ disparaissant,

$$\alpha^2 = s^2 \frac{\gamma}{E},$$

équation qui détermine le rapport des périodes α en fonction du rapport de similitude s ainsi que de la densité γ et du coefficient d'élasticité E (¹). Si au lieu de la période on préfère considérer le nombre des vibrations, la formule précédente s'énoncera ainsi :

Dans des systèmes vibrants semblables et semblablement constitués, le nombre des vibrations est inversement proportionnel au rapport de similitude, en raison directe de la racine carrée du coefficient d'élasticité et en raison inverse de la racine carrée de la densité.

(¹) Les conditions aux limites sont les conditions habituelles.

CHAPITRE IX

COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES

I. — COMPOSITION DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES PARALLÈLES

388. Battements. — *Théorie.* — Quand deux mouvements vibratoires parallèles se superposent en un même point suivant une même direction, il y a *interférences* si les périodes sont égales, *battements* si les périodes sont presque égales.

L'étude détaillée que nous avons faite du premier phénomène (chap. IV) facilitera celle du second.

Soient en effet, se superposant au même point, deux mouvements vibratoires parallèles et de périodes peu différentes, ayant pour vitesses respectives

$$v = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right)$$

et

$$v' = a' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau'} - \varphi'\right).$$

Si l'on écrit cette dernière sous la forme

$$v' = a' \sin 2\pi\left\{\frac{t}{\tau} - \varphi + \frac{t}{\tau'} - \varphi' - \frac{t}{\tau} + \varphi\right\},$$

ou

$$v' = a' \sin 2\pi\left\{\frac{t}{\tau} - \varphi - \left(\varphi' - \varphi - \frac{\tau - \tau'}{\tau\tau'} t\right)\right\} \text{ (1)},$$

(1) Cette manière d'écrire la formule, en faisant passer une partie du coefficient de t dans la phase, n'aurait aucun sens physique si la partie englobée dans la phase n'était pas très petite; en tous cas elle laisse la véritable période incertaine.

oit immédiatement que le mouvement résultant peut être re-
é comme produit par la combinaison de deux mouvements
atoires, ayant la même période et présentant une différence de
se

$$\Phi = \varphi' - \varphi - \frac{\tau - \tau'}{\tau\tau'} t,$$

able avec le temps, mais lentement variable, puisque, par hy-
ièse, la différence $\tau - \tau'$ est petite relativement à τ et τ'. Pendant
lurée d'une vibration, Φ aura donc une valeur sensiblement
stante, et le phénomène se réduira à l'interférence de deux
ivements vibratoires avec cette valeur particulière de la diffé-
ce de phase. A la vibration suivante, Φ n'est plus tout à fait le
ne, les conditions d'interférence ont un peu changé. La variation
inuant, le phénomène au point considéré se déroule dans le
ps comme il se développait précédemment dans l'espace (357).
tensité du mouvement résultant est maximum aux époques pour
uelles la différence de phase est égale à un nombre entier quel-
que ou à un nombre pair de fois $1/2$, et minimum aux époques
la différence de phase est égale à un nombre impair de fois $1/2$.
es maxima d'intensité se succèdent à des époques distantes de

$$\theta = \frac{\tau\tau'}{\tau - \tau'},$$

même temps θ s'écoule entre deux minima consécutifs, et le
mps $\frac{\theta}{2}$ sépare un maximum du minimum suivant.

On observe donc une série de *coups* équidistants, séparés par des
lences tombant à égale distance des coups; et comme le temps θ
eut s'écrire

$$\theta = \frac{1}{\frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{N' - N},$$

et N' étant les nombres de vibrations complètes des deux sons
nsidérés pendant l'unité de temps, comme d'ailleurs le nombre B

des battements dans l'unité de temps est précisément égal à l'inverse de la durée de l'un d'eux, on voit que *le nombre des battements pendant l'unité de temps est égal à la différence des nombres absolus de vibrations des deux sons considérés*,

$$B = N' - N.$$

Le phénomène sera d'autant plus marqué que les intensités des deux sons primitifs seront plus près d'être égales : si elles sont égales entre elles et à 1, les coups battront avec une intensité 4, séparés par des silences complets ([1]).

Expériences. — Les battements s'observent aisément sur les instruments à sons simples, tels que les diapasons. Que l'on prenne deux gros diapasons munis de leur caisse d'harmonie et sonnant tous les deux la même note, ut_2 par exemple, que l'on désaccorde l'un de ces diapasons ([2]), et l'on entendra des battements énergiques, d'autant plus rapides que le désaccord sera plus prononcé. Deux grands tuyaux bouchés, à l'unisson, conviennent également bien, les harmoniques supérieurs étant très faibles dans ces instruments : en approchant le doigt de la lumière de l'un d'eux, on en fera descendre le son, et par suite on provoquera des battements. C'est même au moyen des battements que les organistes

([1]) Quand les amplitudes sont égales, on a, en introduisant tout de suite les nombres N et N' et en négligeant les phases φ et φ' que l'on peut toujours rendre nulles par un choix convenable de l'origine des temps,

$$[\sin 2\pi N t + \sin 2\pi N' t = 2 \cos \pi (N - N') t \sin 2\pi \frac{(N + N')t}{2},$$

produit dont le premier facteur montre la variation périodique de l'intensité, et dont le second indique que le nombre des vibrations du mouvement résultant est alors constamment égal à la moyenne $\frac{N + N'}{2}$ des nombres de vibrations des mouvements composants.

Quand les amplitudes sont différentes, la hauteur varie à chaque instant de même que l'intensité, le maximum étant $\frac{Na + N'a'}{a + a'}$, le minimum $\frac{Na - N'a'}{a - a'}$, et la hauteur moyenne pouvant être évaluée à $\frac{Na^2 + N'a'^2}{a^2 + a'^2}$ (Terquem et Boussinesq, *Journal de physique*, IV, 193 ; 1875).

([2]) Une surcharge (petite pièce de monnaie ou simple boulette de cire), collée vers le haut d'une des branches, suffit à abaisser le son.

:ordent les tuyaux, les coups s'espaçant de plus en plus à mesure : l'on approche de l'unisson.

Deux tuyaux ouverts, deux cordes de contrebasse ou de piano à ı près à l'unisson donneront encore des battements, mais plus ficiles à saisir. En effet les battements de deux sons complexes t eux-mêmes complexes : à chaque coup du son fondamental respondent deux coups du deuxième son élémentaire, trois du isième, etc.; tous ces battements, plus ou moins nets suivant intensités respectives des harmoniques, s'entremêlent et l'oreille çoit une modification de la hauteur et de la qualité plutôt que l'intensité du son [1]. Il est facile de rendre les battements visis à l'œil par la méthode optique (397), ou par les flammes manotriques (355). On peut aussi les enregistrer soit directement soit moyen du phonautographe.

Dans le cas de deux diapasons, l'inscription directe se fait avec *ppareil de Lissajous et Desains*, qui consiste essentiellement en un pason mobile traçant ses vibrations sur une plaque de verre noirportée par un diapason fixe, également en vibration. Dans le dèle primitif, le diapason mobile était déplacé à la main, au-des de la plaque de verre simplement collée à la cire sur le diapaa fixe. L'instrument actuel permet d'effectuer commodément une mbinaison quelconque des deux mouvements vibratoires. C'est ı solide banc en fonte, auquel s'adapte d'une manière invariable ın des diapasons et sur lequel peut glisser un chariot portant ıutre diapason; ce dernier est muni du style; au premier est tachée la plaque de verre noircie. Les deux diapasons étant mis ı vibration, il suffit de tirer le chariot pour obtenir sur le verre ıfumé le tracé de la combinaison des deux mouvements. On peut ailleurs donner à ces mouvements telle relation de direction que n veut, en orientant convenablement les deux diapasons, l'un

[1] L'effet est très frappant sur la sirène double de M. von Helmholtz (355), suiıt que l'on met ou non les caisses résonnantes. Dans le premier cas, le son ıdamental prédomine; et si l'on détermine la production des battements en ırnant la manivelle *d*, les renforcements et les affaiblissements de l'intené sont très sensibles. Si l'on enlève au contraire les caisses résonnantes, les ıs supérieurs atteignent une intensité relativement grande, et la variation ntensité pendant le battement devient beaucoup moins saisissante que celle la hauteur ou du timbre (von HELMHOLTZ, *loc. cit.*, 208).

sur le banc, l'autre sur le chariot qui le porte. Dans le cas actuel, les deux diapasons seront placés parallèlement aux rails sur lesquels glisse le chariot.

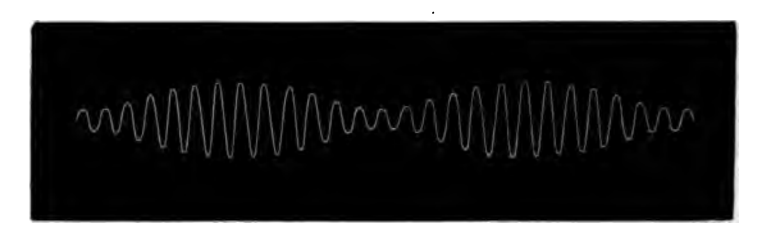


Fig. 131

La figure 131 montre un graphique ainsi obtenu.

Application à la mesure de la hauteur absolue des sons. — Sauveur [1], qui le premier étudia les battements, en avait conclu un moyen de déterminer la hauteur absolue des sons. Si en effet les deux sons N et N' donnent B battements, on a

$$N' - N = B.$$

Si d'autre part on connaît l'intervalle I des deux sons, on a en outre

$$\frac{N'}{N} = I.$$

Ces deux relations définissent complètement les nombres N et N'. Mais la méthode, exacte en principe, est à peu près impraticable, parce que deux sons ne donnent des battements faciles à compter que quand N' diffère peu de N, et alors l'intervalle I est très difficile à évaluer.

Scheibler [2] réussit à éviter cet inconvénient. Il disposa une série de cinquante-six diapasons échelonnés du la_2 de 220 vibrations au la_3 de 440 vibrations par degrés de quatre vibrations. Chacun de ces degrés pouvant être déterminé avec précision par les battements, et l'intervalle entier pouvant être apprécié très exactement à l'oreille, il eut ainsi un *tonomètre*, au moyen duquel il con-

(1) Sauveur, *Histoire de l'Académie des sciences*, 134; 1700.
(2) Scheibler, *Pogg. Ann.*, XXIX, 390; et XXXII, 333 et 492; 1833-34.

issait d'abord la hauteur absolue de chacun des diapasons de la rie par une succession d'équations évidentes, et qui lui permettait outre d'obtenir aisément la hauteur absolue d'un son quelconque tre 220 et 440 vibrations, par la simple mesure du nombre des ttements que ce son donnait avec celui des diapasons dont il ait le plus voisin. On pouvait également opérer sur un son plus ave ou plus aigu, à condition de le ramener d'abord par une série octaves entre les limites voulues.

M. Kœnig (1) a construit un grand tonomètre allant de 16 à 1000 vibrations (2) et comprenant par conséquent toute l'échelle s sons perceptibles.

389. Sons résultants. — *Phénomènes.* — *Quand deux sons ffisamment intenses* N *et* N′ (distants de moins d'une octave (3)), *se nt entendre simultanément, de leur concours naît un troisième son ont le nombre de vibrations est*

$$R = N' - N.$$

C'est le son résultant, signalé presque en même temps par Sorge (4) de Hambourg, Romieu (5) de Montpellier et Tartini (6) de Padoue.

Dans les cabinets de physique se trouvent ordinairement deux tuyaux faisant entendre isolément ut_4 et fa_4, et dont le son résultant est fa_2. Pour rendre ce fa_2 plus distinct, on le produit quelque temps au moyen d'un troisième tuyau fa_2 que l'on fait taire ensuite : le son résultant semble alors continuer la voix de ce dernier tuyau devenu silencieux. On peut encore manifester le son résultant par les battements qu'il donnera avec un son voisin.

(1) Kœnig, *Catalogue d'appareils d'acoustique*. Paris ; 1882.

(2) De 16^{vd} à 256^{vd}, huit diapasons à curseur suffisent, chacun d'eux pouvant, selon la position du curseur, donner trente-deux notes différentes. Dans la dernière octave, les diapasons sont remplacés par des tiges droites (332), dont la plus petite $ut_{10} = 32768^{vd}$, ne rendant même plus de son perceptible, peut servir de frappeur sans qu'on ait à craindre la production de sa propre note.

(3) Cette restriction se comprendra plus loin (390).

(4) Sorge, *Anweisung zur Stimmung der Orgelwerke und des Claviers*. Hamburg ; 1744.

(5) Romieu, *Mémoires de l'Académie de Montpellier ;* 1753.

(6) Tartini, *Traité de l'harmonie*. Padoue ; 1754.

Les instruments qui conviennent le mieux pour étudier les sons résultants sont les diapasons (nous y reviendrons bientôt), et particulièrement les diapasons de l'octave 5.

Dans les cours on emploiera avec avantage l'*appareil de Kœnig*, qui se compose de deux tubes de verre [1], frottés longitudinalement par une roue garnie de drap mouillé tournant entre ces deux tubes. A l'aide de ce dispositif on prolonge autant qu'on le désire les sons primaires, et par suite aussi le son résultant, qu'il est dès lors facile de saisir et que l'on peut au besoin mettre en évidence par l'un des artifices indiqués plus haut.

Explication d'Young. — Young [2] attribuait ce son à des battements devenus suffisamment rapides. Et de fait le son résultant se rattache d'une façon incontestable aux battements. A côté d'un diapason donnant $ut_3 = 256^{vd}$, faisons résonner un deuxième diapason dont nous élevons graduellement le ton à partir de l'unisson, et voici les phénomènes que nous constatons [3] : les *battements*, d'abord nettement séparés, se changent avant qu'on arrive à la seconde 288^{vd} (32 battements) en un *roulement* de plus en plus rapide et qui, dans le voisinage de la tierce 320^{vd} (64 battements), n'est plus distinct que comme une simple *dureté* du son [4]. En même temps, on commence à entendre faiblement un ut_1 64^{vd} qui s'élève jusqu'à l'ut_2 128^{vd}, à mesure que l'on approche de la quinte 384^{vd} (128 battements), tandis que la dureté du son disparaît complètement. De 384^{vd} à 448^{vd} le son résultant monte au sol_2 192^{vd} et prend une intensité surprenante relativement à celle qu'il avait eue jusque-là. Bornons-nous à cette première étape, et comparons-en les phénomènes à ceux que l'on obtient avec une roue de Savart, dont on augmente progressivement la vitesse. Ce sont d'abord des *chocs successifs*, puis un *ronflement* qui persiste encore quand il y a 128 chocs à la seconde ; mais en dehors de ce ronflement et

(1) L'appareil est accompagné de douze tubes accordés aux notes $ut_6 = 8$, $ré_6 = 9$, $mi_6 = 10$, $fa_6 + = 11$, $sol_6 = 12$, $la_6 - = 13$, $la_6\sharp + = 14$, $si_6 = 15$, $ut_7 = 16$, $mi_7 = 20$, $fa_7\sharp + = 23$, ces derniers pour les sons résultants des intervalles harmoniques (390).

(2) Young, *Phil. Trans.*; 1800; et *Miscellaneous Works*, I, 83.

(3) Voir Kœnig, *loc. cit.*, 100.

(4) En tout cela, M. Kœnig est complètement d'accord avec M. von Helmholtz qui a le premier appelé l'attention sur ce changement des battements en dureté.

ı même temps on entend distinctement le son ut_3 128^{vd} (¹). La ssemblance avec les battements est complète (²).

Théorie de M. von Helmholtz (³). — Partant de ce fait que les sons rimaires doivent avoir une certaine intensité pour donner lieu à es sons résultants sensibles, M. von Helmholtz considère ceux-ci omme une sorte de *perturbation* du mouvement vibratoire, devenu op violent pour suivre les lois ordinaires.

Quand les vibrations pendulaires sont suffisamment petites, les rces élastiques mises en jeu par les déplacements sont proporonnelles à ces déplacements; et le principe de la superposition ure et simple des petits mouvements, dont nous avons fait si souvent sage jusqu'ici, s'applique en toute rigueur. Quand au contraire s amplitudes des vibrations sont assez grandes pour que le carré es déplacements puisse exercer une influence notable sur la vaeur des forces, le calcul montre qu'il se développe un nouveau ystème de mouvements vibratoires simples. Un diapason ou une cloche que l'on fait vibrer énergiquement émet l'octave (⁴), tandis que, vibrant avec une force modérée, l'instrument ne donne que des sons supérieurs non harmoniques. Si deux systèmes d'ondes à grandes amplitudes viennent se rencontrer en un même point, deux classes de sons résultants apparaissent, ayant pour types : d'une part, le *son différentiel* dont le nombre de vibrations est égal à la différence des nombres de vibrations des sons primaires; d'autre part, un *son additionnel* dont le nombre de vibrations est égal à la somme des nombres de vibrations des mêmes sons (⁵). Ce deuxième son échappe évidemment à l'explication d'Young.

(¹) Le ronflement domine si les dents rencontrent une lame de bois dur; le son est plus distinct avec une carte pointue et peu résistante.

(²) La coexistence du bruit des chocs séparés et du son continu concorde avec les deux faits suivants, bien connus : 1° il suffit de 16 impulsions primaires pour donner un son (332); 2° l'oreille constate la non-coïncidence de deux pendules dont l'oscillation ne diffère que de 1/100 de seconde, et par conséquent distingue deux impulsions séparées de 1/100 de seconde. (D'après ce qui précède, la rapidité du pouvoir de perception de l'oreille atteint même 1/130 de seconde.)

(³) Helmholtz, *loc. cit.*, 191 et 519.

(⁴) En faisant vibrer fortement un diapason à branches longues et minces on peut, à l'aide des résonnateurs, constater jusqu'à l'harmonique 4. (Cf. Gripon, *Réunion des sociétés savantes*, 1880; et Kœnig, *Quelques expériences*, p. 193.)

(⁵) De même que les sons primaires, les harmoniques donnent des sons résultants : ces derniers s'entendent assez facilement sur le violon et sur l'harmonium.

Importance musicale des sons résultants. — Les sons résultants jouent un rôle important en musique, par l'influence qu'ils exercent sur la justesse des accords.

Considérons par exemple les deux accords parfaits (335) complétés par l'octave.

Dans l'accord parfait majeur

$$1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad 2,$$

les sons résultants sont

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad 1,$$

c'est-à-dire la double octave grave du son fondamental, l'octave de ce même son, l'octave grave de la quinte, et le son fondamental; tous ces sons renforcent simplement les sons primaires et particulièrement le son fondamental; l'accord est franc et solide.

L'accord parfait mineur

$$1 \quad \frac{6}{5} \quad \frac{3}{2} \quad 2,$$

admet pour sons résultants

$$\frac{1}{5} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{5} \quad 1,$$

c'est-à-dire la double octave basse de la tierce majeure grave, la double octave basse de la tierce mineure, l'octave basse du son fondamental, la tierce majeure grave, enfin le son fondamental. Ici un son nouveau apparaît répété, la tierce majeure grave, qui est en dissonnance avec la quinte. De là le caractère indécis, inquiet, de l'accord mineur (1).

390. Battements des intervalles harmoniques. — Reprenons notre expérience avec les deux diapasons rendant des sons simples, l'un fixe à ut_3, l'autre mobile à partir de la même note; et

(1) Les considérations précédentes s'appliquent aux différentes formes que l'on peut donner à l'accord parfait par *renversement*, c'est-à-dire en transposant d'une octave une ou plusieurs de ces notes. Les sons résultants se trouvent alors modifiés, et introduisent ces dissonnances secondaires dont Palestrina sut tirer un si admirable parti.

poussons celui-ci au-dessus de 448^{vd} : le son résultant différentiel du premier ordre, très net, s'affaiblit rapidement en même temps qu'un autre son résultant beaucoup moins intense, dont l'existence pouvait cependant être constatée depuis la tierce jusqu'à la quinte pendant qu'il descendait de sol_2 à ut_2 ; et successivement reviennent, vers 472^{vd} la dureté, vers 488^{vd} le roulement, puis les battements séparés qui cessent à leur tour quand on arrive à l'octave $ut_4 = 512^{vd}$. Au delà, les battements reparaissent, pour ne bientôt plus s'entendre que comme une simple dureté, et ainsi de suite. Sur chaque harmonique kN se manifestent des battements dont le nombre est m quand le son $k\mathrm{N} \pm m$ s'unit au son N; et ces battements peuvent amener des sons continus à la condition d'être assez nombreux et assez intenses.

Hallström [1] expliquait les battements des intervalles harmoniques par l'intervention des sons résultants. Ainsi les 2 battements donnés par $8\mathrm{N}-2$ et N (battements très nets si $\mathrm{N}=64^{vd}=ut_1$) proviendraient de la combinaison successive de N [2] d'abord avec le son $8\mathrm{N}-2$, d'où le résultant $7\mathrm{N}-2$, puis avec ce son $7\mathrm{N}-2$, d'où le résultant $6\mathrm{N}-2$, puis avec ce son $6\mathrm{N}-2$,... enfin avec le son $\mathrm{N}-2$, d'où 2 battements. Mais ces sons intermédiaires échappent absolument à l'observation. Il est donc plus simple de supposer que les battements des intervalles harmoniques sont dus, comme ceux de l'unisson, à la composition directe des ondes sonores, amenant la coïncidence périodique des maxima de même signe [3]. Les tracés graphiques exécutés au moyen de l'appareil de Lissajous et Desains semblent confirmer cette manière de voir, et en tous cas seront utilement consultés dans ces questions délicates.

391. Sons de variation. — Deux sons d'égale intensité, dont les nombres de vibrations N et N′ sont voisins, équivalent à un son unique, de hauteur $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{N}+\mathrm{N}'}{2}$ et d'intensité périodiquement variable, exécutant $\mathrm{N}' - \mathrm{N} = \mathrm{B}$ battements (388).

(1) Hallstroem, *Pogg. Ann.*, XXIV, 438; 1831.
(2) Le son N est, naturellement, supposé simple; car s'il était accompagné d'harmoniques, les battements s'expliqueraient par là même.
(3) Kœnig, *loc. cit.*, 95; et Radau, *Moniteur scientifique de Quesneville*, (3), VI, 333; 1876.

Réciproquement, un son H, dont l'intensité est affectée de B riations périodiques dans l'unité de temps, donnera naissanc deux *sons de variation* $H+\frac{B}{2}$ et $H-\frac{B}{2}$.

Nous avons en effet

$$\cos\pi Bt \sin 2\pi Ht = \frac{1}{2}\sin 2\pi\left(H+\frac{B}{2}\right)t+\frac{1}{2}\sin 2\pi\left(H-\frac{B}{2}\right)t.$$

Ces sons de variation, comme l'a indiqué M. Radau [1], se c tatent dans l'expérience d'interférence de Lissajous (355), qu l'écran découpé tourne rapidement. Si S est le nombre des secte vibrants et T le nombre des tours de l'écran pendant une secon on a $B=ST$.

On peut opérer sans écran, à la condition d'imprimer à la pla un mouvement de rotation dans son plan. En faisant ainsi tour à raison de $19^T,5$ par seconde, une plaque qui rendait le $fa_3=3$ lorsqu'elle se divisait en 4 secteurs, M. Beetz [2] a observé les d sons $sol_3=380^{vd}$ et $mi_3\flat=300^{vd}$. On avait en effet

$$H=340,\qquad S=4,\qquad T=19,5,$$

d'où

$$H+\frac{ST}{2}=379\qquad \text{et}\qquad H-\frac{ST}{2}=301.$$

Un procédé plus direct pour obtenir les sons de var consiste à faire tourner devant un diapason (ut_4) un dis sirène à grands trous. On intercale entre le disque et le di un tuyau renforçant d'un diamètre égal à celui des trous du de sorte que le son retentit énergiquement chaque fois qu trous passe en face du tuyau. Les sons de variation se pe alors avec une netteté surprenante; selon que la vitesse de est accélérée ou ralentie, on les entend très bien s'écar rapprocher [3].

392. Superposition de mouvements pendulai

(1) RADAU, *Moniteur scientifique de Quesneville*, (2), II, 430, et III, 7

(2) BEETZ, *Pogg. Ann.*, CXXX, 313 et 587; 1867.

(3) KŒNIG, *loc. cit.*, 139.

[harm]oniques. — Un cas important de l'addition des mouvements [p]endulaires parallèles se rencontre quand les nombres de vibrations [d]es mouvements composants sont des multiples entiers du plus petit d'entre eux, ou, ce qui est la même chose, quand en un même point se superposent un son fondamental et ses harmoniques. Le mouvement résultant admet alors évidemment pour période celle du son fondamental. La figure ci-jointe, empruntée au livre de

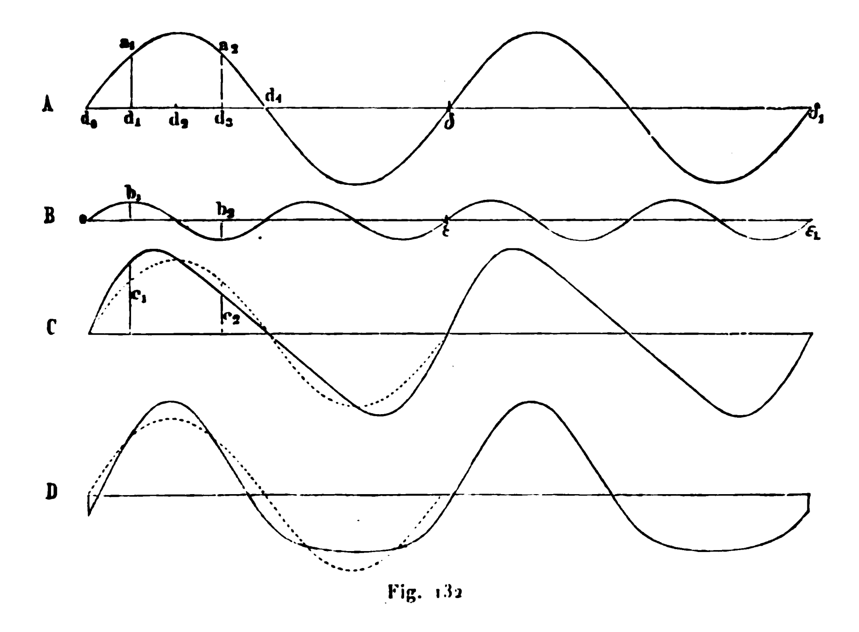


Fig. 132

M. von Helmholtz, présente en C le résultat de la composition de deux mouvements vibratoires simples A et B, dont les nombres de vibrations sont entre eux comme 1 : 2, et dont la différence de phase est 0 (les points d_0 et e se superposent, les ordonnées c_1, c_2... sont les sommes géométriques des ordonnées a_1 et b_1, a_2 et b_2...). En D la différence de phase est 1/8 de la période du son fondamental (le point e coïncide avec le point d_1). Sur la moitié gauche de la figure on a marqué en ponctué la courbe A, afin de rendre immédiatement sensible à l'œil la composition des deux mouvements. L'examen de la moitié droite où manque ce repère, montre que la courbe résultante ne porte pas nécessairement l'indication des mouvements composants.

Sans doute l'existence d'un son supérieur peut s'accuser par des dentelures sur les festons de la sinussoïde fondamentale, comme dans l'exemple représenté fig. 108, mais le plus souvent l'œil sera incapable de démêler sur la courbe résultante la nature des mouvements composants. Comment pourrait-il y réussir sur des courbes telles que celles des fig. 10 et 11?

En tous cas, on conçoit que le mode de superposition que nous venons d'indiquer est susceptible de donner pour une même période une infinité de courbes caractérisant une infinité de mouvements vibratoires d'espèces différentes.

393. Théorème de Fourier (¹). — Fourier a démontré qu'*une fonction périodique quelconque, de période* τ, *peut toujours et d'une seule manière, être remplacée par une somme de fonctions circulaires de périodes* $\tau, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{3} \dots,$

$$A \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right) + A' \cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{\tau}{2}} - \varphi'\right) + A'' \cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{\tau}{3}} - \varphi''\right) + \dots$$

les coefficients $A, A', A'' \dots, \varphi, \varphi', \varphi'' \dots$, en nombre infini, étant calculables dans chaque cas.

Il en résulte que *tout mouvement vibratoire peut toujours et d'une seule manière être considéré comme résultant de la superposition d'un certain nombre de mouvements vibratoires pendulaires.*

II. — COMPOSITION DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES RECTANGULAIRES.

394. Étude théorique de la superposition de deux mouvements vibratoires rectangulaires. — *Équations fondamentales.* — Examinons maintenant deux mouvements vibratoires à angle droit. Les mouvements étant toujours supposés pendulaires, si nous prenons pour axes les deux directions suivant lesquelles

(¹) Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*. Paris : 1821.

ils s'effectuent, les déplacements pourront se représenter par

$$x = k \cos 2\pi (Mt - \varphi),$$

et

$$y = l \cos 2\pi N t,$$

M et N étant les nombres de vibrations dans l'unité de temps, et φ la différence de phase des deux mouvements composants dont les amplitudes sont respectivement k et l. La trajectoire du mouvement résultant s'obtiendra par l'élimination de t entre ces deux équations.

Cette élimination, difficile dans le cas général, est au contraire très simple dans certains cas particuliers, les plus importants pour la pratique.

Unisson. — Supposons d'abord les deux mouvements à l'unisson, M=N, on a alors

$$\frac{x}{k} = \cos 2\pi N t \cos 2\pi\varphi + \sin 2\pi N t \sin 2\pi\varphi,$$

ou

$$\frac{x}{k} = \frac{y}{l} \cos 2\pi\varphi \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}} \sin 2\pi\varphi,$$

et en conséquence

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{2xy}{kl} \cos 2\pi\varphi = \sin^2 2\pi\varphi,$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et inscrite dans le rectangle $2k, 2l$, suivant une orientation qui dépend de l'angle $2\pi\varphi$.

Car, si l'on fait successivement $x = k$ et $y = l$ dans l'équation de l'ellipse, il vient $LT = l \cos 2\pi\varphi$ et $L'T' = k \cos 2\pi\varphi$, d'où

$$\cos 2\pi\varphi = \frac{LT}{OL'} = \frac{L'T'}{OL}.$$

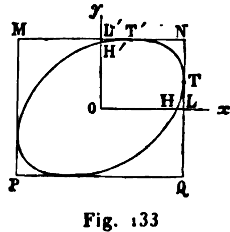


Fig. 133

De même, en faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$, on trouve

$$\sin 2\pi\varphi = \frac{OH'}{OL'} = \frac{OH}{OL}.$$

Si la différence de phase des deux mouvements composan
nulle, en d'autres termes si $\varphi = 0$, l'équation devient

$$\frac{x}{k} - \frac{y}{l} = 0;$$

l'ellipse se réduit à une droite PN ayant pour coefficient
laire $\frac{l}{k}$; et puisque x et y partent au début de k et de l
s'annuler en même temps et arriver ensuite à $-k$, $-l$, la

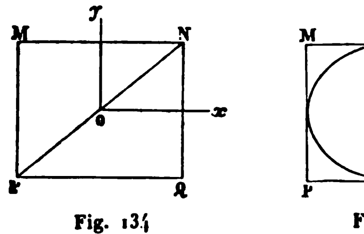


Fig. 134

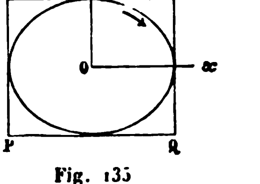


Fig. 135

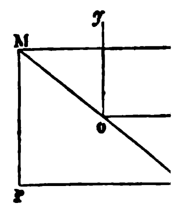


Fig. 136

est décrite d'abord de N en P, puis de P en N, et ainsi de suite
finiment.

Si $\varphi = \frac{1}{4}$, l'équation représente une ellipse rapportée à se

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1,$$

et les mouvements composants étant alors

$$x = k \sin 2\pi N t \quad \text{et} \quad y = l \cos 2\pi N t,$$

on voit que l'ellipse est parcourue dans le sens de la flèc
le sens du mouvement des aiguilles d'une montre : c
de gauche à droite (pour un observateur en O) est dite

Quand en outre $k = l$, l'ellipse devient un cercle.

Si $\varphi = \frac{1}{2}$, on a une droite MQ,

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} = 0,$$

symétrique de la précédente PN par rapport aux axes, et parcourue d'abord de M en Q, puis de Q en M, et ainsi de suite.

En résumé, pour les valeurs de φ comprises entre o et $1/2$, la courbe est une ellipse ayant son grand axe dirigé dans l'angle xOy si la différence de phase est inférieure à $1/4$, et dans l'angle $x'Oy$ si cette différence est supérieure à $1/4$.

Puis, φ croissant de $1/2$ à 1, la courbe repasse en sens inverse par les mêmes formes; et ces diverses trajectoires sont parcourues en sens contraire : la giration est *sinistrorsum*.

Les valeurs de φ supérieures à 1 redonnent les mêmes courbes, puisque d'une manière générale une différence de phase égale à un nombre entier plus une fraction n'intervient algébriquement que par cette fraction seule.

Accords harmoniques. — Quand les nombres de vibrations M et N sont dans le rapport de p à 1, on peut poser

$$x = k\cos 2\pi(p\mathrm{N}t - \varphi),$$
$$y = l\cos 2\pi\mathrm{N}t;$$

et, si l'on développe l'expression de x, il vient

$$k\cos 2\pi\varphi\left[(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^p - \frac{p(p-1)}{1.2}(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^{p-2}\sin^2 2\pi\mathrm{N}t + \ldots\right]$$
$$k\sin 2\pi\varphi\left[\frac{p}{1}(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^{p-1}\sin 2\pi\mathrm{N}t - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^{p-3}\sin^3 2\pi\mathrm{N}t + \ldots\right],$$

ou, puisque $\cos 2\pi\mathrm{N}t = \frac{y}{l}$ et $\sin 2\pi\mathrm{N}t = \pm\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}$,

$$x = k\cos 2\pi\varphi\left[\frac{y^p}{l^p} - \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{y^{p-2}}{l^{p-2}}\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right) + \ldots\right]$$
$$\pm k\sin 2\pi\varphi\left[\frac{p}{1}\frac{y^{p-1}}{l^{p-1}}\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{y^{p-3}}{l^{p-3}}\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots\right].$$

On a donc

pour $p = 2$ (octave)

$$x = k\cos 2\pi\varphi\left(2\frac{y^2}{l^2} - 1\right) \pm k\sin 2\pi\varphi\left(2\frac{y}{l}\right)\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}},$$

pour $p=3$ (douzième)

$$x=k\cos 2\pi\varphi\left(4\frac{y^3}{l^3}-3\frac{y}{l}\right)\pm k\sin 2\pi\varphi\left(4\frac{y^2}{l^2}-1\right)\sqrt{1-\frac{y^2}{l^2}}.$$

. . . .

La courbe $p=2$ est une parabole

$$x=k\left(2\frac{y^2}{l^2}-1\right) \qquad \text{quand} \qquad \varphi=0,$$

$$x=-k\left(2\frac{y^2}{l^2}-1\right) \qquad \text{quand} \qquad \varphi=\frac{1}{2}.$$

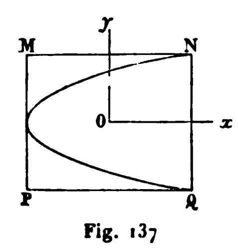


Fig. 137

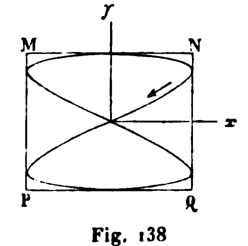


Fig. 138

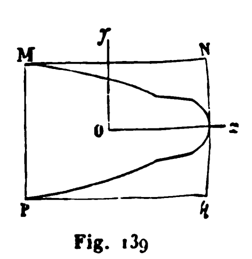


Fig. 139

Lorsque $\varphi=\frac{1}{4}$, l'équation devient

$$x=\pm k\left(2\frac{y}{l}\right)\sqrt{1-\frac{y^2}{l^2}}:$$

elle représente une courbe en forme de 8, passant par l'origine qui est à la fois centre et point multiple. La courbe a deux sommets verticaux

$$x=0, \qquad y=\pm l,$$

et quatre sommets horizontaux

$$y=\pm\frac{l}{\sqrt{2}}, \qquad x=\pm k.$$

Entre ces deux figures, les variations de la phase amènent une série de formes toutes inscrites dans le rectangle $2k, 2l$, et que l'on peut concevoir en supposant que le 8 se plie par le milieu et rapproche ses branches, de façon à arriver enfin à l'arc parabolique.

a courbe $p=3$ se réduit à une S,

$$x = k\left(4\cdot\frac{y^3}{l^3} - 3\cdot\frac{y}{l}\right) \qquad \text{quand} \qquad \varphi = 0,$$

$$x = -k\left(4\cdot\frac{y^3}{l^3} - 3\cdot\frac{y}{l}\right) \qquad \text{quand} \qquad \varphi = \frac{1}{2}.$$

'our $\varphi = \frac{1}{4}$, on a une sorte de 8 à double croisement, dont l'é-
ition est

$$x = \pm k\left(4\cdot\frac{y^2}{l^2} - 1\right)\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}:$$

courbe offre un sommet vertical à chaque extrémité $\pm l$ de l'axe
nsverse, et trois sommets horizontaux sur chacun des côtés
$= \pm k$ du rectangle circonscrit $\left(\text{en } y = 0 \text{ et } y = \pm l\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$.

Cas général. — D'une manière générale, si les nombres de vi-
ations des deux mouvements vibratoires rectangulaires M et N
nt dans le rapport $p : q$, p et q étant des nombres premiers
ntre eux, la courbe résultant de leur combinaison présentera p
ntacts avec chacun des côtés ($x = \pm k$) et q contacts avec chacun
s côtés ($y = \pm l$) du rectangle $2k, 2l$. En effet, dans l'intervalle de
mps $pT = q\tau$ $\left(T \text{ et } \tau \text{ étant les périodes } \frac{1}{M} \text{ et } \frac{1}{N} \text{ des deux mouve-}\right.$
$\left.\text{ents}\right)$, x devient p fois égal à k, et y devient q fois égal à l. Comme
ailleurs elle est continue, *la trajectoire a* p *sommets horizontaux*
q *sommets verticaux*. Au bout du temps $pT = q\tau$, le mobile est
venu au point de départ : la même trajectoire est ensuite par-
ourue indéfiniment dans les mêmes conditions.

Représentation géométrique de Lissajous. — Lissajous [1] a donné
n moyen élégant de construire et de se représenter les différentes
gures qui correspondent à un même rapport des mouvements
omposants.

[1] LISSAJOUS, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 147; 1857.

On peut toujours, en choisissant convenablement l'unité de temps, mettre les deux déplacements sous la forme

$$x = k \cos m (t - \theta),$$
$$y = l \cos t,$$

où m désigne un nombre entier ou fractionnaire.

Que l'on trace la courbe ABCDE... représentée par l'équation $x = k \cos m (t - \theta)$; que l'on construise d'autre part le cylindre circulaire droit IKLN de diamètre $2l$; qu'on enroule la courbe ABCDE... sur le cylindre en plaçant aA suivant la génératrice IK; enfin que l'on projette sur le plan méridien IN la courbe ainsi enroulée : cette projection sera la figure cherchée.

Considérons en effet un point M de la courbe cylindrique et la projection P de ce point sur le plan IN; l'arc am étant par définition égal à t, nous avons

$$OQ = l \cos t = y.$$

D'ailleurs

$$PQ = Mm = x.$$

Or PQ et OQ sont les coordonnées du

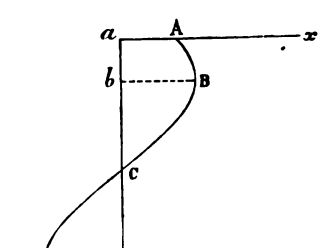


Fig. 140

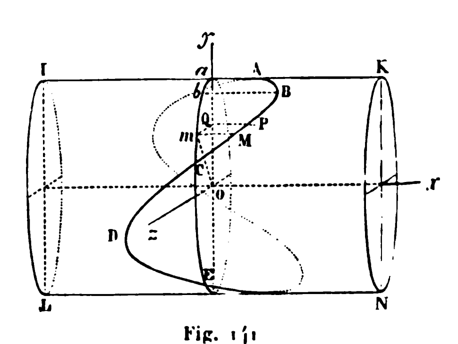


Fig. 141

point P par rapport à l'axe du cylindre Ox et au diamètre Oa. Le lieu du point P est donc bien la trajectoire du mouvement résultant.

La figure se rapporte au cas de $m = 2$ (octave). En général, m ant égal à $\frac{p}{q}$, le point M exécutera p sinuosités complètes de part d'autre du cercle moyen, tout en effectuant q tours entiers autour ı cylindre. On voit ainsi immédiatement que la trajectoire du ›int P est tangente p fois à chacune des lignes $x = \pm k$, et q fois à ıacune des lignes $x = \pm l$.

Si, les deux mouvements composants restant les mêmes, la diffé-ınce de phase varie, en d'autres termes si le point A est un autre oint de la sinussoïde ABCDE..., on aura encore la même courbe aroulée sur le même cylindre, seulement le plan de projection ɜra un autre plan méridien. Au lieu de changer le plan de pro-ɜction, nous pouvons supposer que ce plan est fixe et que le cy-ındre tourne sur lui-même, avec la courbe qu'il porte, d'une frac-ion de tour égale à $\frac{q}{p}\varphi$ (1), c'est-à-dire d'une fraction de tour égale la phase rapportée à la plus longue période, phase que nous lésignerons par ψ. Si donc, ayant décalqué la courbe ABCDE... ur un cylindre de verre, on fait tourner ce cylindre sur lui-nême, l'œil placé un peu loin dans la direction Oz verra suc-ɜssivement toutes les formes de la courbe correspondant à la raleur choisie du rapport $\frac{p}{q} = m$. On peut, comme l'a indiqué M. Terquem (2), découper dans des feuilles de tôle les sinussoïdes k ıue l'on enroule ensuite suivant les cylindres l : on a ainsi des ɟabarits qu'il suffit de faire tourner entre une source de lumière ›arallèle et un écran pour que leur ombre sur cet écran affecte les liverses formes de chaque type.

La figure se reproduit pour une rotation du cylindre égale à $\frac{1^{\text{tour}}}{p}$, c'est-à-dire pour une variation de ψ égale à $\frac{1}{p}$. Les formes sim-›lifiées par la superposition des parties antérieures et postérieures

(1) Cette valeur résulte immédiatement de la construction géométrique de la courbe; on peut aussi la déduire de l'identité $\frac{M}{N}\theta = 2\pi\varphi$, d'où, $\frac{M}{N}$ étant égal à $\frac{p}{q}$, on tire $\theta = 2\pi\varphi\frac{q}{p}$, ou $\theta = 2\pi\psi$, si l'on pose $\varphi\frac{q}{p} = \psi$.

(2) Terquem, *Séances de la Société française de physique*; 1876, p. 102.

de la courbe cylindrique reparaissent après une rotation de $\frac{1^{\text{tour}}}{2p}$: ces formes répondent aux phases $\psi = 0$, $\psi = \frac{1}{2p}$, $= \frac{2}{2p}, \ldots$

395. Appareils montrant les figures résultant de la combinaison de deux mouvements vibratoires rectangulaires. — Les figures résultant de la combinaison de deux mouvements vibratoires rectangulaires s'observent aisément.

On peut d'abord employer à cet effet des pendules.

Une pointe fixée à l'extrémité d'un pendule ordinaire trace en général une ellipse, qui devient dans certains cas particuliers une droite ou un cercle.

Pour avoir l'une des figures $\frac{p}{q}$, il suffit d'attacher l'un au-dessous de l'autre deux pendules de longueurs convenables, ou de limiter dans un certain sens (au moyen de deux règles parallèles) les oscillations d'un pendule unique. Eisenhohr, Mohr, Knoblauch ont construit sur ces principes des appareils plus ou moins compliqués. M. Lymann place sous la pointe d'un pendule une plaque de verre enfumée, portée par le prolongement d'un deuxième pendule au-dessus de son point de suspension ; il obtient ainsi un tracé qui dépend du rapport entre les longueurs des deux pendules et de l'angle de leurs plans d'oscillation.

396. Caléidophone de Wheatstone. — Wheatstone, qui le premier distingua ces phénomènes, les produisait au moyen de son caléidophone (379). Lorsqu'une des verges est écartée de sa position d'équilibre, elle y revient en effectuant des oscillations qui peuvent être planes, mais qui le plus souvent sont gauches et résultent précisément de la superposition de deux systèmes rectangulaires d'oscillations planes.

Considérons, par exemple, la tige à section carrée : si avec le doigt on la fléchit parallèlement à l'un des couples de côtés du carré, puis qu'on l'abandonne à elle-même, elle exécute des oscillations planes, et son extrémité trace une petite droite parallèle à ce couple; sollicitée parallèlement à l'autre couple de côtés, elle décrit de même une droite parallèle à ce deuxième couple; si

l'attaque obliquement, elle offre l'une des formes de l'ellipse.

La tige ayant pour section un rectangle dont les côtés sont dans le rapport $p : q$, présentera la figure $p : q$.

Dans le *caléidophone universel*, construit à peu près simultanément par Lippich (¹) et par Melde (²), une longue bande d'acier, fixée solidement par son bout inférieur, porte à sa partie supérieure une deuxième bande, dont le plan est perpendiculaire à celui de la première et dont on peut modifier la longueur : le système est surmonté d'une perle réfléchissante qui, les verges étant mises en vibration, dessinera la figure correspondant au rapport établi.

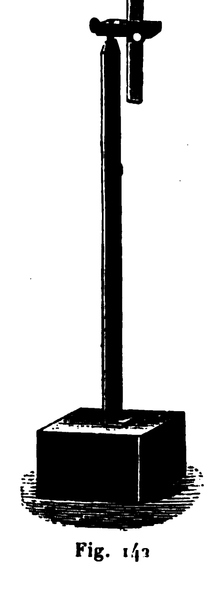


Fig. 142

397. Méthode optique de Lissajous. — Lissajous (³) a imaginé une méthode élégante de produire ces figures, et il en a tiré un procédé remarquablement exact pour accorder à tel intervalle que l'on veut deux diapasons et en général deux instruments quelconques.

La méthode créée par Lissajous, et devenue célèbre sous le nom de *méthode optique*, consiste essentiellement à faire tracer la figure par un rayon lumineux, soumis successivement à l'action de deux diapasons présentant l'intervalle voulu. Chaque diapason est à cet effet muni d'un petit miroir (ou d'une petite lentille) à l'extrémité de l'une de ses branches, l'autre branche portant un contre-poids.

Tracé optique des vibrations d'un diapason. — Prenons d'abord un seul diapason D, et au moyen d'une lentille L dirigeons sur son miroir m un faisceau de rayons solaires : ce faisceau se réfléchit, va frapper un miroir auxiliaire M, puis enfin est reçu sur un écran placé au foyer conjugué de l'ouverture par

(¹) LIPPICH, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, XLV ; et *Pogg. Ann.*, CXVII, 161 ; 1862.
(²) MELDE, *Pogg. Ann.*, CXV, 117 ; 1862. Melde a publié un atlas détaillé de ces courbes dans son *Lehre von der Schwingungscurven*. Leipzig ; 1864.
(³) LISSAJOUS, *loc. cit.*

laquelle entrent les rayons solaires. Si l'on fait vibrer le diapason, la tache lumineuse se meut sur l'écran suivant une droite II',

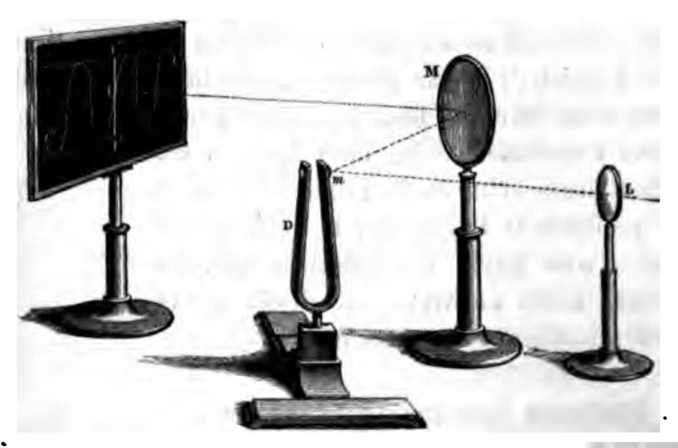


Fig. 143

parallèle au plan des branches du diapason et qui semble lumineuse dans toute sa longueur à cause de la persistance des impres-

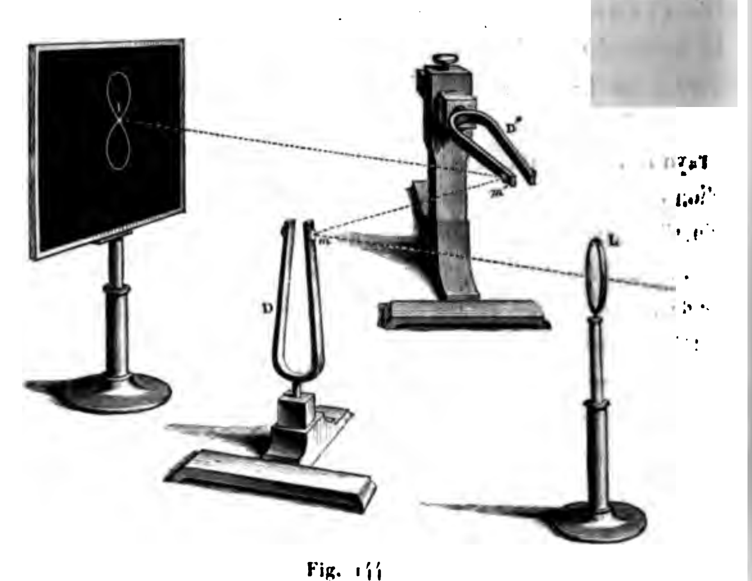


Fig. 144

sions sur la rétine. Pour séparer les vibrations successives, il suffit d'imprimer au miroir M un léger mouvement de rotation autour

e son axe vertical : on voit alors sur l'écran se peindre une ourbe sinueuse qui est en quelque sorte le tracé optique de la ibration.

Composition optique de deux mouvements vibratoires rectangu- iires. — Au miroir M substituons maintenant un deuxième dia- ason D', ayant son plan de vibration perpendiculaire au plan de ibration du diapason D. Si, le diapason D étant immobile, le dia- ason D' oscille seul, la tache lumineuse posée sur l'écran décrira ine petite droite parallèle au plan des branches de ce diapason, erpendiculaire par conséquent à la petite droite résultant des ibrations du diapason D seul. Si l'on fait osciller les deux diapa- ons à la fois, on voit apparaître l'une des formes de la courbe ca- actéristique de l'intervalle D' : D [1].

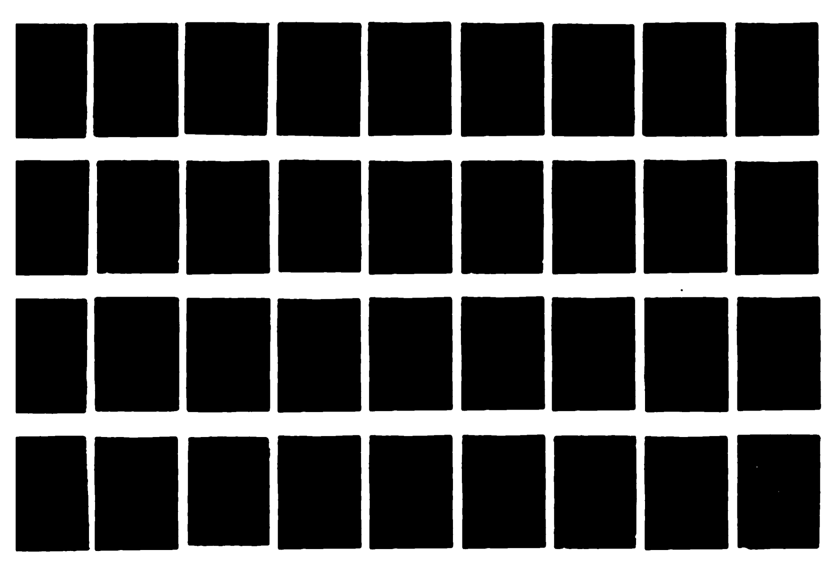


Fig. 145

Les tracés ci-joints, empruntés au mémoire de Lissajous [2],

[1] La courbe semble continue si elle met à se fermer moins de 1/15 de seconde; dans le cas contraire, elle paraît animée d'une sorte de trémulation comme si une onde obscure courait rapidement le long du trait lumineux.

[2] Dans cette figure, le diapason le plus grave, placé verticalement, ainsi que nous l'avons supposé jusqu'ici, vibre le plus énergiquement ($l > k$); les phases sont comptées négativement et rapportées à la période la plus longue.

représentent les formes principales relatives aux accords fondamentaux (unisson, octave, douzième et quinte).

Démonstration de la nature de la vibration d'un diapason. — Ces tracés coïncident exactement avec les courbes théoriques, et cette coïncidence est la preuve que les oscillations sont pendulaires.

Déformation des figures de Lissajous. — La forme particulière de la courbe dépend de la différence de phase ([1]), laquelle dépend elle-même du mode d'attaque, c'est-à-dire d'un ensemble de circonstances indéterminées, ou de ce que l'on appelle le hasard. Une fois établie, cette forme persiste indéfiniment si les diapasons sont exactement accordés ([2]). Sinon, on voit la figure acoustique se modifier et prendre successivement toutes les formes du type ([3]).

Soient en effet deux mouvements vibratoires rectangulaires dont les nombres de vibrations sont dans le rapport de $m+\varepsilon$ à 1 $\left(m\right.$ désignant toujours le rapport $\frac{p}{q}$ du nombre des vibrations suivant Ox au nombre des vibrations suivant Oy, et p étant supposé $\left.> q\right)$,

$$x = k\cos 2\pi(mNt + \varepsilon Nt - \varphi),$$
$$y = l\cos 2\pi Nt.$$

On peut faire passer les vibrations excédentes dans la différence de phase et poser

$$\Phi = \varphi - \varepsilon Nt.$$

([1]) Pour montrer l'influence de la différence de phase, on emploiera utilement l'appareil construit à cet effet par Lissajous. Sur un bâtis en bois sont fixés deux ressorts d'acier, l'un horizontal, l'autre vertical, portant chacun à leur extrémité libre une lentille. Ces deux lentilles sont en face l'une de l'autre, et leur ensemble donne sur un écran une image de l'ouverture par laquelle on lance sur elles les rayons d'une source intense. Entre les deux ressorts peut tourner un axe muni de deux excentriques, qui actionnent séparément chacun des ressorts. Suivant le calage de ces excentriques, les mouvements oscillatoires des deux lentilles présenteront telle différence de phase que l'on voudra, et la courbe lumineuse tracée sur l'écran répondra à cette différence de phase.

([2]) Avec des diapasons entretenus électriquement et munis de contre-poids à mouvements micrométriques, on peut maintenir la figure absolument immobile, ou la faire varier aussi lentement qu'on le désire. Th. et A. Duboscq ont construit sur les indications de M. Mercadier des appareils satisfaisant très bien à ces conditions.

([3]) En combinant au moyen de l'appareil de Lissajous et Desains (388) les vibrations rectangulaires de deux diapasons M et N, on obtient un tracé montrant la déformation continue de la figure acoustique $M : N = p : q$.

La différence de phase variant avec le temps, la courbe se modifiera, les diverses formes se déroulant successivement.

Comme Φ varie de 1 dans le temps $\frac{1}{\varepsilon N}$, Ψ variera de 1 dans le temps $\frac{p}{q\varepsilon N}$; Ψ devant varier de $\frac{1}{2p}$ pour passer d'une forme simplifiée à la suivante, ce passage demandera un temps

$$\Theta = \frac{1}{2q\varepsilon N}.$$

Ainsi la déformation de la courbe prouve le désaccord, et la rapidité de cette déformation le mesure.

Le procédé est général et peut s'appliquer à l'étude de toute espèce de mouvement vibratoire [1]. Il suffit de composer rectangulairement ce mouvement avec celui d'un diapason connu.

Comparateur optique. — Lissajous a construit à cet effet son

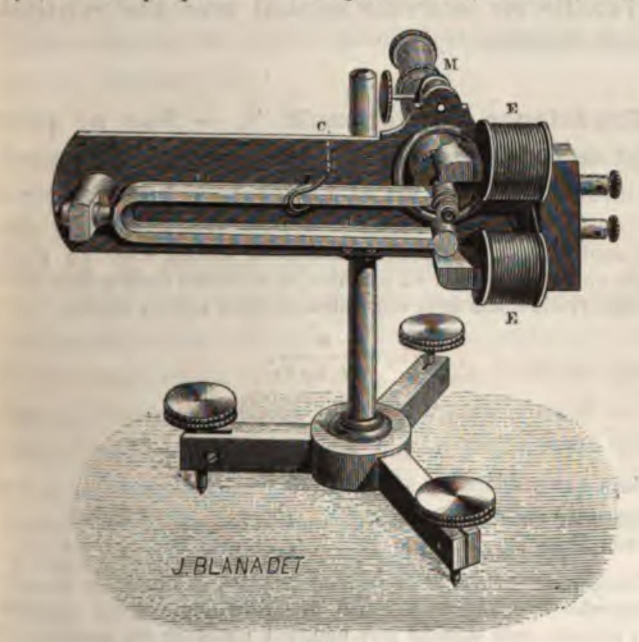


Fig. 146

comparateur optique. C'est un microscope dont l'oculaire et l'ob-

[1] On peut même étudier par ce moyen les vibrations d'une colonne gazeuse (MACH, *Optische-akustiche Versuche*; et *Journal de physique*, II, 338 ; 1873 (Crova).

jectif sont indépendants : l'oculaire est monté invariablement sur un pied solide, tandis que l'objectif s'adapte à l'une des branches du diapason type (un contre-poids est placé sur l'autre branche). Le diapason étant mis en vibration, on examine au microscope un point du corps à étudier (diapason, corde, membrane de phonautoscope ou de capsule, etc.), placé dans le champ de telle manière que ses vibrations s'effectuent perpendiculairement à celles du diapason.

La figure 146 montre cet appareil sous la forme que lui a donnée M. von Helmholtz : M est le corps du *microscope à vibration* dont l'objectif est porté par le diapason D. Un petit curseur C sert à régler la hauteur du diapason ; un électro-aimant E permet de prolonger autant que l'on veut la durée de l'expérience.

Par la méthode de Lissajous ou par la méthode stroboscopique (362), qui au fond est équivalente, on peut déterminer sans le secours de l'oreille un intervalle musical avec une exactitude en quelque sorte illimitée [1].

398. Expérience de Foucault [2]. — Nous ne quitterons pas ce sujet sans rappeler la curieuse expérience de Foucault sur la verge vibrante. Prenant un fil d'acier de 2^{mm} de diamètre et de

[1] Si par exemple on combine un diapason battant 250^{vd} en 1^s avec un deuxième à la quinte en dessus du premier, si d'ailleurs cette quinte est un peu forte, et si l'intervalle entre deux coïncidences dure 25^s, on aura

$$25 = \frac{1}{2.2.\varepsilon.250},$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{1}{25000}.$$

On en conclura que pendant ces 25 secondes

le premier exécute.............................. 6250^{vd}
le deuxième.............................. $9375 + 1/4$.

Si, l'un des diapasons étant le *la* normal de 435^{vd}, et l'autre un diapason que l'on veut accorder à la même hauteur, la figure passe d'une coïncidence à l'autre en 1 minute, cela signifie que pendant 1 minute ou pendant la durée de 26000^{vd}, le deuxième diapason a gagné 1/2 vibration double, ou que l'erreur est égale à $\frac{1}{5200}$.

Ces exemples montrent bien quel est le degré d'exactitude du procédé.

[2] FOUCAULT, *Bulletin de la Société philomatique*; 1851 ; et *Travaux scientifiques*. Paris, Gauthiers-Villars ; 1878 ; p. 392.

ᵐ environ de longueur, il le fixa solidement par une de ses trémités dans une pièce massive qu'il ajusta sur l'axe d'un tour. ppareil étant d'abord immobile, il écartait le fil de sa position turelle et le voyait vibrer, son extrémité décrivant en général une ipse qui se déformait plus ou moins rapidement suivant la struc-e du fil; c'est l'expérience de Wheatstone. Mais si, tandis que figure va ainsi changeant de forme, on met brusquement le tour marche, on voit aussitôt persister l'espèce de vibration qui a été rprise par le mouvement du tour : cercle, ellipse ou ligne droite, figure demeure invariable tant que l'arbre roule sur ses coussi-ts. Arrêtez le tour, les déformations reparaissent. Quand tout ra revenu au repos, lancez le tour; et tandis que la verge atta-ıée à l'arbre tourne sur elle-même, mettez-la en vibration dans ı plan quelconque, la vibration restera plane (sans se déformer mme au repos), et le plan de vibration se maintiendra immobile, in d'être entraîné par le mouvement de l'arbre. Au contraire, us l'arbre tourne vite, plus le résultat est assuré : savoir la fixité ı plan de vibration (55).

I. — COMPOSITION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE ET D'UNE TRANSLATION.

399. Modification de la longueur d'onde par le dépla-ement de la source ou de l'observateur. — Quand une ource vibrante est animée d'un mouvement de translation, on onçoit aisément que les ondes successives sont plus resserrées en vant, plus écartées en arrière, tandis qu'à droite et à gauche elles restent aux mêmes distances que si la source était au repos. La longueur d'onde sera donc diminuée ou augmentée, selon que la source se rapprochera ou s'éloignera.

Formules de Döppler. — Döppler [1], à qui l'on doit cette importante remarque, la compléta par le calcul suivant :

Soient λ la longueur d'onde normale de la vibration émise;
λ' la nouvelle longueur d'onde;
V la vitesse de propagation du mouvement vibratoire;
u la vitesse de translation de la source.

[1] Döppler, *Abhand. d. k. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch.*, (5), II, 465; 1842.

Si, pendant la durée τ d'une vibration, la source s'avance de O en O', l'onde, qui était au début en A et qui pendant ce temps τ

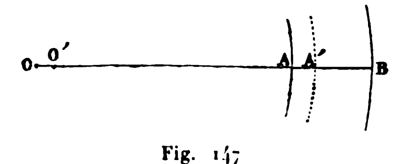


Fig. 147

est venue en B à la distance λ, est remplacée par l'onde A', la longueur AA' étant égale à OO'; de sorte que l'on a

$$\lambda' = A'B = \lambda - u\tau,$$

ou, en remplaçant τ par $\frac{\lambda}{V}$,

$$\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{u}{V}\right).$$

Dans la direction opposée à celle du déplacement, on aura de même

$$\lambda'' = \lambda\left(1 + \frac{u}{V}\right).$$

Perpendiculairement à la ligne OO', la longueur d'onde ne sera pas modifiée.

Si, la source restant fixe, l'observateur se déplace avec la vitesse u, on a semblablement

$$\lambda'_1 = \lambda \frac{1}{1 + \frac{u}{V}},$$

et

$$\lambda''_1 = \lambda \frac{1}{1 - \frac{u}{V}}.$$

400. Mesures de la variation de tonalité provenant du déplacement. — *Expériences de Buys-Ballot, Scott Russel, Vogel.* — Les conséquences précédentes sont faciles à vérifier pour une source sonore.

Les chemins de fer offrent des occasions fréquentes de telles ·ifications. Soit par exemple le sifflet d'une locomotive mar- ınt à raison de 50^{km} par heure : c'est une vitesse de 14^{m} à seconde, 1/24 par conséquent de la vitesse du son. Le sifflet raîtra donc élevé ou abaissé d'un demi-ton suivant le sens du ıuvement. Peu d'années après la publication du mémoire de ppler, M. Buys-Ballot ([1]) effectua sur le chemin de fer Jtrecht à Maarsen quelques expériences qui confirmèrent ces ductions.

Vers la même époque, M. Scott Russell ([2]) procéda à des me- res du même genre; on lui doit en outre cette remarque cu- euse : le bruit d'un train sous un pont pouvant être considéré, r suite de la réflexion, comme dû à deux trains qui mar- ıcraient en sens inverse avec la même vitesse (que nous sup- serons toujours de 50^{km} à l'heure), l'oreille sera désagréa- ement affectée par une dissonance de seconde. Pour que l'on tendît une tierce, il faudrait une vitesse de plus de 120^{km} à ıeure.

M. Vogel ([3]) a repris dernièrement les expériences de M. Buys- llot et il a fait sur le chemin de fer de Cologne à Minden une ·ie d'observations très soignées d'où il a conclu l'exactitude des mules de Döppler.

Expérience de Fizeau. — La vitesse à imprimer au corps sonore ır que l'altération du son soit sensible n'ayant pas besoin d'être s grande, M. Fizeau ([4]) entreprit d'étudier le phénomène dans laboratoire. A cet effet, il construisit un instrument qui est en lque sorte l'inverse de la roue de Savart, la carte étant portée la roue tournante, et les dents fixées sur la concavité d'un de cercle extérieur et immobile, disposé horizontalement. ır une certaine vitesse de rotation, l'observateur placé à quel- s mètres en arrière de l'appareil entend par exemple *ut*, tandis n avant il entend *mi*, et dans les positions intermédiaires tous

BUYS-BALLOT, *Pogg. Ann.*, LXVII, 321; 1845.
SCOTT RUSSELL, *Brit. Ass. Reports;* 1849, pars II, p. 30.
VOGEL, *Pogg. Ann.*, CLVIII, 287; 1876.
FIZEAU, *Bulletin de la société philomatique;* 1848; et plus complètement en dans les *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XIX, 211.

les sons compris entre ces deux notes. Pour rendre l'expérience plus frappante, on ménage deux arcs dentés semblables, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la roue, et l'on s'arrange de manière que chacun d'eux successivement soit pendant quelques instants frappé seul par la carte. Le mouvement de rotation se trouvant de sens contraire pour les deux arcs, l'observateur percevra successivement les deux sons sans changer de place.

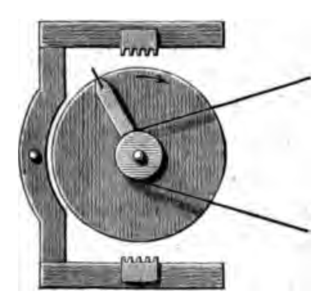


Fig. 148

Sur le même principe M. Mach (1) a établi un appareil consistant essentiellement en un sifflet monté à l'extrémité d'un tube creux qui peut recevoir d'une manivelle un mouvement de rotation rapide. La variation de hauteur est encore très nette, bien que l'appareil soit moins parfait que celui de M. Fizeau.

Expériences par la méthode des battements : Kœnig, Schüngel, Quesneville. — L'emploi des battements fournit à M. Kœnig (2) le moyen de montrer aisément le changement de tonalité d'un diapason qui s'avance ou s'éloigne. Mettant l'un à côté de l'autre deux diapasons, ut_4 et $ut_4 + 4^{vd}$ qui donnent au repos 4 battements par seconde, il rapprochait le plus grave d'environ $0^m,60$ en une seconde ; comme $0^m,60$ est sensiblement la longueur d'onde de l'ut_4, l'oreille recevait dans une seconde une vibration double en plus du diapason le plus grave ; il y avait donc perte d'un battement. On entendait au contraire un battement de plus quand

(1) Mach, *Pogg. Ann.*, CXII, 58 ; et CXVI, 333 ; 1860-62.
(2) Kœnig, *Catalogue illustré* de 1865 ; et *Quelques expériences*, p. 41. M. Kœnig fait même l'expérience avec un seul diapason, en se mettant devant un obstacle et en déplaçant le diapason perpendiculairement à l'obstacle.

c'était le diapason le plus aigu que l'on rapprochait de l'oreille.

M. Schüngel [1], puis M. Quesneville [2] ont institué sur ce principe des expériences de mesure qui leur ont paru vérifier complètement les formules de Döppler : le procédé graphique employé par M. Quesneville prête à sa démonstration toute la rigueur désirable.

IV. — RÉSONNANCE.

401. Résonnance. — Tout corps élastique est capable de transmettre un son quelconque. Mais quand les vibrations offertes au corps sont d'accord avec celles qu'il peut exécuter lui-même, au lieu de subir un simple ébranlement atteignant successivement ses différentes parties, il devient le siège d'un mouvement d'ensemble dont l'amplitude est parfois considérable. Sous l'action



Fig. 149

répétée d'impulsions synchrones le corps tout entier vibre à l'unisson des vibrations extérieures : il y a résonnance.

(1) Schüngel, *Pogg. Ann.*, CL, 356; 1873.

(2) G. Quesneville, *De l'influence du mouvement sur la hauteur du son*. Paris; 1879 (Thèse, avec un historique détaillé des travaux antérieurs).

Nous avons déjà constaté la résonnance de l'air d'un tuyau sonore pour les sons de l'embouchure qui correspondent à ses sons propres, la résonnance d'une corde actionnée par une autre corde, par un diapason ou par tout autre instrument, la résonnance d'une membrane sous l'influence d'un son extérieur, etc.

Le phénomène se manifeste nettement avec deux diapasons à l'unisson, montés sur leurs caisses renforçantes se faisant face à plusieurs mètres de distance (1). Si en effet on ébranle l'un des diapasons à l'archet, l'autre ne tardera pas à vibrer; et, en éteignant avec la main les vibrations du premier, on entendra clairement le son émis par le deuxième.

L'appareil représenté ci-dessus, et dû à Savart, offre un bel exemple de résonnance : sous l'action du tuyau placé en regard, le son du timbre acquiert une ampleur remarquable (2). Inutile d'ajouter qu'il s'éteint beaucoup plus vite.

Ces expériences accusent d'ailleurs une tolérance très variable selon la nature du corps ébranlé. Un diapason, qui pour entrer en vibration réclame une certaine somme d'énergie, et qui, une fois excité, vibre longtemps, ne pourra être mis en mouvement que par une suite d'impulsions rigoureusement d'accord avec ses propres vibrations. Au contraire, une membrane mince ou une corde fine, dont les oscillations s'éteignent rapidement, vibrera sous l'influence de sons assez divers.

402. Transmission des vibrations. — *Transmission par une suite de milieux élastiques.* — En général, le son est transmis au corps résonnant par l'air. Toutefois, la transmission peut aussi s'effectuer par l'intermédiaire de milieux solides ou liquides. On fait ordinairement dans les cours l'expérience suivante : sur la caisse renforçante d'un diapason est placé un verre contenant du

(1) Au cours des expériences de Regnault, dans l'égout Saint-Michel, M. Kœnig ayant placé deux diapasons ut_2 (128^{vd}) de façon que les ouvertures de leurs caisses fussent en regard des extrémités de l'égout, vit cette influence se manifester très nettement à $1\,590^{m}$.

(2) L'effet est tel que, lorsqu'on n'entend plus du tout le timbre seul, on n'a qu'à lui présenter le tuyau pour faire encore jaillir un son intense. D'après certains auteurs, un verre en forme de cloche peut être brisé par une voix juste et puissante (CHLADNI, *loc. cit.*, p. 224).

n attaque le diapason, séparé de sa caisse. Ses vibrations
i l'oreille ; mais si l'on appuie le diapason sur le mer-
n éclate aussitôt. Les vibrations du diapason se sont
uniquées à la colonne d'air intérieure par l'intermé-
iercure, du verre et du bois de la caisse.

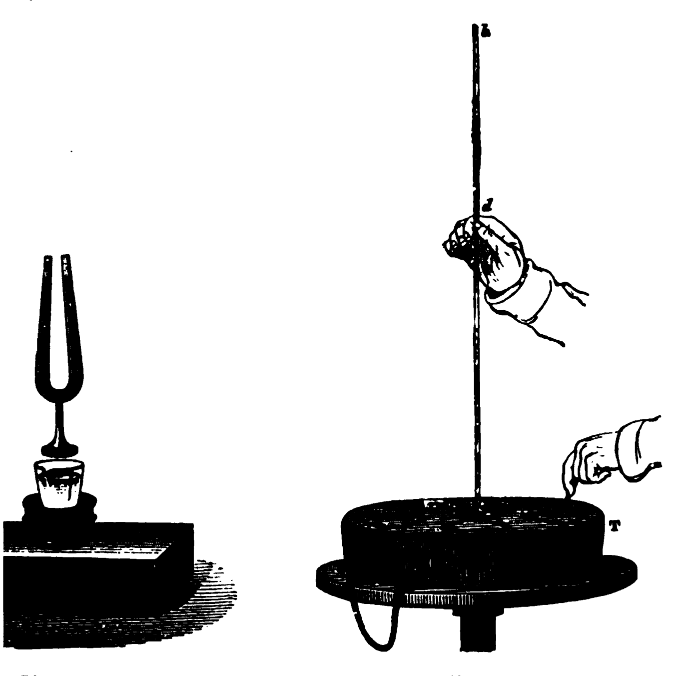


Fig. 150 Fig. 151

pellerons encore l'exemple curieux de communication
e *téléphone à ficelle.*
ion par les solides. — La transmission à travers une
ilieux est un phénomène complexe. Savart a montré
in système formé de pièces solides contiguës, le mou-
ratoire se transmettait parallèlement à la direction de
nt.
moyens que nous avons employés pour exciter les vibra-
ersales d'une plaque consistait à faire vibrer suivant
r une verge implantée normalement dans la plaque.
s'applique à une membrane (fig. 151). On provoquera

de même les vibrations transversales des verges *fg* (fig. 152) (
tant longitudinalement la traverse LG ; au contraire, en att

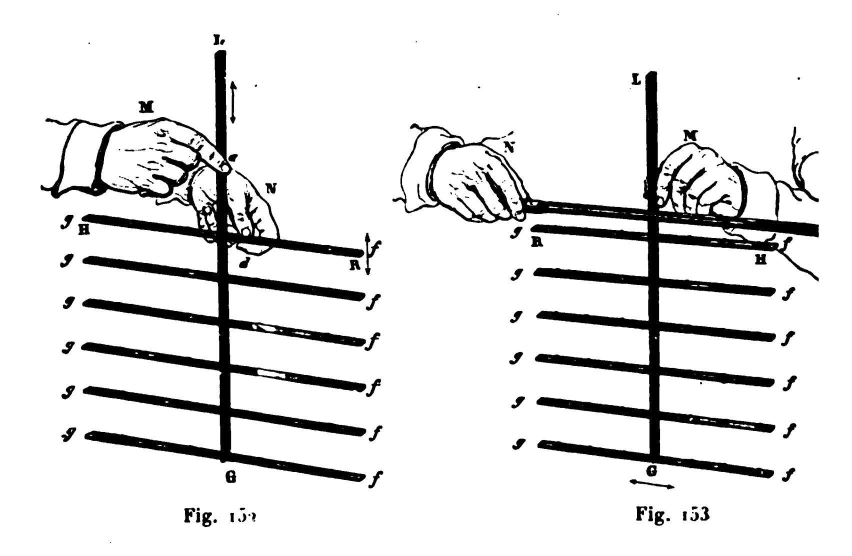


Fig. 152 Fig. 153

celle-ci avec un archet dirigé parallèlement aux verges, on
vibrer longitudinalement.

Une verge *da*, fixée d'un bout et prolongée de l'autre p

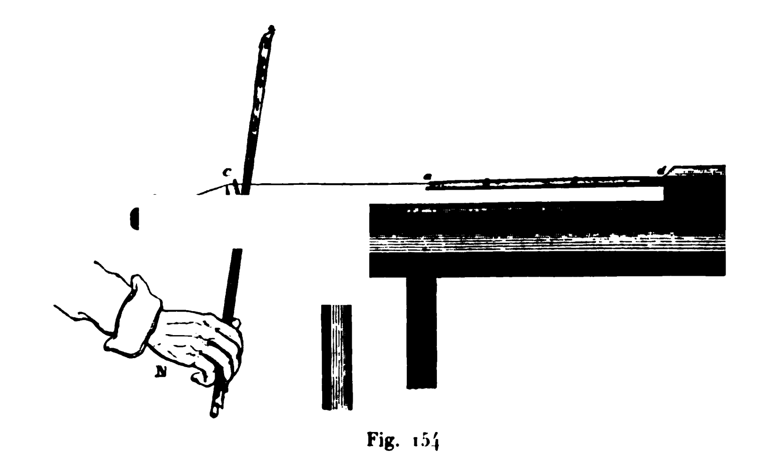


Fig. 154

corde *acb*, offre les divers modes de vibrations figurés ci-c
quand l'archet qui sert à l'ébranler prend différentes dire
dans un plan perpendiculaire à la corde.

En tout cas, les diverses parties du système vibrent à l'unisson.

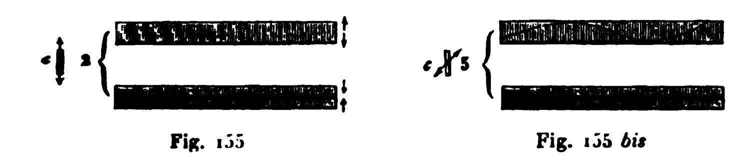


Fig. 155 Fig. 155 *bis*

Mesure de la vitesse des sons dans les corps mous. — M. Warurg ([1]) a utilisé ce fait pour déterminer la vitesse du son dans les ɔrps mous. A une tige verticale sont fixées horizontalement, ɔmme dans la figure 152, une verge élastique (lame de verre) et ne deuxième verge plus petite, faite de la substance à étudier. oient V et V′ les vitesses du son dans les deux verges; e, e' leurs paisseurs; l, l' les longueurs des concamérations (mesurées par es distances de deux nodales consécutives) dans les deux verges ribrant synchroniquement, on a

$$\frac{V}{V'} = \frac{l^2}{l'^2}\frac{e}{e'},$$

rmule qui donne V′, V étant connu. Pour s'assurer de l'exactide du procédé, M. Warburg l'a appliqué à la mesure de V′ dans laiton, et il a retrouvé le nombre de Chladni. Il a pu alors opéavec confiance sur d'autres corps ([2]). Voici les résultats obtenus :

	e'	$\frac{V'}{V}$	$\frac{E'}{E}$	V′
Verre	2,390	1,008	1	5164^m
Stéarine	0,974	0,265	1/35	1368
Parafine	0,908	0,251	1/42	1296
Cire	0,971	0,166	1/88	857
Cire et térébenthine	0,989	0,111	1/197	573
Suif	0,917	0,072	1/461	387

ɛs nombres se rapportent à 0°. M. Stefan ([3]), qui avait entrepris déterminations du même genre en faisant vibrer longitudinaent une verge composée de deux parties placées bout à bout (la

) WARBURG, *Pogg. Ann.*, CXXXVI, 285; 1869.
) M. Groth a étudié par ce moyen l'élasticité du sel gemme (GROTH, *Pogg.* ., CLVII, 115; 1876).
) STEFAN, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, LVII; 1868.

difficulté était dans le mode de réunion qui ne devait introduire aucune différence de phase), avait trouvé pour la vitesse du son à $t°$:

Cire....................	$730^m\,\big(1 - 40\,(t - 20)\big)$
Graisse.................	$369\,\big(1 - 40\,(t - 20)\big)$
Caoutchouc............	30 à 60^m, suivant la tension.

Ces derniers nombres sont de l'ordre de grandeur de la vitesse de propagation d'un ébranlement nerveux, et laisseraient supposer que cet ébranlement se propage par vibrations longitudinales comme le son.

Influence réciproque. — Quand deux horloges, munies de pendules sensiblement égaux, sont appuyées sur une même barre de bois, l'unisson s'établit exactement [1]. Le fait a été observé par l'horloger anglais Ellicot [2], qui a remarqué en outre que, si l'un des pendules marche d'abord seul, il entraîne l'autre et l'amène à osciller à pleine amplitude, tandis qu'il s'arrête lui-même graduellement; puis l'inverse a lieu, et ainsi de suite indéfiniment. Savart a confirmé ces observations et les a étendues aux corps vibrants. Deux cordes semblables, placées l'une à côté de l'autre sur un sonomètre ou mieux sur une caisse de contre-basse, se mettent à l'unisson [3] en présentant les mêmes alternances dans les amplitudes de leurs oscillations.

Quand l'unisson existe antérieurement, la réaction du corps influencé réduit le corps influençant à un repos définitif, ou si un état vibratoire commun s'établit, c'est avec une nouvelle période.

Ainsi, dans l'expérience de Melde, le son du diapason excitateur (non entretenu électriquement) s'éteint instantanément quand la corde est à l'unisson exact [4]. Lorsque la corde est grosse, le sys-

[1] D'après cette observation, Bréguet avait imaginé de fixer sur une même plaque métallique deux chronomètres qui étaient par conséquent toujours d'accord : les irrégularités individuelles se trouvant ainsi atténuées, leur marche commune était meilleure que celle de chacun d'eux pris séparément.

[2] Ellicot, *Phil. Trans.*; 1739.

[3] Il résulte de là que pour accorder exactement deux instruments, il ne faut pas les placer trop près l'un de l'autre, l'unisson pouvant s'établir par une influence étrangère sans que les deux instruments isolés soient au même ton.

[4] De même, dans l'expérience de Kundt, la colonne d'air ne vibre pas lorsqu'elle est rigoureusement à l'unisson du tube. Hopkins avait déjà signalé

ne vibre en rendant un son plus grave que le son propre de ses ux parties constitutives. Parmi de nombreuses expériences sur sujet, M. Gripon [1] rapporte encore celle-ci : une membrane re sous l'influence d'un tuyau ; elle est donc à l'unisson. la place à quelques centimètres de l'orifice : le son du tuyau ange aussitôt et devient plus aigu, à moins qu'il ne cesse comtement.

La pratique a montré depuis longtemps qu'il faut ajuster les ux tables d'un violon à des hauteurs différentes pour leur donner maximum de sonorité. On sait aussi que la caisse de résonnance un diapason ne doit pas être exactement accordée à l'unisson diapason (381).

403. Appareils de résonnance. — *Caisses d'harmonie.* — importance même des appareils de résonnance en musique n'est s à établir. Le son d'une corde isolée étant à peu près nul, la isse d'un violon fait toute la valeur de l'instrument.

Oreille. — L'oreille humaine favorise par sa résonnance les sons oisins du *sol*$_4$: ces sons, que l'on trouve dans le cri du grillon, ffectent désagréablement une oreille sensible [2].

Résonnateurs de M. von Helmholtz. — M. von Helmholtz [3] a construit des résonnateurs précieux pour les recherches acoustiques. Ce sont des sphères creuses à deux tubulures opposées, l'une courte et droite s'ouvrant au dehors, l'autre disposée en forme d'entonnoir de manière à pouvoir s'introduire dans l'oreille, où elle se trouve fermée par la membrane du tympan. Le son fondamental de l'appareil, beaucoup plus grave que les autres, est aussi beaucoup plus intense [4].

la difficulté que l'on éprouve à faire vibrer une plaque quand elle transmet ses vibrations à une colonne d'air à l'unisson (355). Terquem a rencontré un phénomène analogue dans les verges (382).

(1) GRIPON, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), III, 343; 1874.

(2) Von HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 146 et 615.

(3) Von HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 59 et 487.

(4) La longueur d'onde de ce son est donnée par la formule

$$\lambda = 2\pi\sqrt{UR},$$

étant le volume de la cavité de forme quelconque qui renferme l'air en vibration, et R la *résistance* de l'ouverture, inversement proportionnelle à la capacité électrostatique d'un disque de même surface.

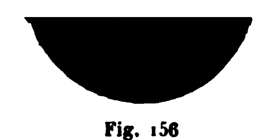


Fig. 156

ce son unique qui, chaque fois qu'il est produit au dehors, éclate à l'oreille avec une force prodigieuse. On pourra ainsi distinguer son faible au milieu d'autres plus forts, reconnaître un son ré tant, un harmonique qui, faute de ce secours, échapperaient l'oreille la plus exercée.

CHAPITRE X

INTENSITÉ. — TIMBRE

I. — INTENSITÉ.

404. Intensité mécanique. — *Expression théorique.* — L'effet mécanique d'un mouvement vibratoire pendulaire de période τ et d'amplitude A dans un milieu de densité ρ a pour mesure (357) :

$$I = 2\pi^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2}.$$

Cette relation définit entièrement l'intensité mécanique.

Essais de mesure. — Pour comparer deux sources de même hauteur, M. A. M. Mayer[1] place devant chacune d'elles un résonnateur relié par un tube de caoutchouc à l'un des bouts d'un tube en fer à cheval, portant en son milieu une capsule manométrique. Si les deux intensités sont égales, les corps sonores étant à la même distance de leur résonnateur, et les tubes de caoutchouc ayant la même longueur, l'interférence sera complète au milieu du fer à cheval : la flamme de la capsule restera au repos et se présentera, dans le miroir tournant, sous l'aspect d'un ruban lumineux continu. Si les intensités sont inégales, en éloignant l'un des résonnateurs, on diminuera l'action de la source correspondante suivant la raison inverse du carré de la distance jusqu'à rétablir l'équilibre. Ce que nous venons de dire suppose les phases égales ; d'ordinaire elles ne le seront pas; il faudra d'abord compenser cette inégalité : on commencera donc par modifier la longueur de l'un des

[1] A. M. Mayer, *Dana's and Silliman's American Journal*, (3), V, 123 ; 1873 ; et *Journal de physique*, II, 228 (Angot).

tubes de caoutchouc jusqu'à réduire au minimum les dentelures de la flamme ; on pourra alors les faire disparaître complètement en changeant la distance qui sépare l'un des corps de son résonnateur.

Le cas général a été jusqu'ici à peine abordé par l'expérience. Nous devons cependant citer les tentatives faites par lord Rayleigh et par M. Dvorák pour mesurer l'intensité d'une onde sonore par l'action de cette onde sur les corps légers.

Attractions et répulsions acoustiques. — L'appareil de lord Rayleigh (¹) est fondé sur ce fait qu'un disque mobile tend à se placer perpendiculairement au sens de la propagation des ondes : un aimant directeur s'opposant à ce mouvement, le disque, suspendu à un fil sans torsion, prendra une position d'équilibre que l'on déterminera par la méthode de Poggendorff.

Dans une étude détaillée des attractions et répulsions qui se produisent au voisinage des corps en vibration, M. Dvorák (²), comme l'avait déjà fait M. A. Mayer (³), a constaté qu'un résonnateur est repoussé par un corps vibrant à l'unisson : ils ont l'un et

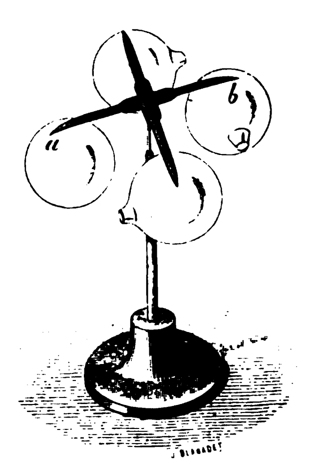


Fig. 157

l'autre construit sur ce principe un *tourniquet acoustique* se composant de résonnateurs *a*, *b*, attachés aux bras d'un petit moulin

(¹) Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, (5), XIX, 187 ; 1882.
(²) DVORÁK, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.* ; 1875-83.
(³) A. M. MAYER, *Scientific American* ; 1876.

mobile. M. Dvorák (1) a trouvé ensuite qu'un simple disque de ton percé de trous coniques était repoussé par un corps sonore é en regard de la pointe des trous. En conséquence il mesure

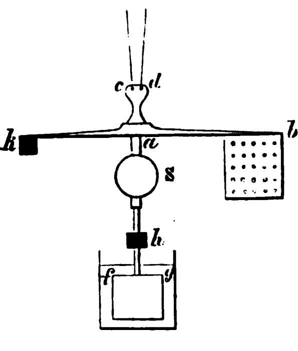


Fig. 158

intensité des vibrations de l'air avec une balance de torsion dont levier kb, soutenu par une suspension bifilaire cd, porte à l'une e ses extrémités un disque de carton b criblé de trous coniques; système est lesté par un poids h et muni d'un amortisseur fg; n observe les déviations à l'aide du miroir S.

Le jeu de ces appareils paraît assez compliqué.

405. Intensité physiologique. — *Évaluation approchée.* — n n'a aucun moyen de mesurer les intensités physiologiques des ons. Il est certain cependant que les instruments à clavier produient à peu près le même effet dans toutes les octaves. D'autre art, Töpfer (2) a énoncé ce fait que dans un orgue bien réglé la quanté d'air que consomme chaque tuyau est proportionnelle à la ngueur d'onde du son qu'il rend. M. Bosanquet (3) a vérifié la i sur un orgue d'Oxford, suffisamment uniforme dans toute son endue ; et il en a conclu que le travail moyen T_m, nécessaire pour

(1) Dvorák, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, III, 127; 1883; et *Journal de ysique*, (2), II, 465.

(2) Tœpfer, *Die Orgel*. Erfurt; 1842.

(3) Bosanquet, *Phil. Mag.*, (4), XLIV, 381 ; et XLV, 173; 1872-73. La définition l'intensité a donné lieu à une intéressante controverse entre MM. Bosanet, Moon et Hudson, *Phil. Mag.*, (4), XLIV et XLV, *passim*; et (5), IX, 174; 30.

produire des sons de même intensité, est proportionnel à leur longueur d'onde : $\frac{T_m}{\lambda}$ peut donc être pris pour mesure de l'intensité apparente I_a. Par suite, comme T_m [1] est égal à I, on a

$$I_a = K\frac{I}{\lambda}:$$

[1] Ce travail est facile à obtenir directement. On peut encore l'évaluer par la dépense d'énergie nécessaire pour amener à l'état vibratoire une longueur λ d'air pris au repos. L'énergie requise à cet effet se compose de deux parties : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique, ou force vive actuelle, est

$$C = \int_x^{x+\lambda} \frac{1}{2}\rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx.$$

Pour évaluer l'énergie potentielle P, considérons un disque d'air de section égale à l'unité et d'épaisseur dx. Supposons qu'il soit comprimé de telle sorte que, la section restant la même, l'épaisseur devienne $dx - du$. L'accroissement de pression à l'intérieur du disque est alors $E\frac{du}{dx}$. Quand l'épaisseur varie de δdu, l'élément de travail est $E\frac{du}{dx}\delta du$; par conséquent, le travail effectué dans la compression entière de $du = 0$ à $du = du$ est

$$\int_0^{du} E\frac{du}{dx}\delta du = \frac{1}{2}E\frac{(du)^2}{dx};$$

et le travail accumulé dans tous les disques composant la colonne de longueur λ se représente par

$$P = \int_x^{x+\lambda} \frac{1}{2}E\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Ces deux quantités C et P sont égales, en vertu des relations connues

$$\frac{du}{dt} = -V\frac{du}{dx} \qquad \text{et} \qquad E = \rho V^2.$$

On a donc pour l'énergie totale

$$\int_x^{x+\lambda} \rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx,$$

ou, en posant toujours $u = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

$$\int_x^{x+\lambda} \rho\frac{4\pi^2}{\tau^2}\sin^2\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) dx = 2\pi^2\rho\frac{A^2}{\tau^2}\lambda.$$

Ainsi l'énergie moyenne de l'unité de volume de l'air vibrant est

$$T_m = 2\pi^2\rho\frac{A^2}{\tau^2} = I.$$

tensité apparente est proportionnelle à l'énergie et en raison erse de la longueur d'onde.

En se reportant à l'expression de I, on voit que cette relation ivaut à celle-ci

$$I_a = h\frac{a^2}{\lambda^3}:$$

ur des sons d'égale intensité apparente, les carrés des amplitudes t proportionnels aux cubes des longueurs d'onde.

Sensibilité de l'oreille. — Si l'on ne possède actuellement encore cun *phonomètre*, ce n'est point à cause d'un manque de sensilité de l'oreille. L'amplitude des vibrations sonores peut en et devenir extrêmement petite sans que le son cesse d'être perptible.

Lord Rayleigh [1] a fait sur ce sujet l'expérience suivante : un flet, sonnant fa_6 (2730^{vd}) sous l'action d'un courant d'air dont le bit était de 196^{cm^3} par 1^s sous la pression de $9^{cm},5$ d'eau, s'entenit jusqu'à la distance de 820^m.

Le travail dépensé en 1^s pour faire parler le sifflet était

$$T = 9,5 \times 196,$$

unité de travail étant le travail nécessaire pour élever 1^{cm^3} d'eau la hauteur de 1^{cm}.

D'autre part, la quantité totale d'énergie qui traverse pendant la surface d'une sphère de rayon R tracée autour du centre 'ébranlement est

$$2\pi^2 R^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2} V.$$

On a donc, en remplaçant les lettres par les valeurs numériques orrespondant à l'expression actuelle,

$$A = \sqrt{\frac{9,5 \times 196 \times 981}{2\pi^2 \times \overline{82000}^2 \times 0,0013 \times 34000 \times \overline{2730}^2}} = 0^{cm},000\,000\,081.$$

(1) Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, (5), III, 456; 1877.

Une partie notable du travail étant nécessairement perdue, l'amplitude des vibrations qui agissaient sur l'oreille de l'observateur était certainement très inférieure à un millionième de millimètre.

M. Pellat (¹) a calculé que la quantité de chaleur abandonnée par 1^{gr} d'eau qui se refroidit de 1°, transformée en énergie électrique et lancée dans un bon téléphone, y produirait un son nettement perceptible pendant dix mille ans.

II. — TIMBRE.

406. Décomposition d'un son complexe en ses éléments suivant le théorème de Fourier. — *Rameau, Monge, Ohm, von Helmholtz.* — D'après le théorème de Fourier (393), un mouvement périodique quelconque est, toujours et d'une seule manière, décomposable en mouvements pendulaires de périodes respectivement égales à la période du mouvement proposé, à la moitié, au tiers, au quart... de cette période.

Cette décomposition s'opère-t-elle réellement en acoustique?

Ohm (²) avança qu'en effet l'oreille décompose tout mouvement périodique de l'air en vibrations harmoniques correspondant chacune à un son simple. La proposition semble au premier abord contredite par l'expérience journalière. Enclins à remarquer dans un son ce qui le différencie des autres sons de même hauteur, nous sommes accoutumés à fondre les harmoniques avec le son fondamental en un tout que nous qualifions par son timbre. Mais les éléments deviendront séparément perceptibles si nous y appliquons notre attention.

Les sons des cordes se prêtent particulièrement à ces observations. Que l'on émette successivement un harmonique, puis aussitôt le son complexe contenant cet harmonique, l'oreille discernera aisément le son simple dans le mélange. Par ce moyen, M. von Helmholtz

(¹) Pellat, *Journal de physique*, X, 358 ; 1881.

(²) Ohm, *Pogg. Ann.*, LIX, 513 et LXII, 1 ; 1846-47. Seebeck, qui n'avait pas recours aux méthodes décrites plus bas pour diriger l'attention de l'oreille sur les sons en question, nia le fait (Seebeck, *Pogg. Ann.*, LX, 449 et LXIII, 353, 368 ; 1847-48).

isfingué les harmoniques jusqu'au seizième. Il a même pu les 'e saisir aisément aux personnes les moins exercées. En appuyant s ou moins fortement un pinceau au point convenable de la de, on produisait tel harmonique que l'on voulait, pur ou mêlé proportion décroissante avec le son fondamental, de façon à nager une série de transitions par lesquelles l'oreille arrivait à ivre l'harmonique jusque dans le son ordinaire de la corde vi- ant librement.

Un peu d'habitude permettra vite d'entendre les harmoniques s divers instruments et même ceux de la voix humaine, bien que s derniers soient plus difficiles à séparer; et cependant Rameau ([1]) s avait déjà reconnus sans aucun secours étranger.

La sûreté de l'oreille dans cette analyse est d'ailleurs prouvée r ce fait qu'elle ne perçoit que les sons réellement existant. Ainsi, ns le son d'une corde ébranlée par percussion l'oreille n'indi- era jamais ceux des harmoniques dont Young a établi l'ab- nce (369).

M. von Helmholtz, qui a mis tous ces faits en lumière dans son re célèbre, *die Lehre der Tonempfindungen*, a montré que chacun s sons simples constituants peut être isolé de la masse sonore par moyen purement mécanique, la vibration par influence des ps élastiques. « Chaque son simple existe donc dans le son com- xe, produit par un instrument quelconque, aussi bien et au me titre que le rayon simple existe dans la lumière blanche éma- it du soleil ou de tout autre corps incandescent. »

L'analyse des sons ([2]) par influence s'effectue facilement à l'aide n piano dont (les étouffoirs étant soulevés) chaque corde décèle ses trépidations le son qu'elle est elle-même capable de donner. t-être a-t-on dans cette expérience la reproduction exacte du le d'analyse par l'oreille (409).

RAMEAU, *Nouveau système de musique théorique* (préface). Paris; 1726.

Il importe de remarquer que cette analyse ne s'applique qu'au son continu isse de côté les caractères provenant du mode de production (sifflement air dans une embouchure, grincement de l'archet, choc d'un marteau...), n mode de variation (tantôt la note éclate brusquement, tantôt au con- elle s'enfle progressivement; elle s'éteint lentement, ou elle est subite- étouffée), tous caractères qui dans la pratique nous aident puissamment onnaître le son.

Mais on emploiera de préférence les résonnateurs d'Helmholtz, associés soit à l'oreille soit aux capsules de Kœnig comme l'indique la figure ci-jointe. Appliquée aux systèmes dont les vibrations sont définies mathématiquement (cordes, tuyaux sonores,

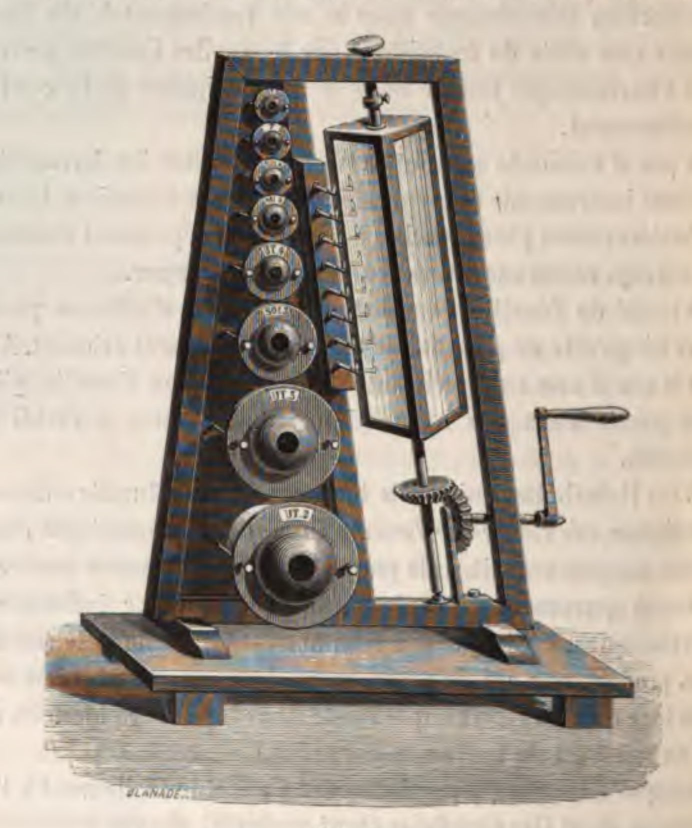


Fig. 159

verges, etc.), cette décomposition, d'accord avec celle qui est produite par l'oreille, confirme entièrement ce que nous savons *à priori* sur le mode de vibration du système considéré.

En étendant ces méthodes aux divers instruments, on reconnaît qu'un son musical est d'ordinaire complexe. Un son simple, tel que celui d'un diapason sur sa caisse d'harmonie, semble creux et plus bas qu'il n'est réellement. Les grands tuyaux bouchés de l'orgue, qui, avec peu de vent émettent des sons presque entièrement dépourvus d'harmoniques, produisent un

t sombre et triste. Les sons de la flûte, à harmoniques peu nbreux et faiblement perceptibles, ont beaucoup de pureté, douceur, et quelque monotonie. Si l'on compare sur la me note une flûte et une belle voix humaine, dans laquelle son fondamental accompagné de ses six premiers harmoniques me un accord vigoureux, on sent aussitôt l'influence de ces rmoniques. De longue date les facteurs d'orgues ont été amenés compléter ainsi les sons pâles (¹) des grands tuyaux par les *ix de fourniture*, au moyen desquels interviennent les six emiers termes de la série, ceux-là mêmes qui constituent ccord parfait. Dans le piano, le choc du marteau tombant tre le 1/7 et le 1/9 de la longueur introduit précisément ce me cortège d'harmoniques qui prête au son de l'éclat, sans cuité, la strideur que donnent les harmoniques élevés (violon, iron...).

Tous ces faits, et bien d'autres qu'il nous faut omettre ont amené von Helmholtz à cette conclusion que *le timbre d'un son ulte du nombre et de l'intensité des harmoniques unis au son damental.* Cette idée s'était déjà présentée à plus d'un esprit : nge l'avait formulée très exactement (²); M. von Helmholtz a établi les preuves par l'analyse et par la synthèse.

107. Synthèse des sons musicaux. — On peut, en effet, nfirmer par la synthèse les résultats de l'analyse. Qu'une clari-tte lance une note quelque peu prolongée devant un piano vert dont les étouffoirs sont levés, les cordes influencées par acun des sons simples contenus dans le son complexe de strument résonneront par influence avec assez de force pour ntinuer exactement ce son quand il aura cessé. M. von Helmholtz

(¹) Les Allemands appellent le timbre *Klangfarbe* (couleur du son).

(²) MONGE, d'après SURREMAIN-MISSERY, *Théorie acoustico-musicale.* Paris, lot; 1793. « Je sais bien que j'ai ouï dire par M. Monge, de l'Académie des nces, que ce qui déterminait tel ou tel timbre, ce ne devait être que tel ou ordre et tel ou tel nombre de vibrations des parties aliquotes de la corde produit un son de ce timbre-là..... C'était bien cela qu'entendait M. Monge, il ajoutait que si l'on pouvait parvenir à supprimer les vibrations des ali-tes, toutes les cordes sonores, de quelques différentes natures qu'elles ent, auraient sûrement le même timbre. » (RÉSAL, *C. R.*, LXXIX, 821;).

a construit un appareil, qui se compose d'une suite de diapasons accordés suivant la série harmonique, entretenus électriquement, et munis chacun d'une caisse de résonnance que l'on peut ouvrir plus ou moins au moyen d'un mécanisme commandé par un clavier. Chaque diapason émettant avec l'intensité voulue l'un des sons simples décelés par l'analyse, l'ensemble reproduit effectivement le son complexe étudié. On imite ainsi très bien le son du cor et même les sons de la voix humaine (avec lesquels on peut également faire l'expérience du piano). Une expérience intéressante due à M. A.-M. Mayer (1) consiste à relier un point de la membrane latérale d'un tuyau à anche (2) avec une série de diapasons harmoniques par autant de fils fins convenablement tendus : chaque diapason choisit dans le mouvement complexe de la membrane le mouvement pendulaire auquel il peut répondre et, entrant lui-même en vibration, manifeste l'existence et jusqu'à un certain point la quantité de cet élément. Le même appareil donne la synthèse du son étudié ; car, si l'on cesse de faire parler le tuyau, les diapasons continuent à vibrer quelque temps encore, et la superposition des mouvements qu'ils communiquent à l'air et à la membrane du tympan reproduit sensiblement le son du tuyau.

408. Rôle de la phase. — Le timbre d'un son musical étant défini par le nombre et l'intensité des sons simples en lesquels il est décomposable d'après le théorème de Fourier, la phase ne semble pas devoir intervenir. C'est en effet ce qui a lieu d'après M. von Helmholtz : « Les différences des timbres musicaux dépendent de la présence et de l'intensité des sons partiels, mais non de leurs différences de phases. » Cette proposition, confirmée par divers expérimentateurs (3), a été attaquée par M. Kœnig (4) ; mais son procédé consistant à faire défiler une sinussoïde indéfinie devant une fente d'une certaine largeur par laquelle sort un

(1) A.-M. Mayer, *American Journal of sciences and arts* (3), VIII, Aug. et Sep. ; 1874 ; et *Journal de physique*, IV, 184 (Maurat).

(2) On opérerait de même sur la membrane du phonautoscope (331) mise en vibration par une influence quelconque.

(3) Voir en particulier le travail de M. Schneebeli sur les voyelles.

(4) Kœnig, *Wied. Ann.*, XIV, 369 ; 1881 ; et *Quelques expériences*, 218.

courant d'air, ne garantit pas suffisamment la simplicité du son pour que l'on puisse admettre l'interprétation qu'il donne de phénomènes intéressants d'ailleurs.

409. Mécanisme de l'audition (¹). — Pour terminer ce sujet, il nous reste à indiquer comment on peut se rendre compte de la faculté que possède l'oreille de décomposer les mouvements de l'air en vibrations pendulaires.

L'organe essentiel de l'audition des sons musicaux paraît être la *membrane basilaire*, constituée par des fibres parallèles dont la longueur croît dans le rapport de 1 à 12 depuis la base jusqu'au sommet du *limaçon*. Sur ces fibres s'appuient les *piliers de Corti*, contre lesquels sont placées des *cellules ciliées* en rapport avec les terminaisons du nerf acoustique.

M. von Helmholtz admet que chaque fibre est accordée pour un son différent; et comme il y en a au moins six mille, le clavier basilaire est à même de répondre par une corde distincte à chacun des sons simples de l'échelle musicale. Il faut comprendre d'ailleurs que chaque fibre n'est pas strictement affectée à une note; elle est seulement influencée d'une façon particulière par cette note (401). D'après la faculté d'étouffement que doit posséder

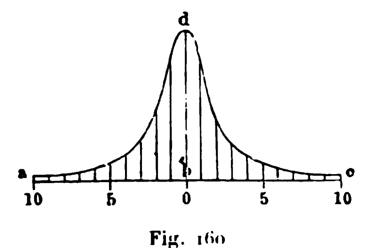


Fig. 160

l'oreille pour saisir nettement des trilles de dix notes à la seconde, M. von Helmholtz estime que l'intensité de la vibration excitée dans une fibre auditive par un son distant d'un demi-ton du son propre de cette fibre est encore le 1/10 de l'intensité relative à l'unisson absolu. La figure 160 donne une idée de la loi sui-

(¹) Pour l'étude des organes de l'ouïe et de la voix, consulter l'*Acoustique biologique* de M. Gavarret (Paris, Masson; 1877), ouvrage auquel nous avons emprunté un grand nombre de nos figures.

vant laquelle diminue alors l'intensité de la vibration fluence quand la différence de hauteur augmente : *ab* e signent chacun l'étendue d'un ton entier ; *bd* est l'i maximum, relative à l'unisson absolu avec le son exc La même courbe montre l'intensité des battements] dans l'oreille par deux sons différents de la gamme ; sei alors 5 divisions représentent un ton entier, puisque la (des deux sons est le double de la distance de chacun d'e fibre moyenne : *i* étant l'intensité correspondant à l'abscis déterminée, les deux sons battront avec une intensité qui de o à $4i$.

410. Voix humaine voyelles. — L'organe de la v maine est une anche membraneuse (364), surmontée de (pharynx, bouche, nez) constituant un résonnateur de forn dimensions variables.

Les sons produits par cet organe se partagent communéı voyelles et consonnes.

Les voyelles peuvent se grouper ainsi, suivant leurs affin

A
O *É*
EU
OU *I*
U

Si on les soumet à l'analyse, on constate en général six harmoniques perceptibles, mais d'intensités très variabl(la voyelle émise. Pour chaque voyelle, la bouche prend une forme déterminée, et par suite elle renforce certain renforcement, que découvrit Donders [1] (en prononç voyelles à voix basse), a été vérifié par M. von Helmhc bouche étant disposée pour prononcer une voyelle, il en ap| tour à tour divers diapasons, et remarquait ceux dont le s particulièrement renforcé [2]. Il a déterminé ainsi les sons ou *vocables* des différentes voyelles :

[1] Donders, *Archiv für die Hollandische Beiträge*, I, 157. Berlin ; 185

[2] Citons encore le procédé de M. Auerbach, qui frappe avec le doi bouche préparée pour la voyelle dont il veut déterminer le vocable.

OU	*O*	*A*	*EU*	*U*	*É*	*I*
fa_2	$si_3\flat$	$si_4\flat$	$ut_5\sharp$	sol_5	$si_5\flat$	$ré_6$
			fa_3	fa_3	fa_3	fa_3.

Pour plusieurs voyelles il y a deux sons propres correspondant l'un au fond, l'autre à l'entrée de la bouche disposée alors en forme de bouteille à goulot plus ou moins long.

D'après M. Kœnig, qui a répété avec soin ces expériences, les notes fixes caractéristiques de l'*OU* et de l'*I* seraient $si_2\flat$ et $si_6\flat$, de façon que l'on aurait la série très simple :

OU	*O*	*A*	*É*	*I*
$si_2\flat$	$si_3\flat$	$si_4\flat$	$si_5\flat$	$si_6\flat$.

Ces déterminations sont fort difficiles, les quantités à étudier étant essentiellement changeantes. En réalité, une voyelle est très mal définie par une lettre, qui désigne des sons différents chez les différents peuples, chez les différentes personnes, chez une même personne dans différentes circonstances : la véritable définition serait précisément le timbre.

Malgré ces difficultés, M. von Helmholtz admet que pour chacune des voyelles la cavité buccale présente une résonnance déterminée, indépendante de la hauteur à laquelle la voyelle est émise ; de sorte que la bouche renforce dans le son des cordes vocales tous ceux des harmoniques qui coïncident avec l'un de ses sons propres ou qui en sont tout au moins assez voisins, tandis qu'elle étouffe plus ou moins les autres.

Cette théorie est confirmée par la prédilection de chaque voyelle pour certaines notes (celles qui avoisinent le son propre, l'octave basse ou la douzième basse de ce son).

Ainsi l'*OU*, dont la note caractéristique est fa_2, se produit le plus facilement sur les notes fa_2 et ses voisines mi_2 et $ré_2$, ainsi que sur fa_1.

L'*É*, dont l'une des caractéristiques est fa_3, convient au fa_3 et aux notes légèrement supérieures jusqu'au mi_3, de même qu'aux sous-harmoniques du fa_3, c'est-à-dire au fa_2 et au $si_1\flat$. Bien que par sa deuxième caractéristique il touche aux registres élevés, c'est princi-

palement, avec l'*OU*, la voyelle des basses (qui vont communément du fa_1 au $ré_3$).

Les voix de soprano (si_2 — sol_4 [1]) se complaisent aux sons *O*, *A* : aussi la langue italienne, si riche en ces terminaisons, prête-t-elle à ces voix un charme tout spécial.

L'influence du son caractéristique est surtout frappante pour les notes placées aux limites du registre vocal. Une voix de femme qui veut émettre une note plus grave que l'ut_3 tourne nécessairement à l'*O* ou à l'*OU*; de là cet accent sourd particulier à la voix de contralto (mi_2 — ut_3). Tous les chanteurs connaissent par expérience l'affinité de certaines voyelles pour certaines notes, et savent en tirer parti à l'occasion [2].

Willis [3], dont les travaux ont conduit Wheatstone [4] à poser le premier la théorie des voyelles, avait essayé de reproduire les sons de la voix avec des anches à tubes résonnants de longueur variable, et il y avait en effet assez bien réussi [5].

M. von Helmholtz a employé au même usage son appareil (407) comprenant les diapasons suivants (les quatre derniers, ajouté après coup, étaient peu sonores) :

$si_1♭$	$si_2♭$	fa_3	$si_3♭$	$ré_4$	fa_4	la_4	$si_4♭$	$ré_5$	fa_5	$la_5♭$	$si_5♭$
1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16.

Le son fondamental de cette série formait un *OU* très sourd, qui se rapprochait davantage de l'*OU* parlé lorsqu'on y joignait doucement les sons 2 et 3. On obtenait un très bel *O* en donnant, outre le son fondamental un peu étouffé, le son 4 fort et les sons 2, 3 et 5 plus faibles. On produisait l'*A* en faisant sortir aussi vigoureusement que possible les sons les plus élevés de la série à partir du 5e et légèrement les autres. L'appareil donnait encore l'*É* quand on

(1) Nous parlons des voix ordinaires, car certaines basses descendent au fa_{-1} de 43vd, tandis que quelques soprani montent à l'ut_6 de 2100vd.

(2) Laugel, *La voix, l'oreille et la musique*. Paris, Germer-Baillière; 1867, p. 58.

(3) Willis, *Cambridge Phil. Trans.*, III, 231; 1833.

(4) Wheatstone, *London and Westminster Review*, oct. 1837.

(5) M. Faber, de Vienne, a construit sur le même principe une machine parlante dans laquelle les voyelles sont obtenues par l'emploi de diverses ouvertures communiquant avec une cavité spéciale. Un certain nombre de pièces, imitant le jeu des dents, des lèvres et de la langue, permettent de produire les consonnes. Le résultat est satisfaisant (*Journal de physique*, VIII, 274; 1872 (Gariel)).

renforçait le son 3, mais il ne permettait pas d'atteindre jusqu'au son caractéristique de l'*I*.

Depuis ces remarquables travaux de M. von Helmholtz, la question a été maintes fois reprise.

Le récepteur habituel des mouvements vibratoires, la membrane a été utilisée sous toutes ses formes et de toutes les manières pour l'étude de la voix humaine.

En parlant dans une embouchure reliée à une membrane agissant sur un style (logographe de Barlow ([1]), phonautographe de Schneebeli ([2])) ou sur une flamme manométrique (Kœnig ([3])), on a

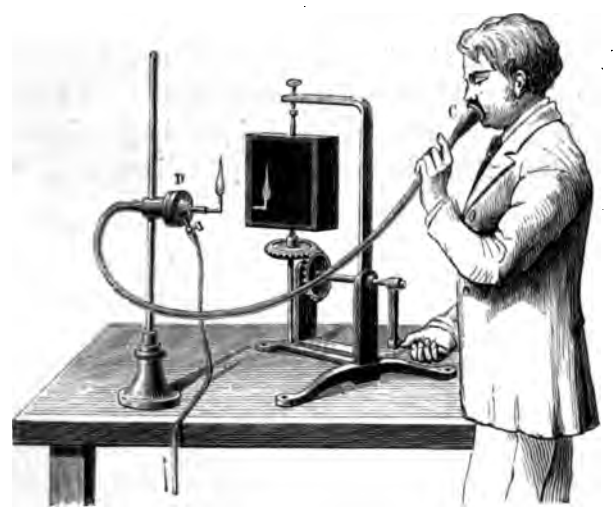


Fig. 161

obtenu les figures relatives aux diverses voyelles à différentes hauteurs, et même l'indication de certaines consonnes ([4]). La plaque d'un téléphone, disposée de manière à former le fond d'une capsule manométrique (Fröhlich ([5])), fait prendre à la

([1]) Barlow, *Proceedings of the Royal Society*; 1874; et *Journal de physique*, VIII, 78.

([2]) Schneebeli, *Archives de Genève* (2), CXIV, 79; et (3), I, 149; 1878-79.

([3]) Kœnig, *Pogg. Ann.*, CXLVI, 161; 1872; et *Quelques expériences*, 56.

([4]) Ainsi l'*R* muet (que l'on peut prolonger indéfiniment sans voyelle), produit dans la flamme une sorte de hérissement; le *B* et en général les explosives se marquent au logographe par un saut brusque.

([5]) Frœhlich, *Handbuch d. Elektricität u. d. Magnetismus*, 291. Berlin, Springer; 1887.

flamme des apparences du même genre, bien qu'un peu compliquées. L'analogie se poursuit avec les tracés phon phiques, comme le montre le dessin ci-joint, dans l

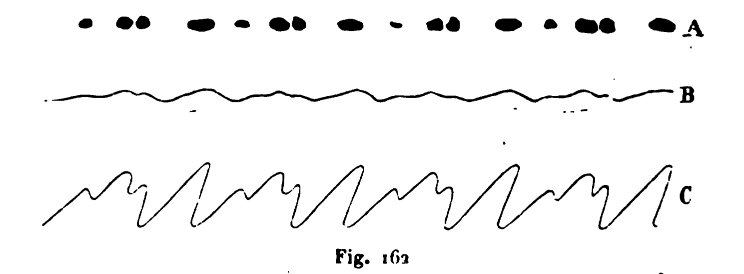


Fig. 162

M. A.-M. Mayer ([1]) a réuni, en A l'impression produite sur la fe d'étain par l'*A*, en B la coupe transversale de cette feuille et le profil de la flamme manométrique impressionnée pa même voyelle. Sous le nom de phonéidoscope, M. S

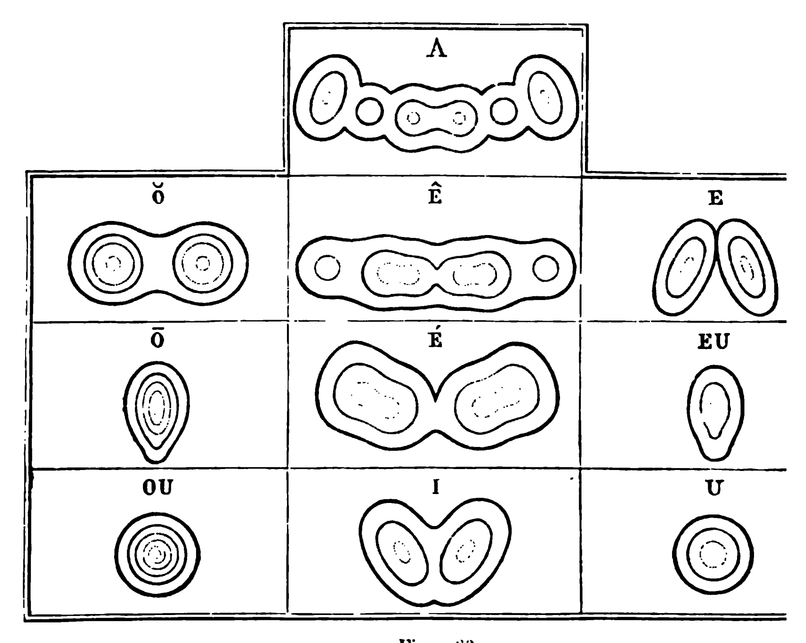


Fig. 163

Taylor ([2]) a construit un appareil permettant d'étudier l'effet

([1]) A.-M. Mayer, *Journal de physique*, VII, 113; 1878.
([2]) Sedley Taylor, *Journal de physique*, VIII, 92; 1879.

voyelles sur les lames liquides minces. M. Guébhard (1) a effectué l'expérience sous une forme très simple et très ingénieuse : il suffit d'émettre les diverses voyelles au-dessus de la surface fraîchement nettoyée d'un mercure très impur, pour obtenir, par la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'haleine, les curieux diagrammes ci-contre.

Les résultats de toutes ces recherches coïncident en général avec la théorie de M. von Helmholtz. Cependant cette théorie, attaquée dès le début par M. von Quanten (2), n'est pas admise par tous les physiciens.

D'après M. Grassmann (3), les trois voyelles *OU*, *U*, *I* constituent une première série caractérisée par la présence d'un seul harmonique, inférieur à ut_3 pour *OU*, à mi_4 pour *U*, et sans limite pour *I*. La voyelle *A* répond à une nombreuse suite d'harmoniques, d'intensités presque égales. Enfin, *O*, *EU*, *É* peuvent être considérés comme résultant de la superposition de l'*A* et de l'une des voyelles du premier groupe :

$$O = A + OU \qquad EU = A + U \qquad \acute{E} = A + I.$$

A l'appui de cette théorie, on citera les expériences de M. Schneebeli et celles de M. Lahr (4).

Ayant relevé les courbes marquées à son phonautographe par l'*O* sur les notes mi_3, sol_3, ut_4 et mi_4, M. Schneebeli chercha à les décomposer en sinussoïdes élémentaires, d'après le principe de Fourier : à cet effet, il divisa la période en vingt-quatre parties égales, mesura les ordonnées correspondantes, puis, écrivant que chacune était la somme des ordonnées des six premières sinussoïdes, il détermina les grandeurs de ces ordonnées, d'où il conclut les intensités relatives des six premiers harmoniques (les intensités sont proportionnelles aux carrés des amplitudes et des nombres de vibrations respectifs) ; il trouva ainsi que le timbre de la voyelle *O* est caractérisé non par le renforcement d'un son fixe, toujours le

(1) Guébhard, *Journal de physique*, IX, 242 ; 1880.
(2) Von Quanten, *Pogg. Ann.*, CLIV, 272 ; 1875.
(3) Grassmann, *Wied. Ann.*, I, 606 ; 1877.
(4) Lahr, *Wied. Ann.*, XXVIII, 94 ; 1886.

même quel que soit le son fondamental, mais par la prédominance constante de l'octave.

M. Lahr, reprenant la question, a répété d'abord les expériences de M. von Helmholtz sur la résonnance de la cavité buccale, ainsi que sur la synthèse des voyelles au moyen des diapasons, puis il a eu recours au phonographe. Déjà MM. Fleeming Jenkin et Ewing [1] avaient appelé l'attention sur les phénomènes que l'on provoque en tournant plus ou moins vite l'appareil quand on lui fait reproduire la parole. M. Lahr observe que si l'on a émis un *OU* en face du phonographe marchant à une allure moyenne, l'appareil redonne d'abord un *OU* qui, par une vitesse plus grande, se change en *U* et même en *I* si la vitesse atteint une valeur suffisante. Pareillement, *O* devient *EU*, puis *E*, par un accroissement convenable de vitesse. D'autre part, M. Lahr, amplifiant les tracés obtenus sur la feuille d'étain et les analysant comme M. Schneebeli, arrive à des résultats d'accord avec la théorie de M. Grassmann. Il conclut donc également que, vu la nature, le nombre et l'intensité des sons constitutifs, les voyelles sont aussi compliquées que les couleurs.

Sans doute ces expériences n'échappent pas à toute critique, et M. Auerbach [2] a pu trouver réponse aux contradicteurs de M. von Helmholtz. Il est certain que les conditions de résonnance d'une membrane et surtout d'une membrane métallique ne sont pas identiques à celles d'une masse d'air. On peut tenir pour suspectes en semblable matière les indications d'appareils aussi imparfaits, au point de vue du timbre, que le téléphone et le phonographe. Néanmoins, la question semble plus compliquée actuellement qu'au lendemain du jour où parut le livre de M. von Helmholtz.

411. Théorie de la consonnance. — *Théories anciennes: Pythagore, Sauveur, Euler, Rameau.* — Toute consonnance est caractérisée par un rapport simple entre les nombres des vibrations des deux sons en présence (353) : plus le rapport est simple, plus la consonnance est parfaite.

(1) Jenkin et Ewing, *Nature*, XVIII, 340 et 394; 1878.

(2) Auerbach, *Pogg. Ann.*, *Ergänz-Band*, VIII, 177; et *Wied. Ann.*, III et IV, *passim*; 1878.

:s Pythagoriciens, que leurs mesures avaient amenés intui-
ient à ce fait, le rattachaient à leur grande loi de l'harmonie erselle.

ırtant de ce principe que « l'âme par sa nature aime en même s et les perceptions simples parce qu'elles ne la fatiguent t et les perceptions variées parce qu'elles lui épargnent l'ennui uniformité », Sauveur ([1]) expliquait le charme des accords par oïncidences des pulsations à intervalles réguliers et très courts. coïncidences se produisant toutes les vibrations, toutes les deux ıtions, toutes les trois vibrations, correspondent l'unisson, l'oc- la douzième ou la quinte. Quand les rencontres n'ont lieu que s les cinq ou six vibrations, comme dans les tierces, les percep- sont moins simples, mais cependant encore agréables à cause ur variété. Au delà, elles cessent de plaire. A plus forte raison, attements sont-ils désagréables. « On trouve en effet que les rds dont on ne peut entendre les battements sont justement que les musiciens traitent de consonnances et que ceux dont attements se font sentir sont les dissonances; quand un accord lissonance dans une certaine octave et consonnance dans une e, c'est qu'il bat dans l'une et ne bat pas dans l'autre. » lleurs, le terme de l'agrément des accords serait moins fixé la nature que par l'usage, ce qui rendrait compte de la diver- e des goûts musicaux chez les différents peuples.

ıelques-unes de ces idées se retrouveront dans la théorie méta- ique d'Euler ([2]) : « la consonnance est la sensation agréable ltant de la perception de l'ordre sans fatigue de l'esprit » ; ıres, dans la théorie physique de M. von Helmholtz ; tandis le principe de la coïncidence des pulsations est peut-être trop ssé.

ous mentionnerons encore la théorie de Rameau([3]). Selon l'illustre cien dijonnais, la consonnance s'explique par la propriété que dent naturellement les corps d'émettre, outre le son fonda- al, toute une série d'harmoniques, propriété qu'il appelle la

SAUVEUR, *Mémoires de l'Académie;* 1700.
EULER, *Mémoires de l'Académie;* 1740.
RAMEAU, *Nouveau système de musique théorétique*. Paris; 1726 ; et *Démons- du principe de l'harmonie*. Paris ; 1750. Voir aussi d'ALEMBERT, *Éléments sique suivant les principes de Rameau*. Lyon ; 1762.

résonnance multiple. L'octave n'étant d'ailleurs qu'une *réplique*, l'oreille rabaisse d'elle-même les harmoniques au degré voulu pour les consonnances. Sans doute, l'explication est insuffisante; mais Rameau a posé un principe exact en affirmant le rôle capital des harmoniques dans les accords.

Théorie de M. von Helmholtz. — La théorie de M. von Helmholtz s'appuie sur ce fait que les battements déterminent dans certains nerfs auditifs une excitation intermittente, désagréable comme toutes les excitations du même genre (lumière papillotante, grattements, etc.). D'après M. von Helmoltz, le summum du désagrément correspond à 33 battements par seconde : telle est la discordance aigre et sifflante produite par le concours de si_3 495^{vd} et de ut_4 528^{vd}. Au delà de 132, les battements cessent d'être perceptibles: la quinte ut_3 264^{vd} — sol_3 396^{vd} est parfaitement consonnante. La quarte ut_3 264^{vd} — fa_3 352^{vd} (différence 88^{v}) accuse déjà un commencement de dureté qui s'accentue dans les tierces ut_3 264^{vd} — mi_3 330^{vd} (différence 66^{vd}) et ut_3 264^{vd} — $mi_3\flat$ 308^{vd} (différence 44^{vd}). Dans les octaves graves, les tierces deviendront de vraies dissonances. Toutefois, suivant M. von Helmholtz, la netteté des battements et par suite la dureté de l'intervalle ne dépend pas seulement de la différence absolue des nombres de vibrations; elle tient aussi au rapport de ces nombres, autrement dit à la grandeur de l'intervalle. Ainsi

le demi-ton.	si_3 495^{vd}	— ut_4 528^{vd}
le ton.	ut_3 264	— $ré_3$ 297,
la tierce mineure.	mi_2 165	— sol_2 198,
la tierce majeure.	ut_2 132	— mi_2 165,
la quarte.	sol_1 99	— ut_2 132,
la quinte.	ut_1 66	— sol_1 99,

qui donnent tous 33 battements, sont d'une dureté manifestement décroissante. On comprend en effet que si deux sons se trouvent suffisamment éloignés dans l'échelle musicale, les fibres auditives simultanément ébranlées par ces deux sons vibrent trop faiblement pour que les battements soient encore appréciables.

Jusqu'ici nous avons supposé les deux sons concomitants

simples tous les deux. Mais les sons musicaux sont toujours accompagnés d'harmoniques, dont l'importance ressort immédiatement des rapprochements ci-dessous :

Unisson........	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Octave.........	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		2		4		6		8		10
Douzième......	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			3			6			9	
Quinte.........	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3	6	9	12	15	18	21			
Quarte.........	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4	8	12	16	20	24	28	32		
Sixte majeure..	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	5	10	15	20	25	30				
Tierce majeure.	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	5	10	15	20	25	30	35	40		
Tierce mineure.	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
Sixte mineure..	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	8	16	24	32	40	48	56			

Les harmoniques de deux sons à l'unisson coïncident tous : la consonnance est *absolue ;* et le moindre désaccord se traduira par un trouble complet, tous les harmoniques battant deux à deux.

Tous les éléments de l'octave existent déjà dans la tonique qui se trouve ainsi simplement renforcée : la consonnance est absolue et rigoureuse.

A la douzième, le deuxième son ne fait encore que renforcer certains éléments du premier. Il en serait de même pour la dix-septième, etc. Néanmoins, comme d'ordinaire l'intensité des harmoniques va en décroissant rapidement, la délimitation des intervalles fondée sur la coïncidence des harmoniques supérieurs sera d'autant plus vague pour l'oreille que ces harmoniques seront plus élevés.

mais mauvaises dans le grave, quoique encore nettement ca
térisées avec les timbres vigoureux.

Viennent enfin les consonnances *imparfaites* de la tierce
neure et de la sixte mineure, mal caractérisées, et pires qu
précédentes dans les régions graves.

L'influence des harmoniques ne se limite pas aux consonnan
« un même harmonique, commun à deux notes d'une mél
donne à ces deux sons une espèce de parenté que l'oreille pe
et qui peut servir de lien artistique entre eux. »

COURS

DE

PHYSIQUE

CONDITIONS DE LA PUBLICATION

Le tome premier du **Cours de Physique** forme un volume de mille pages publié en 2 parties (PHYSIQUE MOLÉCULAIRE).

PRIX DU TOME I. . . . . **28 fr.**

Le tome II est publié en 3 parties :

ACOUSTIQUE : 300 pages, 163 figures. . . . . **9 fr.**

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE : 354 pages, 276 figures. **10 fr.**

OPTIQUE PHYSIQUE (*sous presse*).

L'OUVRAGE COMPLET FORMERA QUATRE VOLUMES

4814-91. — CORBEIL. Imprimerie CRÉTÉ.

COURS

DE

PHYSIQUE

PAR

J. VIOLLE

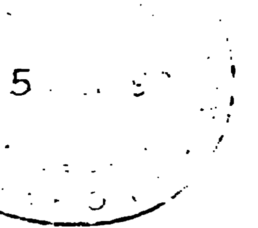
MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE

TOME II

ACOUSTIQUE ET OPTIQUE

DEUXIÈME PARTIE

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE



Avec 276 figures dans le texte.

PARIS

G. MASSON, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, Boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Medecine

M DCCC XCII

TABLE DES MATIÈRES

DE LA DEUXIÈME PARTIE DU TOME II

OPTIQUE

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE I

PROPAGATION RECTILIGNE DE LA LUMIÈRE

CHAPITRE II

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

I. — LOI DE LA RÉFLEXION.

II. — MIROIRS PLANS.

III. — MIROIRS SPHÉRIQUES.

CHAPITRE III

RÉFRACTION

I. — LOI DE LA RÉFRACTION.

II. — LAMES.

III. — PRISME.

IV. — LENTILLES.

CHAPITRE IV

DISPERSION

I. — HÉTÉROGÉNÉITÉ DE LA LUMIÈRE BLANCHE.

II. — MESURE DES INDICES DE RÉFRACTION.

III. — ACHROMATISME.

IV. — COULEURS.

CHAPITRE V

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

I. — ŒIL.

II. — INSTRUMENTS D'OPTIQUE.

OPTIQUE

De toutes les théories physiques, celle de la lumière est en même temps la plus solide et la plus délicate. Construit par l'effort admirable de Fresnel, le système des ondes règne sans conteste. Cependant, « nous ne nous proposerons pas de partir d'une hypothèse complète, formulée dans une suite de postulata sur la nature des vibrations lumineuses et la constitution du milieu où se propage la lumière, pour en déduire toute la série des phénomènes optiques (¹) ».

Moins encore aujourd'hui qu'il y a vingt ans une méthode aussi synthétique serait-elle applicable. Si en effet la théorie de Fresnel, avec quelques perfectionnements de détail, rend compte de tous les faits actuellement connus, d'autres idées ont été émises qui ne sauraient être passées sous silence; et lorsque plusieurs explications également plausibles se trouvent en présence, le choix ne devient possible entre elles que par une discussion supposant la connaissance de l'ensemble des choses, et mieux placée par conséquent à la fin qu'au début de l'optique.

Nous commencerons donc par l'exposé des faits qui peuvent être étudiés sans hypothèse aucune sur la nature de la lumière et à l'aide de simples considérations géométriques : d'où le nom d'*optique géométrique* sous lequel cette partie de la science est habituellement désignée.

(¹) VERDET, *Optique physique*, I, 69. Paris, Masson; 1869.

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE PREMIER

PROPAGATION RECTILIGNE DE LA LUMIÈRE

111. Propagation rectiligne. — Quand une source de nière S est cachée à notre œil O par un écran *opaque* E, il suffit carter l'écran de façon à découvrir la ligne droite SO pour l'œil voie la lumière. Ce fait d'expérience vulgaire a été érigé

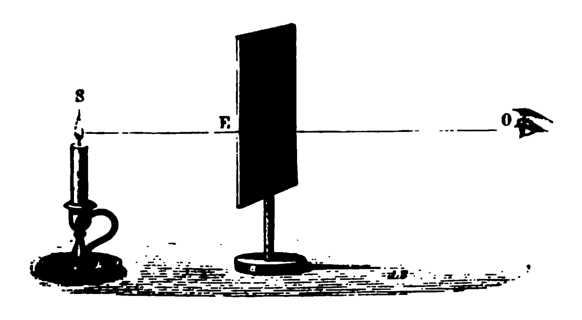


Fig. 164

cipe. Nous admettrons donc, sous réserve d'une discussion re, que *dans un milieu homogène la lumière se meut en roite.* Toute droite suivant laquelle se meut la lumière e nom de *rayon*.

incipe explique aisément les phénomènes bien connus des et de la chambre obscure.

s. — On voit immédiatement que sur un corps mis en d'un point lumineux la partie éclairée est limitée par la e contact d'un cône partant du point et circonscrit au que la portion de l'espace comprise à l'intérieur de ce

cône d'ombre au delà de la courbe de contact avec le corps es
tout entière dans l'obscurité.



Fig. 165

Lorsque la source lumineuse a des dimensions sensibles, outr
l'ombre régnant dans toute la partie postérieure du cône circons-
crit extérieurement, il y a une *pénombre*, limitée par le cône cir-

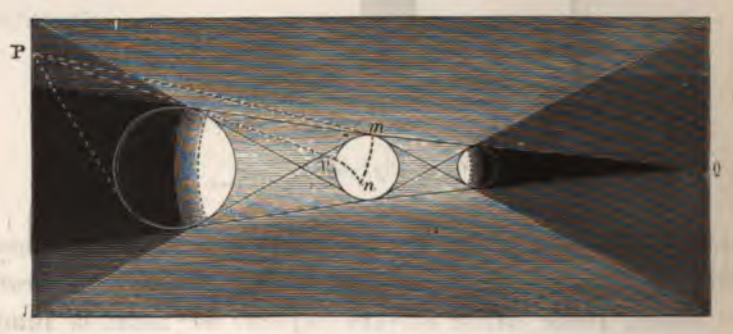


Fig. 166

conscrit intérieurement au corps et à la source : pour un poin
quelconque du champ situé dans ce cône au delà de la courbe d
contact avec le corps et en dehors de l'ombre, un éclairemen
partiel forme transition entre l'obscurité complète et la plein
lumière.

ure 166 montre la distribution de l'ombre et de la pé- pour deux sphères éclairées par un globe lumineux. es sphères est plus grosse que le globe, l'autre plus petite. le premier cas, qui se présente fréquemment avec nos lu- artificiels, l'œil placé en un point P de l'espace compris du corps entre les deux cônes voit la partie *mnpn'* de la



Fig. 167

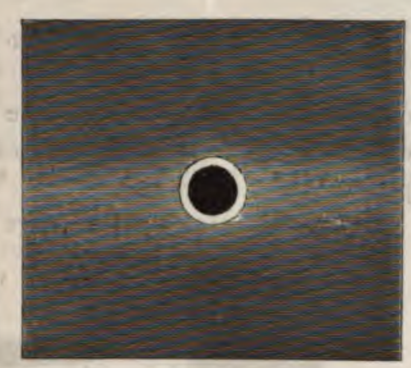


Fig. 168

Un écran établi en P reçoit la lumière de cette portion : nbre sera d'autant moins large, par conséquent l'ombre mieux accusée, que la source sera plus petite et l'écran proché.

uxième cas se rapporte l'éclairement par le soleil. L'ombre ar le soleil sur un objet terrestre se limite très nettement. encore très distincte sur un écran rapproché de l'objet; fur et à mesure que l'écran est éloigné, la pénombre l'ombre se rétrécit et finit par s'effacer. Comme tout e, l'œil placé entre les deux cônes voit une portion de e d'autant plus grande qu'il s'écarte davantage de l'om- constance nouvelle, la partie visible de la source peut la forme d'un anneau lumineux entourant le corps opaque : a l'apparence pour l'œil placé en Q au delà du sommet S d'ombre.

nsidérations s'appliquent aux *éclipses*.

ère la terre se projette un cône d'ombre beaucoup plus long

que le rayon de l'orbite lunaire : la lune (lorsqu'elle est p
être rencontrée par ce cône d'ombre, et comme il est su
large, elle peut y disparaître en entier. Ainsi l'inter
la terre entre le soleil et la lune produit les éclips

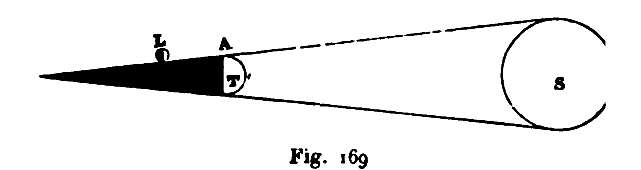


Fig. 169

éclipses partielles quand la lune ne pénètre qu'en par
cône d'ombre de la terre, éclipses totales quand elle y
plètement.

La lune entraîne aussi derrière elle un cône d'ombre,

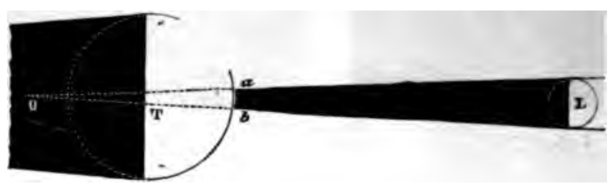


Fig. 170

peut rencontrer la terre (à la nouvelle lune), la poin
dépassant notre planète ou restant en deçà selon les cir
Si l'ombre arrive jusqu'à la terre, il y a éclipse total
pour tous les points que cette ombre vient à couvrir : le

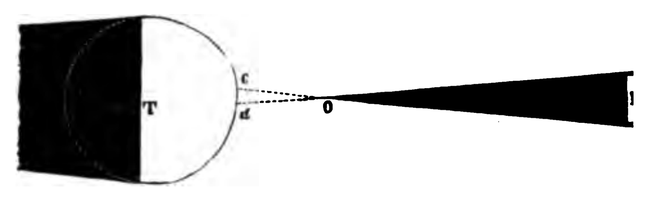


Fig. 171

est momentanément masqué comme par un nuage qui
rait rapidement d'un bord à l'autre de l'hémisphèr
éclairé. Si c'est seulement le prolongement du cône d'
rencontre la terre, l'éclipse est annulaire pour tous

successivement atteints par ce prolongement. De part et d'autre de la bande étroite sur laquelle l'éclipse est totale ou annulaire, s'étend d'ailleurs un large espace où l'on observe une éclipse partielle, de plus en plus faible à mesure qu'on s'approche de la surface du cône de pénombre, en dehors duquel tout phénomène disparaît.

Chambre obscure. — Quand la lumière venant d'objets extérieurs convenablement éclairés pénètre dans une chambre obscure par une ouverture étroite, elle donne sur un écran blanc opposé à l'ouverture un tableau renversé de ces objets. Si l'on considère chaque point extérieur comme le sommet d'un cône de rayons circonscrit à l'ouverture et marquant sur l'écran une petite tache lumineuse, on comprend immédiatement et la formation

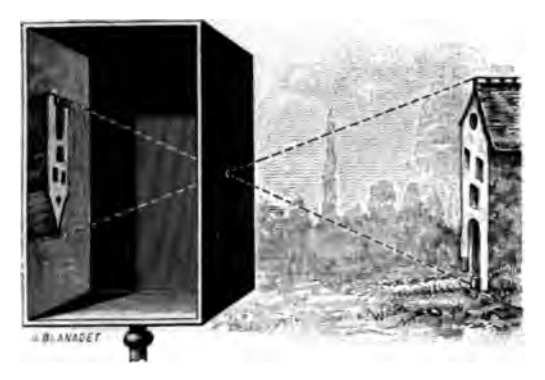


Fig. 172

et les imperfections du tableau. On conçoit aisément que la forme de l'ouverture, supposée toujours très petite, n'a pas d'effet sensible, hormis sur les bords ([1]).

Très anciennement connue sans doute, la chambre obscure fournit à Léonard de Vinci ([2]) l'indication exacte du rôle de l'œil dans la

([1]) Si dans ce tableau on veut distinguer les cinq qualités d'une image optique, nature, situation, grandeur, clarté et netteté, on dira que l'image est réelle et renversée, que sa grandeur est à celle de l'objet comme leurs distances respectives à l'ouverture, que la clarté est directement proportionnelle à la surface de l'ouverture et inversement proportionnelle aux carrés des distances de l'image et de l'objet à l'ouverture, tandis que la netteté est d'autant plus grande que la surface de l'ouverture est plus petite et la distance de l'objet plus grande.

([2]) VINCI (Leonardo de) (1452-1519). *Œuvres manuscrites.*

vision. Porta (¹) remplaça l'ouverture étroite par une large lentille, ce qui augmenta à la fois la clarté et la netteté de l'image, comme on le verra plus loin.

Un cas particulier du phénomène précédent est l'apparence du *pinceau solaire transmis par une ouverture étroite.* Quelle que soit



Fig. 173

la forme de cette ouverture, la section du pinceau par un plan perpendiculaire à sa direction est un cercle légèrement estompé sur les bords ; si le plan est oblique, la section est une ellipse. Tout le monde sait que la lumière du soleil, tamisée par le feuillage d'un arbre, dessine sur le sol des taches lumineuses circulaires ou elliptiques. Pendant une éclipse de soleil, ces taches se changent en croissants d'autant plus accusés que l'éclipse est plus complète.

(¹ Porta (Giambattista della), *Magia naturalis*, 2ᵉ édit., 1589. La première édition de ce livre, écrit par Porta à l'âge de quinze ans, avait paru à Naples en 1553, avait été réimprimée en 1558, reproduite à Anvers en 1564 et traduite dans toutes les langues.

CHAPITRE II

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

I. — Loi de la réflexion.

412. Loi de la réflexion. — *Partage de la lumière entre deux ilieux.* — Lorsqu'un rayon lumineux se propageant dans un cer-in milieu vient à en rencontrer un deuxième, un partage s'effectue ntre les deux milieux : tandis qu'une portion de la lumière pénètre lans le deuxième milieu où elle suit une route nouvelle (*réfraction*), e reste revient en arrière dans le premier. Ce reste se partage lui-nême en deux parties, dont l'importance relative dépend du degré le poli que présente la surface de séparation des deux milieux : si :ette surface était parfaitement polie, toute la lumière qui rebrousse chemin suivrait une direction unique et rigoureusement déterminée (*réflexion*) ; une surface absolument dépolie renverrait au contraire la lumière dans toutes les directions (*diffusion*) ([1]) ; en général, les deux faits se produiront simultanément.

Considérons d'abord la réflexion.

Ce phénomène frappa le premier homme qui vit son image dans une eau tranquille. Mais les miroirs naturels ne lui suffirent pas longtemps : l'Exode mentionne des miroirs artificiels, et l'on en a retrouvé dans les plus anciens tombeaux égyptiens. Ce furent d'abord des miroirs métalliques (bronze ou argent), parfois de l'obsidienne ; le verre ne servit que plus tard ; et les miroirs étamés sont relativement modernes : l'argenture par procédé chimique est toute récente. De bonne heure aussi, on utilisa la réflexion par les surfaces courbes : aux premiers jours de Rome, nous voyons

(1) C'est par la lumière diffusée à leur surface que nous voyons les objets.

Numa rallumer le feu sacré de Vesta au moyen des rayons du concentrés par un miroir ardent. La connaissance de ces faits nécessairement conduit les anciens philosophes à recherch mécanisme de la formation des images dans les miroirs. On t en effet dans la *Catoptrique* (κατὰ, dans; ὅπτομαι, voir) d'Eι (300 av. J.-C.) la loi célèbre (350) :

Loi de la réflexion. — *Le rayon incident et le rayon réfléch dans un même plan normal à la surface réfléchissante et fo angles égaux avec la normale au point d'incidence.*

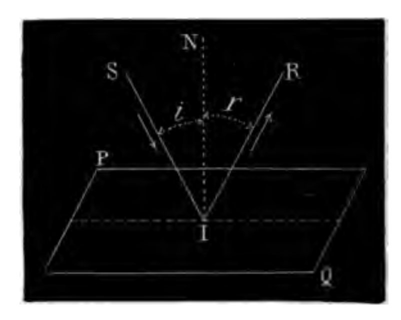


Fig. 174

Le rayon réfléchi IR est contenu dans le *plan d'incidence* c par le rayon incident SI et la normale IN au point d'incide l'*angle d'incidence* SIN est égal à l'*angle de réflexion* RIN.

Remarque. — Héron d'Alexandrie ajouta cette remarqu conde, que la lumière en se réfléchissant suit le chemin le court que l'on puisse tracer entre le point de départ et le p d'arrivée en touchant le miroir.

Il est aisé de vérifier qu'en effet, si l'on assujettit la lum émanée du point S à se rendre au point R par le chemin le court en touchant le miroir PQ, que nous supposerons plan (¹), doit suivre précisément la route assignée par la loi de la réflex Soit AB la projection de SR sur le plan PQ. Nous allons mon d'abord que le chemin le plus court doit être contenu tout e dans le plan SAB, normal au miroir PQ. Si en effet on sup

(¹) Si la surface réfléchissante n'est pas plane, le théorème est encor d'une manière générale; mais il peut se trouver en défaut dans certai très particuliers (Lévistal, *Ann. de l'Éc. norm.*, t. IV, 195; 1868).

que la lumière rencontre le miroir en un point G situé hors de AB, en abaissant de G la perpendiculaire GK sur AB et en menant les droites SK et KR qui se trouveront perpendiculaires à KG, on verra immédiatement que le chemin SGR n'est pas le plus court possible, puisque chacune des obliques SG, GR est plus longue que la perpendiculaire correspondante SK, KR.

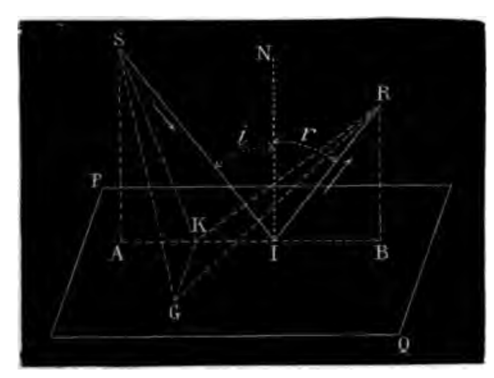


Fig. 175

Cela posé, cherchons sur la ligne AB le point I tel que SI + IR soit minimum. Posons SA $=a$, RB $=b$, AB $=d$ et AI $=x$. Pour que $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$ soit minimum, il faut que la dérivée de cette expression (qui n'est susceptible d'aucun maximum fini) s'annule, ou que

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Mais la première fraction représente précisément le sinus de l'angle d'incidence i, et la deuxième le sinus de l'angle de réflexion r ; et comme les angles i et r sont nécessairement l'un et l'autre plus petits que 90°, la condition précédente revient à

$$i=r,$$

ce qui est la deuxième partie de la loi.

Vérifications expérimentales. — a) *Appareil de Silberman.* — Dans les cours, on vérifie ordinairement la loi de la réflexion au moyen d'un appareil consistant essentiellement en un miroir horizontal A, fixé au centre du cercle gradué vertical MBNB' sur lequel peuvent

se mouvoir deux alidades S et R. La lumière, amenée par le miroir *m* sur le diaphragme *o*, traverse une petite ouverture ménagée dans ce diaphragme, puis, restreinte au besoin par un deuxième diaphragme reposant sur le miroir, elle forme un pinceau étroit *oc*

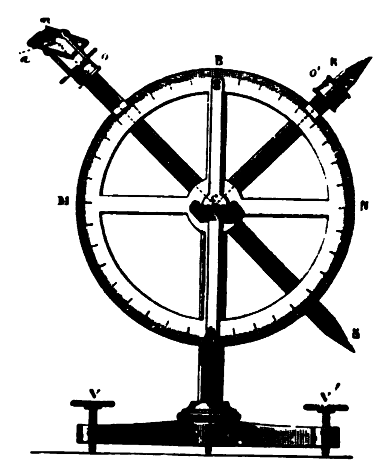


Fig. 176

dirigé suivant la première alidade S ; ce faisceau tombe sur le miroir A, s'y réfléchit suivant *co'* et sort par l'ouverture *o'* du diaphragme *d* porté par la deuxième alidade R, si celle-ci fait avec la verticale même angle que la première. La figure représente l'appareil tel que le construisit Silbermann. Dans certains modèles, les deux alidades sont reliées par deux tiges formant un parallélogramme articulé dont un sommet glisse sur la règle *c*; les deux angles *oc*B et B*co'* étant alors constamment égaux, on observe que, quelle que soit la direction du rayon incident déterminée par l'alidade S, le rayon réfléchi suit toujours l'alidade R. La démonstration est d'ailleurs forcément un peu grossière.

b) *Théodolite.* — On obtient une vérification beaucoup plus satisfaisante en relevant au théodolite la distance zénithale *z* d'une étoile directement d'abord, puis par réflexion sur un bain de mercure.

Le théodolite (θέα, vision ; δῆλος, clair ; ἴτυς, circonférence (?)) se compose essentiellement d'une lunette G, mobile sur un cercle gradué vertical A, qui peut tourner lui-même autour d'un axe ver-

se sert d'un niveau mobile, soutenu par deux fourchettes qui nent s'appuyer sur deux parties de l'axe B, cylindriques et de diamètre (¹), et l'on procède comme pour rendre horizontal géométrique de la lunette du cathétomètre.

1° Le théodolite étant bien réglé, on vise l'étoile S av lunette supérieure, on fait tourner l'appareil tout entier de autour de son axe vertical (²), on ramène la lunette sur l' par un déplacement égal à $2z$; d'où z.

2° On vise directement l'étoile suivant RS, puis l'ima l'étoile dans le bain de mercure MM'; d'après les lois de la réf

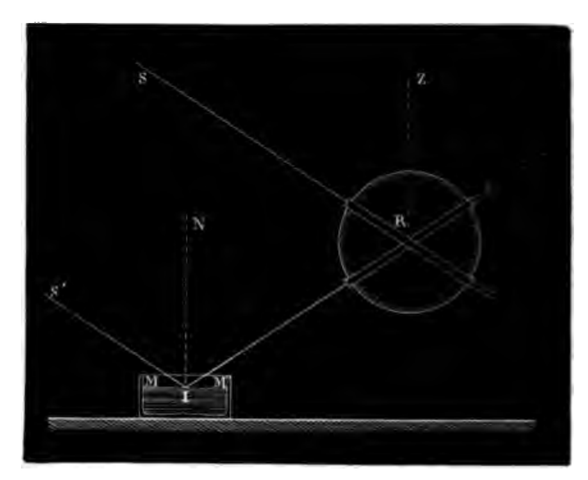


Fig. 178

l'angle NIR étant égal à l'angle S'IN, la lunette a tourné angle $SRI = \pi - 2z$; d'où z.

Les deux procédés donnant des valeurs de z égales entre (correction faite du mouvement diurne (³)), la loi sur laquelle o appuyé dans le deuxième cas est par là même démontrée au d'exactitude que comportent les observations au théodolite (1

(¹) Une petite fourche h maintient le niveau dans cette position et l'e de tomber d'un côté ou de l'autre.

(²) Ce retournement, qui n'a pour but que de suppléer à l'ignorance où trouve relativement à celui des diamètres du cercle qui est vertical, serai tageusement remplacé par un pointé sur le nadir, si l'on ne s'astreign pour la démonstration, à exclure de cette première expérience tout phé de réflexion.

(³) La correction sera négligeable pour une étoile assez voisine du pô

II. — MIROIRS PLANS.

413. Propriétés des miroirs plans. — *Image d'un point.* — e la loi générale de la réflexion il résulte que tous les rayons manés d'un point A et arrêtés par le miroir plan MN ont, après éflexion, la même direction que s'ils partaient d'un point A', ymétrique de A par rapport au miroir MN.

Par conséquent un œil placé en O, de manière à être frappé par s rayons réfléchis, recevra un cône de rayons ayant pour base l'ou-rture PQ de la pupille et pour sommet le point A' : il sera affecté



Fig. 179

rayons comme s'ils venaient directement du point A'; il point A'. Ce point A' est donc avec raison nommé l'*image* du

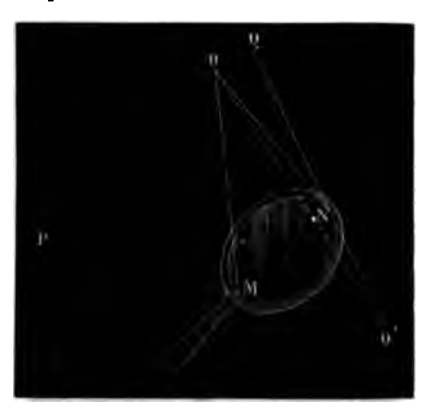


Fig. 180

A dans le miroir MN; au mot image les physiciens ajoutent thète de *virtuelle* pour indiquer que, formée par le con-

cours des prolongements des rayons et non de ces rayon mêmes, l'image n'existe pas réellement.

Les rayons réels sont compris dans le cône APQ, brisé e pour tracer ces rayons il suffit, ayant figuré le cône A'PQ coupe sur MN la surface BC, de mener les lignes BA, CA ainsi la marche de la lumière depuis l'objet jusqu'à l'œil.

Le *champ*, c'est-à-dire l'espace comprenant les objets pour l'œil O, est limité par la portion MNPQ du cône O'MN (fig

Image d'un objet. — Il est facile, d'après ce qui précè

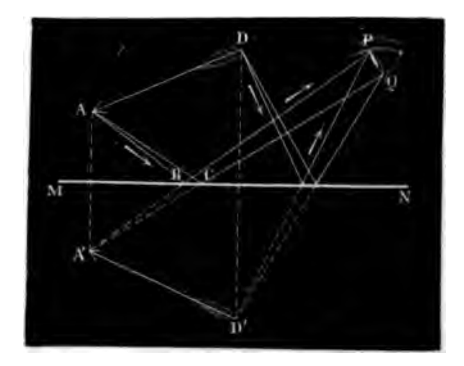


Fig. 181

tracer l'image A'D' de l'objet AD dans le miroir plan MN : virtuelle, droite, égale à l'objet, et symétrique de celui-rapport au miroir. En raison de cette dernière propriété, l n'est généralement pas superposable à l'objet.

La marche des rayons et le champ se déterminent comm



Fig. 182

haut. On en conclura, par exemple, que pour qu'une person

ntière dans une glace, il suffit que cette glace ait une
ıoitié de celle de la personne AB.

ns ici de côté l'importante question de l'*intensité*,
ous reviendrons plus tard en détail. Dans les miroirs
parmi lesquels il faut ranger les *glaces* de nos
, le tain ou l'argent déposé par derrière consti-
ıble surface réfléchissante), le rayon réfléchi contient
forte proportion de la lumière incidente. Il en est
nt avec les substances transparentes : l'intensité du
ıi, très faible sous l'incidence normale (eau 2 °/₀,
roît rapidement à partir de 45° pour devenir égale à
incidence rasante.

Les usages des miroirs plans sont extrêmement nom-

r de leur emploi continuel, soit à l'intérieur des
soit au dehors comme *réflecteurs* pour éclairer des
ecevant pas directement la lumière du ciel, ou
ns permettant à l'observateur de suivre du coin de
ncidents de la rue, nous citerons les *miroirs à* 45°



Fig. 183

esquels on redresse verticalement un objet hori-
ersement), et nous indiquerons rapidement quelques
curieuses qui, bien exécutées, sont d'un effet sai-

iques. — C'est d'abord le *miroir magique,* dans lequel
, renouvelant un vieux prodige, montrait encore
de Médicis des apparitions prophétiques; la figure

ci-contre donne l'explication du phénomène d'après Robe
le célèbre créateur de la fantasmagorie.

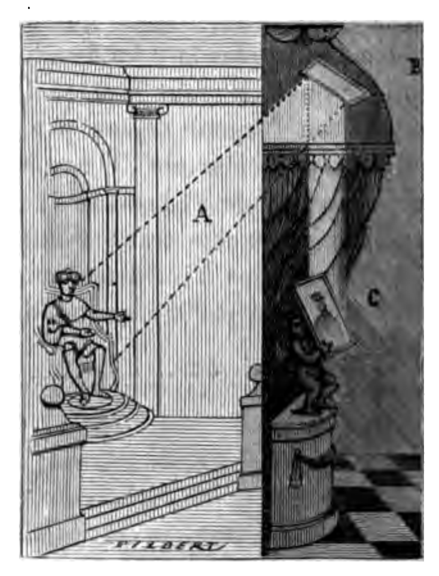


Fig. 184

Au théâtre, les *spectres* s'obtiennent par un moyen ana
que les figures ci-jointes suffisent à expliquer. Ajoutons,
Robert Houdin (1), que, pour la réussite de l'expérience, la
sans tain, dans laquelle se forme l'image de l'acteur-spect
doit présenter aucun défaut qui permette aux spectateurs d'en
çonner l'existence ; la scène doit être faiblement éclairée e
contre l'acteur-spectre doit être inondé de lumière, tandis q
fond sur lequel il se déplace, recouvert de velours noir mat, re
complètement obscur ; enfin il faut que l'acteur-spectre re
une inclinaison telle que son image réfléchie soit verticale et
remplace les mouvements naturels par leurs symétriques rela
ment à la glace : s'il brandit une arme, ce sera de la main ga
pour que la réflexion le représente agissant de la main droite.
spectres, utilisés de longue date par les thaumaturges (2), on
introduits au théâtre en 1863 par le directeur de la « Polytec
Institution », M. Pepper, et souvent employés depuis d'une f

(1) ROBERT HOUDIN, *Magie et physique amusante* (œuvre posthume).
Calmann Lévy ; 1877.

(2) Voir DE ROCHAS, *Origines de la science*, 76. Paris, Masson ; 1884.





Fig. 185 et 186

plus ou moins heureuse [1]. Le perfectionnement le plus int est celui des spectres fondants « dissolving spectres » : en é alternativement et progressivement la scène et le sous-sol tient la transformation graduelle du sujet placé sur la t l'image de celui qui se trouve au-dessous, et vice versa, et l ainsi produire les métamorphoses les plus surprenantes.

Le *décapité parlant* est encore un tour du même genre sonnage, dont on ne voit que la tête, a le corps caché par un de glaces donnant aux spectateurs l'illusion du vide. Dans l



Fig. 187

sition figurée ci-contre, par exemple, les deux côtés de la t paraît porter la tête sont fermés par des glaces vertical lesquelles se reflètent des tentures agencées de façon q image continue exactement le fond de la pièce. En avant, barrière empêchant d'approcher trop près.

414. Mesure des angles. — 1° *Mesure d'un angle p Méthode de Poggendorf.* — Nous avons vu (117) comment P dorf a utilisé pour la mesure des angles la propriété que p

[1] Dans les théâtres forains, dépourvus de sous-sol, un miroir ve placé obliquement à la scène, et l'acteur-spectre se tient dans la première

le rayon réfléchi par un miroir tournant de se déplacer d'un angle double de celui que décrit le miroir.

Sextant. — Sur la même propriété repose le sextant, imaginé par Newton [1]. Cet instrument, si bien adapté à la mesure des distances angulaires en mer, porte deux miroirs, l'un, C, fixe,

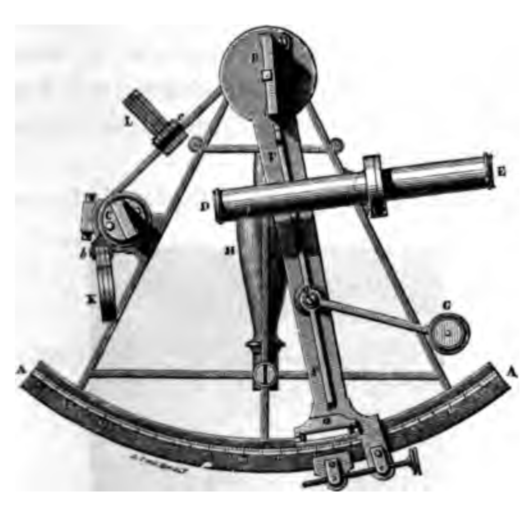


Fig. 188

l'autre, B, mobile autour du centre de l'arc AA : le premier, sur lequel est braquée une lunette fixe, ED, est constitué par une glace étamée dans sa moitié inférieure seulement et transparente dans sa moitié supérieure; le deuxième est commandé par l'alidade FF,

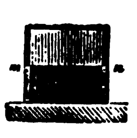


Fig. 189



Fig. 190

dont l'extrémité est munie d'un vernier et d'une loupe G. Pour se servir du sextant, on le prend par la poignée H et on le place devant son œil en l'inclinant plus ou moins de façon à le mettre

[1] NEWTON, *Lettre à Halley*, 1700 (*Phil. Trans.*, 1742).

dans le plan de l'angle à mesurer qui sera, par exemple, l'ang deux astres. On vise directement l'un des astres à travers la j supérieure de la glace C, et en agissant sur l'alidade FF, on a également sous le réticule de la lunette l'image du deu astre, réfléchie d'abord sur le miroir B, puis sur la partie infér de la glace C. Pour cela, il a fallu faire tourner l'alidade moitié de l'angle à mesurer; cet angle se lit directemen l'arc AA, divisé à cet effet en demi-degrés qui sont num comme des degrés, le zéro de la graduation corresponda parallélisme des deux miroirs ([1]).

2° *Mesure d'un angle dièdre.* — La réflexion de la lumière f

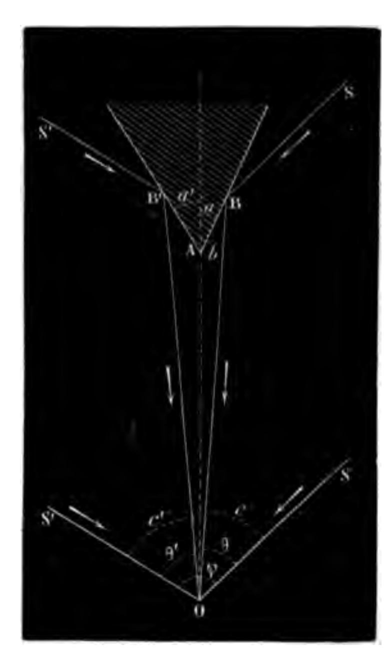


Fig. 191

aussi un procédé précis pour la mesure de l'angle dièdre de surfaces planes.

Si les portions de surfaces sur lesquelles on opère sont u grandes et éloignées, comme par exemple les deux faces d'u

([1]) Nous laissons de côté les verres colorés, K, L, destinés à affaiblir au l'image d'un objet trop lumineux, ainsi que le mécanisme servant à éle abaisser la lunette afin d'augmenter ou de diminuer l'intensité de l'image

prisme à gaz ou à liquide, on emploiera avantageusement le théodolite.

L'instrument étant installé à quelque distance, en O, et réglé, on procède au réglage du prisme, que nous supposerons mobile. A cet effet, on vise dans la face B l'image d'une mire verticale très éloignée S (un paratonnerre ou une arête de construction dont on aura vérifié la verticalité), on agit sur le prisme de manière que cette image coïncide avec le fil vertical du réticule de la lunette; la face considérée est alors verticale. On rend de même verticale la face B' au moyen d'une deuxième mire verticale très éloignée S'. On revient à la première face que la dernière manœuvre a dérangée, puis on retourne à la deuxième; et, en répétant plusieurs fois l'opération, on arrive à rendre exactement verticales les deux faces et par suite leur commune intersection.

On mesure les trois angles $SOB=\theta$, $B'OS'=\theta'$ et $SOS'=\varphi$: ces données déterminent l'angle A du prisme.

On a en effet

$$A=a+a',$$

a et a' étant les angles formés par les faces B et B' avec la droite OA prolongée.

De même, si l'on désigne par c et c' les angles de OA avec les rayons OS et OS',

$$\varphi=c+c'.$$

D'ailleurs, il est manifeste que

$$\theta=2b, \qquad \theta'=2b'.$$

Cela posé, les deux triangles ABO, AB'O donnent

$$a=b+c-\theta,$$
$$a'=b'+c'-\theta',$$

et par suite

$$a+a'=b+b'+c+c'-(\theta+\theta'),$$

ou

$$A=\varphi-\frac{\theta+\theta'}{2}.$$

Si l'on consent à déplacer le théodolite, on peut ne fair
que d'une seule mire extrêmement éloignée S. On met alors
dolite d'un côté du prisme, on mesure l'angle θ du rayon
avec le rayon direct; on transporte l'instrument de l'aut



Fig. 192

du prisme, on mesure de même l'angle θ'. L'angle du pri

$$A = \frac{\theta + \theta'}{2}.$$

Goniomètres.

Goniomètre de Fraunhofer. — Quand le prisme est de
sion ordinaire et que l'arête du dièdre à mesurer existe réel
on emploie avantageusement le goniomètre (γωνία, an
Fraunhofer, lequel n'est qu'un théodolite simplifié par la s
sion du limbe vertical et muni au limbe horizontal d'une
mobile, qui porte une lunette excentrique pointant vers le
En ce point est une plate-forme fixe, munie de vis calan
laquelle se place le prisme.

Pour mesurer l'angle du dièdre proposé, on vise encore

deux faces l'image d'une mire éloignée : l'angle des deux positions de la lunette est le double de l'angle cherché, comme dans le cas précédent.

L'axe du goniomètre étant vertical, la lunette horizontale et le fil du réticule vertical, on rend l'arête du prisme parallèle à l'axe en procédant comme d'habitude : on vise une mire verticale éloignée successivement dans chacune des deux faces du prisme, et l'on redresse celui-ci, à l'aide des vis V, de manière que l'image coïncide avec le fil du réticule (ou mieux lui soit parallèle, les deux lignes étant très rapprochées). Quand on opère sur l'une des faces, on dérange l'autre, à moins d'agir par rotation autour d'un axe perpendiculaire à cette autre : c'est donc ainsi que l'on devra s'efforcer de procéder.

On fait d'ailleurs coïncider l'arête du prisme avec l'axe de l'ap-

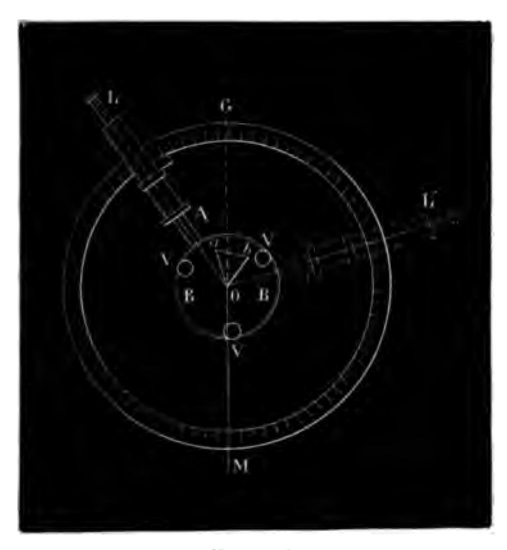


Fig. 193

pareil, en opérant de la manière suivante. On adapte à la lunette un verre permettant de voir nettement le prisme que l'on a déjà, bien entendu, placé aussi exactement qu'on a pu au centre de la plate-forme. On amène l'alidade dans une position telle que l'on voie l'arête du prisme sous le fil vertical du réticule; on fait tourner la lunette sur elle-même de 180°; la superposition est en général détruite; on la rétablit moitié par déplacement de l'alidade

moitié par glissement du prisme sur la plate-forme, moitié]
tion de l'alidade, puis on recommence jusqu'à réglage pa
prisme étant ainsi centré, le rayon réfléchi suivant l'axe
de la lunette ne proviendra pour chaque côté que d'une p
surface très voisine de l'arête : il faudra donc avoir soin
mesures ultérieures (déviation) de n'utiliser que ces por
surface sur lesquelles on vient d'opérer et dont l'angle ne
ordinairement le même que celui des portions éloignées d
Cela sera toujours facile avec un prisme solide : il n'en s
de même avec un prisme à liquide.

Goniomètre de Charles. — Le plus ancien goniomètre (ab
faite du goniomètre d'application dû à Carangeot et seul
par Haüy) est le goniomètre de Charles, dans lequel l'
mesure par le déplacement du prisme. Si donc l'appareil se
essentiellement des mêmes pièces que le précédent, la dispo
est inverse : la plate-forme, rendue solidaire de l'alidade, p
ner avec elle autour du centre, tandis que la lunette est fi
riablement suivant un rayon du cercle. Le prisme est pos
la cire molle, l'arête de l'angle à mesurer aussi exactem
possible au-dessus du centre et parallèle à l'axe. La mesure
à lire sur le cercle les deux positions de l'alidade pour l
l'image de la mire, dans l'une, puis dans l'autre face, coïn
le fil du réticule de la lunette ; la différence des deux lectur
le supplément de l'angle cherché. Car, pour que la fac

lointaine par un *collimateur*, c'est-à-dire par une fente F, placée au foyer principal d'une lentille convergente G ; une telle fente, éclairée par une source quelconque, est en chaque point le sommet d'un cône de rayons que la lentille rend parallèles; elle équivaut donc à une mire située à l'infini. Un centrage rigoureux de l'arête du prisme n'est plus nécessaire; le parallélisme de cette arête et de la mire est la seule condition indispensable; et, une fois réalisée, elle est à l'abri des dérangements que laissent toujours craindre les appareils à mire indépendante. Aujourd'hui, on remplace avantageusement la fente par un réticule. L'appareil se compose alors d'un cercle divisé horizontal, au centre duquel est une plate-forme à vis



Fig. 194

calantes et à surface réfléchissante recevant le prisme sur lequel pointent deux petites lunettes astronomiques, l'une fixe, jouant le rôle de collimateur, l'autre mobile, servant de viseur.

Les fils des deux réticules étant perpendiculaires au plan du limbe, on règle d'abord la lunette viseur en enfonçant plus ou moins l'oculaire de façon à voir nettement le réticule, et en mettant la lunette au point sur l'infini par visée sur un objet très éloigné;

puis, amenant la lunette mobile en face de la lunette fixe, on règl celle-ci de manière que son réticule soit vu nettement dans la pre mière, et que les points de croisement des réticules coïncident Après quoi, on fixe avec un peu de cire molle le prisme sur la plate forme, et on s'arrange de sorte que l'image de l'arête dans l plate-forme soit le prolongement de l'arête même : l'arête est alor à très peu près perpendiculaire au limbe. On achève le réglag comme d'habitude, en amenant l'image de la mire dans chaque face à coïncider avec le réticule du viseur placé dans une position conve nable dont on ne le dérangera pas. Il n'y a plus alors qu'à lire su le cercle gradué les deux positions de l'alidade de la plate-forme pour lesquelles les deux faces du prisme réfléchissent successive ment dans le viseur l'image du réticule collimateur. La différen des deux lectures, qui se font avec une grande précision (la mê qu'au théodolite), donne le supplément de l'angle cherché ([1]).

Goniomètre de Wollaston. — Sur le même principe repose goniomètre de Wollaston, où la lunette est supprimée et remplac par l'œil de l'observateur visant dans une direction constante pe dant une même mesure. Le limbe est vertical ([2]); par conséque l'arête du prisme et la mire doivent être horizontales. La figure 19 représente cet appareil, si précieux pour les mesures cristallogra phiques, que la petitesse ([3]) et le défaut de poli des faces renden particulièrement pénibles. Le cristal C est collé à l'extrémité d'u support articulé S, fixé à l'axe VR. Cet axe tourne à frottemen doux dans l'intérieur d'un manchon Q qui traverse le pied P e qui porte d'un côté le tambour T et de l'autre le disque gradué D mobile devant l'alidade fixe A. Avec le bouton V on fait tourne l'axe VR seulement; mais si l'on agit sur le tambour T on entraîn à la fois le manchon Q et l'axe R. Sur le pied de l'appareil es

([1]) Dans certains modèles, la lunette mobile est portée par une alidade muni d'un vernier. On peut alors procéder comme avec un goniomètre de Fraunhofer en laissant fixe la plate-forme et en déplaçant le viseur de manière à recueilli sous son réticule l'image du réticule collimateur réfléchie dans l'une, puis dans l'autre face du prisme : l'angle formé par les deux positions extrêmes de la lunette est alors le double de l'angle du prisme.

([2]) Un limbe horizontal est bien plus commode.

([3]) Même si la lumière est suffisante, le collimateur et la lunette n'ont plus aucun avantage quand les faces sont très petites, la diffraction épanouissant le faisceau réfléchi dont les rayons cessent alors d'être parallèles.

ıllée une glace noire horizontale M, mobile autour d'un axe endiculaire au plan du disque D [1]. Les deux faces dont on mesurer l'angle sont placées perpendiculairement au plan du e, suivant la méthode ordinaire, que l'on emploiera d'abord une forme un peu grossière, mais commode pour obtenir lement un réglage approximatif [2] : à cet effet, on met à rue distance une bougie ou toute autre source de lumière et, ınt l'œil dans le même plan vertical que le cristal et la bougie,

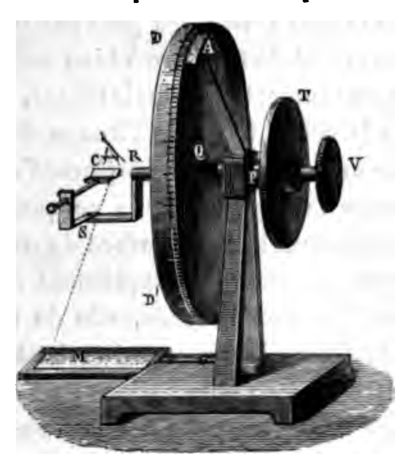


Fig. 195

lispose le cristal de façon à voir l'une des faces du dièdre nent éclairée; puis on tourne le bouton V jusqu'à ce que la ième face se substitue sensiblement à la première : alors elle aussi paraître vivement éclairée; sinon, on en rectifie la on ; on revient à la première face, et quand toutes les deux ient une belle lumière, le cristal est en bonne place. On de alors au réglage définitif : choisissant une mire horile suffisamment éloignée (un barreau de fenêtre), on la vise le miroir M, et on amène l'image de la même mire sur l'une leux faces du dièdre à coïncider avec la mire vue dans le ir; on opère de même sur l'autre face, puis sur la premiere, ır une série de retouches systématiques on arrive rapidement à

[1] Cette glace, ajoutée à l'appareil primitif qui nécessitait deux mires horiıles, permet de placer le disque D perpendiculairement à la mire.

[2] M. Émile Bertrand en a même récemment tiré un procédé très ingénieux mesurer les angles dièdres des cristaux microscopiques.

mettre l'arête dans une direction exactement normale au plan du limbe. La méthode donnée plus haut s'applique en effet facilement ici quand on a placé le cristal sur son support de telle sorte que l'une des faces du dièdre soit autant que possible perpendiculaire à l'un des axes de rotation du support : après avoir réglé cette face à l'aide de l'autre axe, on règle la deuxième en agissant uniquement sur le premier axe; on n'altère ainsi presque pas la première coïncidence, et le réglage est vite effectué. On s'est d'ailleurs arrangé de façon que l'arête passe à très peu près par le centre. Cela fait, approchant l'œil du cristal de manière à bien voir non pas le cristal lui-même, dont la vue importe peu maintenant, mais les images de la mire, on amène la coïncidence de l'image dans l'une des faces avec l'image dans le miroir; puis, sans déplacer l'œil, on fait tourner le disque et par suite le cristal jusqu'à ce que la coïncidence se rétablisse pour l'image dans la seconde face du dièdre : l'angle dont on a tourné le disque est encore le supplément de l'angle cherché. Si l'on a pris une mire assez éloignée, afin de réduire l'influence que peuvent avoir le défaut de centrage du cristal et les petits déplacements de l'œil entre les deux observations (¹), l'erreur totale d'une mesure bien faite ne dépassera pas 1 à 2 minutes.

416. Héliostats. — La lumière du soleil offre pour les expériences tous les avantages : économie, intensité, parallélisme (l'angle des rayons extrêmes n'est guère que d'un demi-degré) ; mais la direction des rayons solaires ne reste pas fixe.

Porte-lumière. — Cet inconvénient s'atténue au moyen d'un porte-lumière qui permet de rétablir de temps en temps la direction du faisceau envoyé dans la chambre obscure par un miroir [illegible] pour ramener le faisceau en place, on tourne à la main les [illegible] qui commandent respectivement les rotations du miroir autour de deux axes rectangulaires.

Si le porte-lumière est utile et souvent suffisant, on ne [illegible] comparer avec ces instruments précieux qui maintiennent d'eux-mêmes, aussi longtemps qu'on le désire, les rayons solaires dans une direction constante.

(¹) [illegible] des deux [illegible] d'erreur [illegible] sur les [illegible] MASCART, [illegible] I, [illegible] Paris, [illegible]

iostat de Fahrenheit. — Déjà les membres de l'Académie *del nto* avaient été conduits par leurs recherches sur la vitesse de nière à construire un instrument de ce genre, et Borelli peut egardé comme l'inventeur de l'héliostat. Mais la première m pratique, aussi simple qu'élégante, est due à Fahrenheit. 24 heures le soleil nous semble décrire un cercle parallèle à teur et qui se déplace lentement dans le cours d'une année, ance à l'équateur (cette distance mesurée sur un méridien se e la déclinaison) variant régulièrement d'un solstice où elle ximum et atteint 23°27′ à un équinoxe où elle est nulle; par un rayon solaire aboutissant à la terre, que l'on peut ici

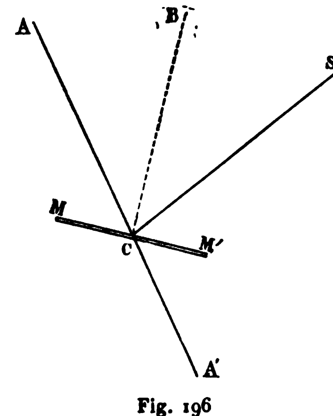


Fig. 196

er réduite à son centre, décrit en un jour autour de l'axe du un cône dont l'angle au sommet est le complément de la uison d à la date actuelle.

onc, à un instant donné, la lumière du soleil arrive en un suivant la direction SC, qui fait avec l'axe du monde CA un SCA $= 90° - d$, pour envoyer le rayon lumineux dans la direc- A de l'axe du monde, il suffira de placer en C un miroir MM′ diculairement à la bissectrice CB de l'angle SCA; et, pour nir dans cette direction CA le rayon réfléchi, il n'y aura qu'à ter le miroir MM′ par une tige dirigée suivant CA′ et à faire r cette tige sur elle-même de 360° en 24^h au moyen d'un e mouvement d'horlogerie. La normale au miroir restera nment dans le plan horaire du soleil (plan passant par

l'axe du monde et le centre du soleil), et comme elle biss constamment l'angle que le rayon solaire fait actuellemen l'axe du monde, le miroir renverra sans cesse la lumière direction de cet axe. Un deuxième miroir la réfléchira dan autre direction fixe que l'on voudra.

L'appareil se conçoit de lui-même : il se compose d'un m ment d'horlogerie pouvant recevoir une orientation quelc



Fig. 197

et faisant tourner en vingt-quatre heures un axe qui porte u roir mobile autour d'une charnière perpendiculaire à l'axe.

Pour régler l'appareil, il faut d'abord diriger l'axe de l'h suivant l'axe du monde : or on sait que la hauteur du pôle a sus de l'horizon est égale à la latitude; on inclinera donc l'a l'horloge de façon qu'il fasse avec la verticale un angle é complément de la latitude du lieu; puis on dirigera cet axe d plan méridien, que l'on peut toujours tracer assez approxim ment (ne serait-ce qu'avec une boussole). Si l'horloge est à l' le plan qui passe par l'axe et par la normale au miroir, et qu tient l'aiguille, coïncide alors avec le plan horaire du soleil. En

la normale au miroir à faire avec l'axe du monde un angle moitié du complément de la déclinaison [1]. L'horloge mar-miroir suivra le soleil; la lumière sera constamment réflé-'ant l'axe du monde. On disposera aisément le deuxième N' de façon à la renvoyer dans la direction voulue AR.
essité d'employer un deuxième miroir constitue évidemment ıvénient, assez faible d'ailleurs en comparaison des diffi- réglage que présentent d'autres héliostats. En employant, le miroirs, des prismes à réflexion totale, on peut en effet beaucoup la perte d'intensité. L'École normale possède un le ce genre, construit par Brünner et présentant une fixité erfection remarquables. Monckhoven exécute pour les phes un modèle de grandes dimensions, simple et solide [2].
ıt de S'gravesande. — S'gravesande [3] réussit à renvoyer

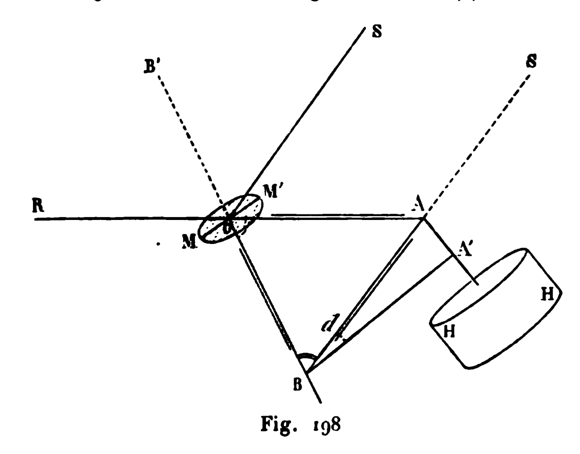


Fig. 198

ı d'un seul miroir les rayons solaires dans une direction ue, en réalisant un triangle isocèle dont les côtés soient nent dirigés l'un suivant le rayon incident, l'autre suivant

rait une vérification si l'appareil portait, comme l'héliostat de Silber-liaphragme à trou étroit et un petit écran disposés de telle sorte que solaires passant par le trou tombassent au milieu de l'écran quand ıerait réglé.
solution ingénieuse de la même question est fournie par l'héliostat . et Prazmowski, dans lequel le miroir, dont le plan contient l'axe est entraîné autour de cet axe avec une vitesse de 1 tour en 48 heures, intient le rayon réfléchi immobile (voir *La nature*, 5e année, 1er se-81; 1877).
VESANDE, *Physices elementa mathematica*, 715. Lugd. Batav.; 1720.

le rayon réfléchi, et dont la base soit normale au miroir. l
horloge HH étant disposée comme précédemment, de sorte que l
guille A'B suive l'ombre de l'axe AA' sur le cadran parallèl

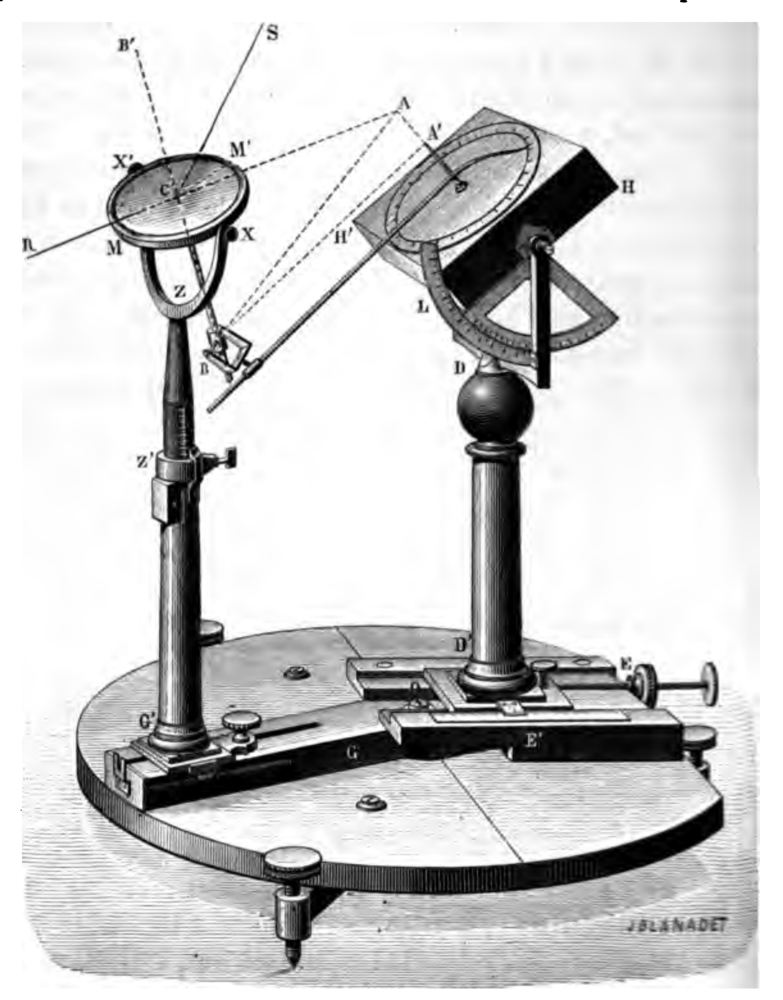


Fig. 199

l'équateur, tandis que le rayon solaire SB décrit son cône diu
autour de l'axe du monde, S'Gravesande réunit le miroir MM
cette horloge au moyen d'une bague montée sur l'extrémité B
l'aiguille et dans laquelle peut glisser et tourner librement u
queue implantée normalement sous le miroir. Celui-ci est suppo

par un pied vertical indépendant, autour duquel il est mobile ainsi qu'autour d'un axe horizontal, de façon à prendre toutes les orientations possibles. En déplaçant le pied et en l'élevant plus ou moins, on amène le point C dans une situation telle que le rayon réfléchi prolongé rencontre l'axe du monde en un point A, équidistant de C et de B. Le triangle ABC coïncidera sans cesse avec le plan d'incidence; en outre, les côtés AB et AC étant de longueur invariable, le triangle restera isocèle (la base variant seule de longueur); par suite, les angles RCB′ et SCB′, respectivement égaux aux angles C et B du triangle, seront constamment égaux : CR sera donc toujours la direction du rayon réfléchi. La construction de l'appareil est simple; mais le réglage en est compliqué [1], au point même que, malgré les efforts de Charles pour le rendre pratique, cet héliostat n'a été employé que bien rarement.

Héliostat de Gambey. — L'héliostat de Gambey présente, comme celui de S'gravesande, un triangle isocèle ACF, dont l'un des

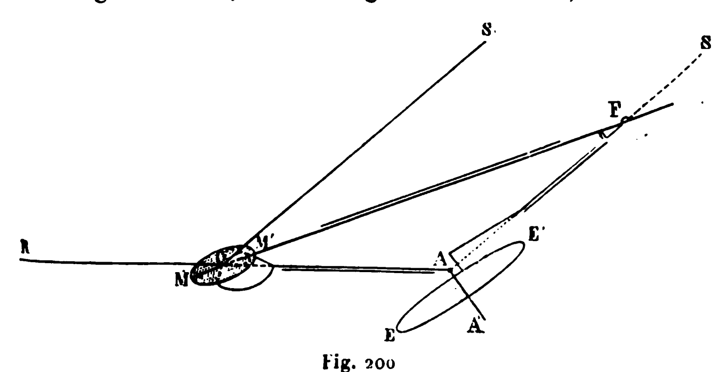


Fig. 200

côtés AF est parallèle à la direction des rayons solaires, l'autre AC parallèle à la direction des rayons réfléchis, et dont la base CF est constituée par la queue, placée ici en prolongement du miroir MM′; mais ce triangle est plus solide, et le glissement du côté mobile AF

[1] D'après ce qui a été dit plus haut, R étant la longueur de l'aiguille A′B, le centre C du miroir doit être élevé au-dessus de l'horizontale passant par le centre de rotation A′ de

$$R\, tg d \sin\lambda,$$

et ce même point C doit être distant de A′ de

$$R\, tg d \cos\lambda + \frac{R}{\cos d}.$$

Il faut calculer ces longueurs et les prendre exactement, ce qui n'est pas facile.

sur la base est plus doux que dans l'appareil précédent. Le côté AF est maintenu dans la direction des rayons solaires par la rotation d'une roue EE', parallèle à l'équateur, sur laquelle il est fixé en faisant avec son plan un angle égal à la déclinaison. L'emploi des

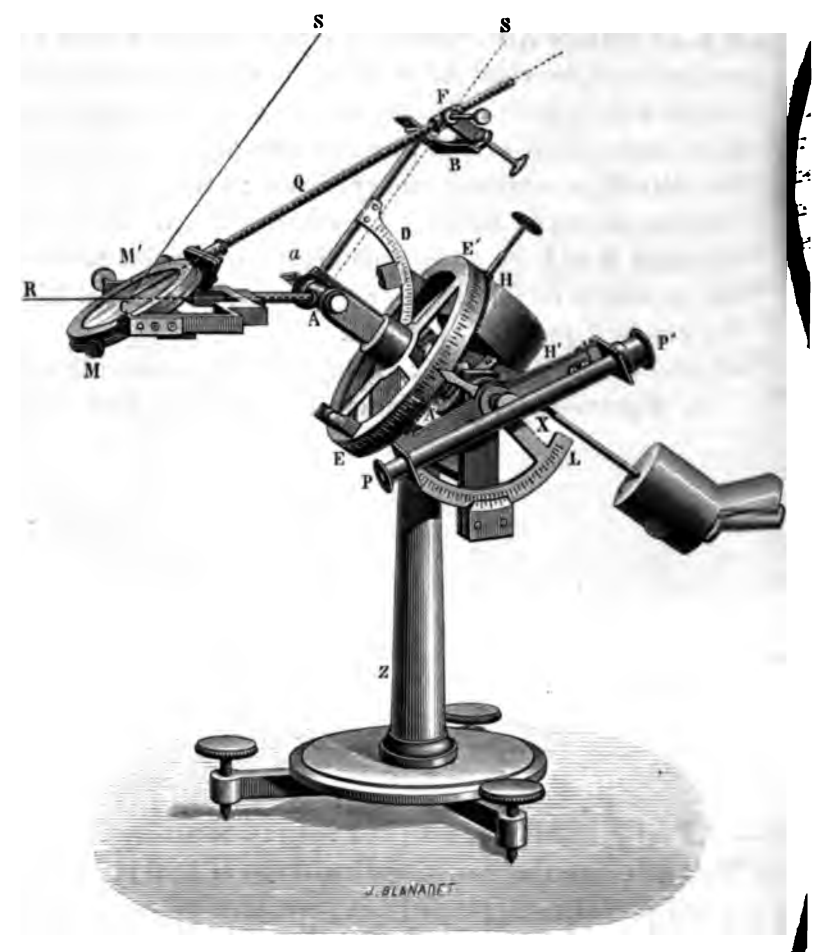


Fig. 201

deux repères de Silbermann (qu'il est aisé d'ajouter à l'appareil) facilitera la mise en place de ce côté et permettra d'en vérifier à chaque instant la position. Le côté AC est formé d'un manchon pouvant tourner autour d'une pièce axiale que l'on installe dans la direction du rayon réfléchi. Enfin la base CF, mobile en C au-

d'un axe perpendiculaire sur AC, va passer en F dans une
ie disposée à l'extrémité du côté AF. L'appareil fonctionnant, la
ue du miroir décrit autour de la tige AC un cône oblique, ayant
r base le cercle tracé parallèlement à l'équateur par la douille F.
côtés AF et AC restent égaux entre eux et orientés sans cesse
suivant le rayon incident, l'autre suivant la direction AR qui
par conséquent toujours celle du rayon réfléchi.

a figure 201 représente l'instrument. La roue EE', mobile au-
: de la colonne verticale Z et de l'axe horizontal X, est in-
ée sous l'angle voulu à l'aide du cercle de latitude L et amenée
la direction voulue au moyen de l'alidade à pinnules PP', ou
ıx d'une lunette, que l'on braque sur une mire placée dans le
idien. Le mouvement d'horlogerie HH' fait tourner unifor-
ient cette roue de 360° en 24^h autour de l'axe A'A, perpendicu-
à son plan et demeurant immobile. La tige *a*B, mobile autour
ıxe *a*A parallèle au cercle équatorial, peut être inclinée sur ce
le de l'angle *d*, mesuré sur le cercle de déclinaison D; elle se
ine en F par la bague dans laquelle glisse et tourne la queue Q
niroir. Sur l'extrémité de l'axe A se fixe dans telle direction
l'on veut la tige intérieure au manche de la fourche AC, qui
entre ses branches le miroir MM'. Ainsi disposé, l'appareil se
facilement, sans calcul, et marche très régulièrement. Mais il
'un prix élevé. A la vérité, quand il doit fonctionner à poste fixe,
implifications sont possibles. On évitera même aisément en ce
n inconvénient commun à tous les héliostats et provenant de ce
l'instrument, exposé directement aux rayons solaires, s'échauffe
coup et se dérègle. Rien de plus facile, en effet, que de séparer
ılètement le mouvement d'horlogerie et de le laisser dans le
ratoire. Une robuste pendule à poids convient alors parfaite-
t et, par un système de pièces solides commandant le miroir
rieur, permet d'obtenir une régularité parfaite.

éliostat de Silbermann [1]. — Reprenant l'idée de Fahrenheit,
ıtenir la normale CN au miroir suivant la bissectrice de l'angle
ié par le rayon incident SC et le rayon réfléchi CR, Silbermann
proposé de construire un appareil peu embarrassant et d'un

[1] SILBERMANN, *C. R.*, XVII, 1319; 1843; et *Ann. de ch. et de phys.*, (3), X,
1844.

prix abordable. Il y a réussi assez bien par le moyen d'un parallélogramme articulé, dont l'un des côtés conserve la direction fixe du rayon réfléchi, tandis que l'autre côté suit constamment le rayon incident. Nous indiquerons avec quelque détail la construction et l'emploi de cet appareil, qui se trouve dans presque tous les cabinets de physique. Il repose en entier sur un plateau PP, soutenu

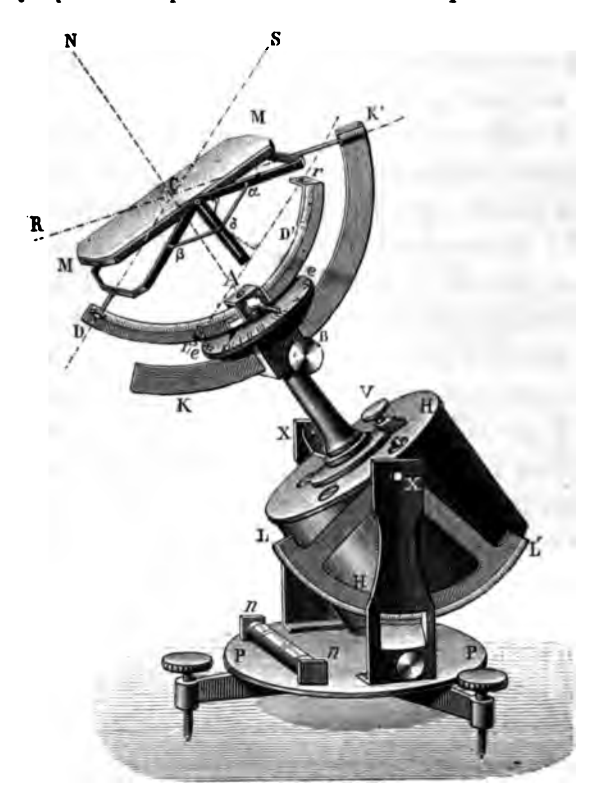


Fig. 202

par un pied à trois vis calantes autour duquel il peut tourner. Le plateau PP peut être rendu exactement horizontal au moyen du niveau n; et alors l'axe XX l'est aussi. En inclinant l'horloge autour de cet axe d'un angle égal au complément de la latitude et en amenant dans le méridien une ligne de foi tracée sur le plateau, on placera l'horloge équatorialement. L'axe de l'horloge sera alors parallèle à la ligne des pôles AN. Cet axe entraîne avec lui une aiguille mobile sur le cadran ee, et une boîte cubique A, munie

ie coulisse dans laquelle peut glisser l'arc de déclinaison DD', it pour centre le point C de l'axe de rotation où l'on veut iller le centre du miroir. Vers ce centre C pointe une tige DC, supporte une douille D, fixée normalement à l'arc DD'. L'ai-e étant à l'heure, si cette tige est orientée dans la direction ille des rayons solaires, l'horloge lui fera suivre le soleil. Nous ; déjà signalé les deux repères r et r', qui permettent de er à la tige CD la direction voulue, sans s'inquiéter de l'heure la déclinaison, et de vérifier à chaque instant son orientation. euxième tige, qui doit être dirigée suivant le rayon réfléchi, sposée d'une façon toute semblable. Autour de l'axe de l'hor-et séparé de lui par un manchon immobile qui soutient le ca-*ee*, peut tourner un cylindre terminé également par une boîte ue B, munie d'une coulisse dans laquelle glisse un arc KK' pour centre le point C; à l'extrémité de cet arc est une le dans laquelle s'engage une tige K'C pointant vers le centre C. otation du manchon et par glissement de l'arc KK', on amène tige K'C dans la direction convenable et on l'y fixe à l'aide des et B. Le miroir MM est mobile autour d'un axe situé dans son et reposant sur les extrémités croisées de deux fourchettes qui inent les tiges CD et CK'. C'est sur les branches de ces fourchettes t placé le parallélogramme $\alpha\beta\gamma\delta$ chargé de guider le miroir, oyen de la goupille δ mobile à frottement doux dans la coulisse iale $\gamma\delta$. En fait, ce système directeur est trop faible et de trop es dimensions; le mouvement du miroir manque de régularité.

'liostat de Foucault. — L'héliostat le plus parfait est celui de ault. Dans cet appareil, le miroir est à la fois commandé une queue normale CB et guidé par une queue longitudi-CF, ces deux queues étant combinées de telle façon que l'on ait =AC=AF. A cet effet, les trois côtés du triangle rectangle FCB matérialisés. Le côté BF est constitué par une tige traversant iétralement le cercle de déclinaison DD'; ce cercle coulisse une boîte cubique A', portée par l'axe d'une horloge équato-HH' : le constructeur ayant incliné l'horloge sous l'angle qui espond à la latitude du lieu où l'appareil doit être utilisé, l'opé-ur n'a qu'à placer l'axe dans le méridien. La queue normale CB, iinée en C par un disque sur lequel peut tourner le miroir,

passe dans une bague articulée entre les deux branches d'une fourchette située à l'extrémité B de la tige BF. La queue longitudinale CF présente une fente dans laquelle peut glisser l'autre bout de la tige BF. Le miroir est porté par une colonne verticale ZZ', pouvant tourner sur elle-même (et même s'élever ou s'abaisser pour les cas où l'on ne voudrait pas donner au rayon réfléchi une direction horizontale, comme le suppose la figure

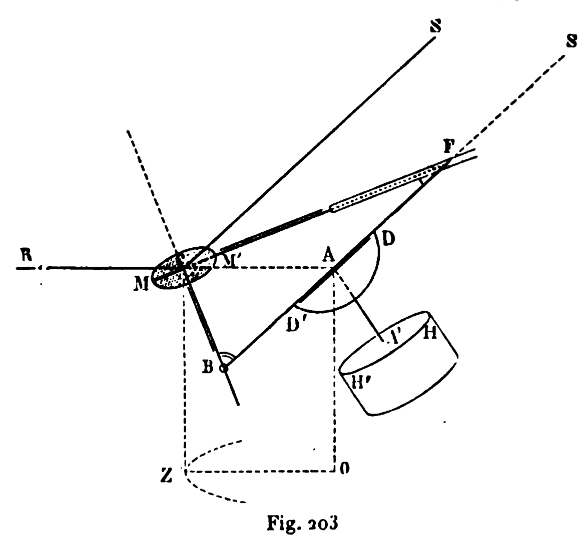


Fig. 203

cette colonne se termine par une fourche supportant un axe horizontal XX qui coupe en C l'axe Z, de sorte que le miroir est mobile en tous sens autour de ce point et peut obéir aisément à l'action de l'horloge, sans cesser d'être solidement soutenu.

Sidérostat. — La fixité remarquable du rayon réfléchi par cet héliostat constatée, Foucault voulut construire un appareil qui donnât d'un astre une image assez stable et assez parfaite pour être observée à une lunette fixe avec autant de profit et bien plus de facilité que ne le serait l'astre lui-même à une lunette mobile. Déjà, en 1845, l'héliostat avait été employé par MM. Fizeau et Foucault pour obtenir la photographie du soleil ; et en 1860, M. Laussedat s'en était servi à Batna pour renvoyer dans une lunette horizontale les rayons du soleil pendant une éclipse totale. Mais, pour atteindre un résultat pratique, il fallait un mouvement de rotation absolument uniforme malgré les variations continuelles des résistances

passives, et un miroir parfaitement plan fournissant une image exacte de l'astre. Foucault résolut ce double problème par l'invention de son régulateur à force centrifuge (82) et la création d'une méthode

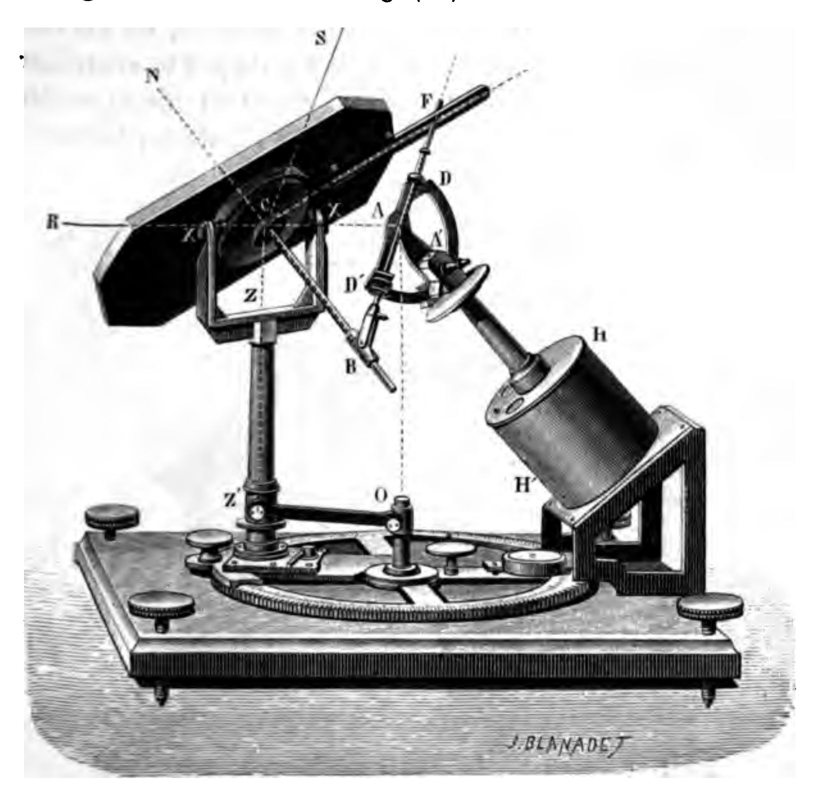


Fig. 204

pour dresser les miroirs de verre (420). La mort l'empêcha de réaliser lui-même son sidérostat, mais M. Wolf [1] le fit construire par Eichens, avec un miroir aplani par M. Martin d'après les procédés de Foucault.

La figure 205, empruntée à l'astronomie de Brünnow [2], représente l'instrument dans lequel on distingue : le miroir et sa monture, l'axe polaire et les pièces qui relient cet axe au miroir, enfin le régulateur. Le miroir, maintenu dans sa monture par un système

[1] Wolf, *C. R.*, LXIX, 1222, et LXXIX, 455 ; 1869-1874.

[2] Brünnow, *Astronomie* (édition française par MM. André et Lucas). Paris, Gauthier-Villars ; 1872.

de taquets et de ressorts destinés à éviter toute déformation, est mobile autour d'un axe horizontal et autour d'un axe vertical grâce à une couronne de galets placée au pied des colonnes qui soutiennent le premier axe. Au centre de la monture, est fixée une queue normale qui passe dans un anneau porté par une fourchette articulée à l'extrémité de l'axe polaire. Cet axe est mis en rotation par un mouvement d'horlogerie à poids et à régulateur isochrone.



Fig. 205

La queue du miroir sert de base au triangle de S'gravesande, dont les deux côtés égaux sont représentés, l'un par la fourchette (direction du rayon incident), l'autre par la ligne menée de l'extrémité de l'axe polaire au centre du miroir (direction constante du rayon réfléchi).

417. Miroirs parallèles. — Les rayons réfléchis sur un miroir plan ayant même direction que s'ils venaient réellement

de l'image fournie par le miroir, cette image peut être considérée relativement à un deuxième miroir comme un *objet virtuel*, qui provoquera dans ce deuxième miroir une nouvelle image suivant la même règle que si l'objet était réel.

Ce principe rend immédiatement compte de la formation des nages multiples dans les miroirs parallèles ou inclinés.

Soient, par exemple, deux miroirs parallèles M et N. Un objet S, cé entre eux, donnera dans le miroir M une première image A_1,

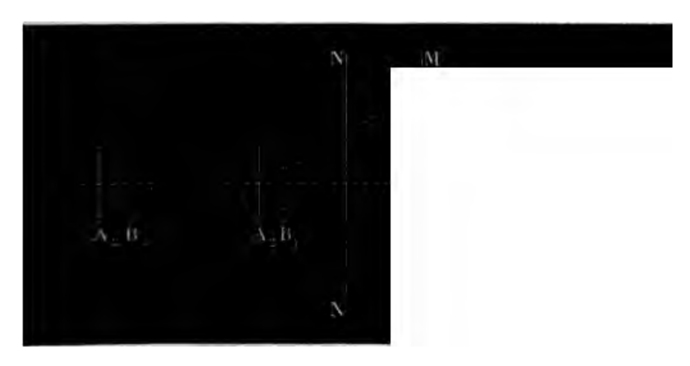


Fig. 206

quelle formera dans le miroir N une image A_2, qui à son tour ra reproduite dans M suivant A_3, et ainsi de suite. L'image B_1 de dans le miroir N sera de même l'origine d'une deuxième série 'images B_1, B_2, B_3.

Ces images, virtuelles et droites, sont disposées alternativement e face et de dos dans chaque miroir, en d'autres termes elles nt alternativement symétriques et superposables.

Si l'on appelle a et b les distances de S aux miroirs M et N, les ges dans M sont à des distances de S

$$2a, \quad 2a+2b, \quad 4a+2b, \quad 4a+4b, \quad 6a+4b, \quad \ldots,$$

ans N à des distances de S

$$2b, \quad 2b+2a, \quad 4b+2a, \quad 4b+4a, \quad 6b+4a, \quad \ldots,$$

istance de deux images consécutives est alternativement $2a$ b.

n vérifiera toutes ces conditions en se plaçant entre deux glaces se font vis-à-vis.

Une seule glace suffit même; car elle présente en réalité deux faces réfléchissantes parallèles : le tain sur lequel s'effectue la réflexion principale, puis la surface de séparation du verre et de l'air, surface sur laquelle une réflexion a lieu également, que la lumière vienne de l'air ou du verre. Cette réflexion, très faible sous les incidences voisines de la normale, passe ordinairement inaperçue; mais, sous les incidences fortement obliques, elle devient assez intense pour être facilement observée.

L'expérience se fait aisément avec une bougie A que l'on approche d'une glace, de façon à recevoir dans l'œil O des rayons très obliques. On voit alors, outre l'image principale a', une série

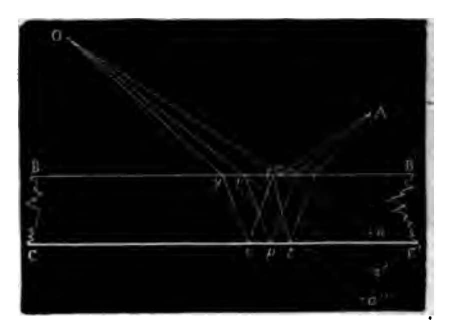


Fig. 207

d'images a, a'',..., dont la figure 207 montre suffisamment la formation : l'image a'', par exemple, provient des rayons tels que $Astqxy$O qui, partis de A, ayant pénétré dans la lame, s'étant réfléchis une première fois sur le tain, puis une deuxième fois sur la surface de séparation du verre et de l'air, puis encore une fois sur le tain, sortent du verre pour arriver en O. L'image a, produite par une réflexion unique à la surface du verre, est seule sur la perpendiculaire menée du point A aux plans BB', CC'; les autres images a', a'',..., formées par des rayons réfractés, tout en restant équidistantes, s'inclinent d'autant plus vers l'œil que l'obliquité de la lumière est plus prononcée.

Les miroirs métalliques, parmi lesquels il faut ranger les miroirs en verre argentés extérieurement, suppriment ces images multiples, qui seraient très gênantes dans les instruments d'optique.

ɪ̇. Miroirs inclinés. — Considérons maintenant deux s inclinés OM, ON (1). Un point lumineux L placé à l'inté- le l'angle MON donnera, comme précédemment, deux séries ges, qui seront toutes disposées sur une même circonférence cle décrite de O comme centre avec OL pour rayon : les unes s figurées ici), A_1, A_2, A_3,..., ayant pour point de départ ge produite directement dans OM ; les autres, B_1, B_2, B_3,..., ant des rayons réfléchis une première fois par ON. Mais ces es ne sont plus en nombre infini ; les deux séries sont limitées



Fig. 208

: fait qu'un objet, réel ou virtuel, situé derrière un miroir, ut pas donner d'image dans ce miroir. Ainsi, sur la figure ci- e, A_3 se trouvant à la fois derrière les deux miroirs, ne donne l'image. En général, chaque série se termine à la première : qui tombe dans l'angle M'ON', opposé par le sommet à l'an- ON des faces réfléchissantes. Cette condition se traduit sans en formules à l'aide du théorème suivant :

distance angulaire de deux images consécutives d'une même ur un même miroir est égale au double de l'angle des deux s.

(1) Bertin, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIX, 257 ; 1850 ; et Moutier, *physique*, I, 648. Paris, Dunod ; 1883.

Soient, par exemple, les deux images A_2, A_4. L'angle A_2 ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à MO et ON égal à l'angle MON. L'angle au centre MON a pour m l'arc MN, que nous désignerons par θ; l'angle $A_2A_3A_4$, inscrit la circonférence O, a pour mesure la moitié de l'arc A_2A_4; don arc A_2A_4 est égal à 2θ.

On a ainsi :

$$\begin{array}{ll} LA_2 = 2\theta, & \text{et de même } LB_2 = 2\theta, \\ A_1A_3 = 2\theta, & B_1B_3 = 2\theta, \\ A_2A_4 = 2\theta, & B_2B_4 = 2\theta, \\ A_3A_5 = 2\theta, & B_3B_5 = 2\theta, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Cela posé, prenons alternativement pour origine des arcs points M et N, et, partant de l'un des deux miroirs, comptons t jours les arcs en marchant vers l'autre. Soient $ML = \alpha$, NL: (α étant supposé plus petit que β), on trouve :

$$\begin{array}{ll} ML = \alpha, & \text{et de même } NL = \beta, \\ NA_1 = \theta + \alpha, & MB_1 = \theta + \beta, \\ MA_2 = 2\theta + \alpha, & NB_2 = 2\theta + \beta, \\ NA_3 = 3\theta + \alpha, & MB_3 = 3\theta + \beta, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Chaque série doit se terminer au premier arc supérieur à Si donc l'on pose

$$k\theta + \alpha > 180, \qquad (1$$

le plus petit nombre entier k satisfaisant à cette inégalité e mera le nombre des images A.

De même, le premier nombre entier k', pour lequel on au

$$k'\theta + \beta > 180, \qquad (2$$

marquera le nombre des images B.

Pour discuter ces inégalités, nous écrirons

$$360 = N\theta + \gamma,$$

γ étant le reste (plus petit que θ) de la division de 360 par θ.

1° Supposons d'abord $N = 2n$ et $\gamma = 0$; en d'autres termes, s sons la circonférence partagée en un nombre pair $2n$ de p égales θ.

Alors

$$180 = n\theta.$$

ılité (1) peut s'écrire

$$k\theta + \alpha > n\theta.$$

ı est moindre que θ, le plus petit nombre entier k satisfai-
tte inégalité est n; ainsi

$$k = n = \frac{N}{2}.$$

ıit de même que

$$k' = n = \frac{N}{2}.$$

série se compose donc de $\frac{N}{2}$ images. Mais il faut remar-
: la dernière image de la première série coïncide avec la
de la deuxième. En effet, les distances angulaires de ces
l'un et à l'autre miroir, estimées comme il a été dit plus
ıt respectivement

$$180 + \alpha \qquad \text{et} \qquad 180 + \beta;$$

ɔmme, dans laquelle l'arc θ se trouve compté deux fois,

$$360 + \alpha + \beta = 360 + \theta;$$

: de leurs distances à un même point est par conséquent

$$360.$$

deux arcs se rejoignent exactement. On a donc seulement
ıges distinctes, ce qui, avec l'objet, fait en tout N images.
N étant toujours égal à $2n$, γ est >0, l'inégalité (1)

$$k\theta + \alpha > n\theta + \frac{\gamma}{2}.$$

mière série comprendra donc

$$n + 1 \text{ images, si } \alpha < \frac{\gamma}{2},$$

$$\text{et } n \text{ images, si } \alpha \geqq \frac{\gamma}{2} \text{ (1)}.$$

(1) ...e comptons que n images dans le cas de $\alpha = \frac{\gamma}{2}$, la $n+1^{e}$ coïncidant alors

Quant à l'inégalité

$$k'\theta + \beta > n\theta + \frac{\gamma}{2},$$

comme β $\left(\text{même supposé égal à } \alpha \text{ et par conséquent à } \frac{\theta}{2}\right)$ est nécessairement plus grand que $\frac{\gamma}{2}$, elle est toujours satisfaite par $k = n$.

Donc, en comptant toujours l'objet, on a,

$$\text{avec } \alpha < \frac{\gamma}{2}, \qquad N + 2 \text{ images},$$

$$\text{avec } \alpha \geqq \frac{\gamma}{2}, \qquad N + 1 \text{ images}.$$

3° Si θ est compris dans la circonférence un nombre impair de fois, c'est-à-dire si $N = 2n + 1$ et $\gamma = 0$ (cas que l'on déduit du précédent en y supposant $\gamma = \theta$), la première série se compose de $n+1$ images, ce qui fait en tout $N + 1$ images (¹).

4° Enfin, si $N = 2n + 1$ et $\gamma > 0$, l'inégalité (1) donne

$$k\theta + \alpha > n\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\gamma}{2},$$

et comme α est $\leqq \frac{\theta}{2}$, k doit être toujours égal à $n + 1$.

Pour l'inégalité (2)

$$k'\theta + \beta > n\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\gamma}{2},$$

deux cas peuvent se présenter

$$\beta \geqq \frac{\theta}{2} + \frac{\gamma}{2}, \quad \text{alors } k' = n;$$

$$\text{ou } \beta < \frac{\theta}{2} + \frac{\gamma}{2}, \quad \text{alors } k' = n + 1.$$

Dans la première hypothèse, le nombre total des ima[illegible] $N + 1$; et dans la deuxième, $N + 2$.

Toutes ces images sont nécessairement virtuelles, dr[illegible] égales à l'objet. Mais nous avons à distinguer, comme pré[illegible] ment, les images superposables à l'objet (par simple rota[illegible] rayon mené en un point déterminé de l'image) et les [illegible]

(¹) Si $\alpha = \beta$, la $n+1^e$ image de la première série et la n^e de la de[illegible] coïncident, ce qui réduit le nombre des images distinctes à N.

triques de l'objet. Chacun des miroirs donne les deux sortes ges : images symétriques, résultant d'un nombre impair de ions dont la première s'effectue sur le miroir considéré ; images posables, provenant d'un nombre pair de réflexions dont la ière s'effectue sur l'autre miroir. Ainsi, dans le miroir OM, nages symétriques sont A_1, A_3. A_5,..., et les images superpos B_2, B_4, B_6,...

se reportant au théorème fondamental, on voit aisément que istances angulaires de ces images au miroir OM, distances ıtées dans le sens MA_1, sont

pour les premières, x, $2\theta+x$, $4\theta+x$, $6\theta+x$, ...
pour les deuxièmes, $2\theta-x$, $4\theta-x$, $6\theta-x$, ...

léidoscope. — Le caléidoscope (καλός, beau ; εἶδος, forme ; ω, je regarde) met en jeu d'une manière curieuse les pro-



Fig. 209

des miroirs inclinés. Ce petit appareil, dû à Brewster ([1]), pose de deux glaces, longues et étroites, inclinées à 60° et

[1] ...WSTER, *Gilbert's Annalen*, LIX, 317 ; 1818. Le même principe avait déjà ...qué par BRADLEY, *New improvements of planting and gardening*. Lon-...o.

logées dans un tube cylindrique dont l'axe est parallèle à l'arête dièdre formé par les deux miroirs. L'œil placé à l'une des ext mités du cylindre regarde par un trou étroit les petits obj (fragments de verres colorés, morceaux de dentelle, barbes plumes, etc.) mis à l'autre extrémité et leurs images dans les de miroirs. D'après la disposition de l'appareil, les rayons réfléch vers l'œil ont rencontré sous une incidence presque rasante surface des glaces (la face postérieure est noircie); par conséque les images sont assez intenses. On voit donc un dessin étoilé, do la plus légère secousse modifie l'aspect d'une façon imprévu souvent bizarre, parfois singulièrement gracieuse, et où les dess nateurs ont trouvé plus d'une inspiration. On peut remplacer l'angl de 60° par tout autre angle compris un nombre pair de fois da la circonférence. Mais cette catégorie d'angles ($N = 2n$) convie seule : alors seulement la figure est nette et régulière [1].

Caisses catoptriques. — Les caisses catoptriques contiennent u certain nombre de miroirs disposés régulièrement et qui mult plient les objets enfermés à l'intérieur, en les disséminant sur u espace considérable.

Des glaces ainsi aménagées dans une salle de fête brillamme éclairée offriront un spectacle vraiment féerique.

III. — Miroirs sphériques.

419. Propriétés des miroirs sphériques. — *Réflexio sur une surface courbe.* — La réflexion sur chaque élément d'un surface courbe s'effectuant selon la loi fondamentale, un faiscea de rayons incidents donne naissance à un système de rayon réfléchis, géométriquement déterminés.

Définitions. — Parmi les miroirs courbes, les plus simples et e même temps les plus importants sont les miroirs sphériques. Il ont habituellement la forme d'une calotte sphérique polie à l'in térieur ou à l'extérieur : dans le premier cas, le miroir est di

[1] Ainsi, dans le deuxième cas étudié plus haut, quand on considère un obje d'une certaine étendue, on voit aisément que les n^{es} images de chaque séri empiètent l'une sur l'autre, et que la $n+1^e$ de la première série, qui ne repro duit qu'une partie de l'objet, se mêle à la n^e de la même série.

concave; dans le deuxième, *convexe.* On appelle *axe principal* la droite indéfinie, menée par le *pôle* ou *sommet* O et le *centre* de courbure C du miroir. L'angle MCN des rayons extrêmes, CM, CN,

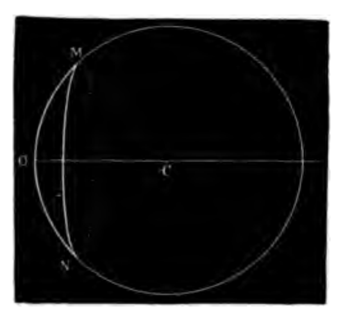


Fig. 210

d'une section méridienne quelconque se nomme l'*ouverture* du miroir : dans la pratique, cet angle est toujours petit.

Image d'un point. — Formule ordinaire. — Nous commencerons par étudier les miroirs concaves, et nous en considérerons d'abord l'effet sur les rayons émanant d'un point P situé sur l'axe principal. Soit PI l'un de ces rayons; menons la normale CI au point d'inci-

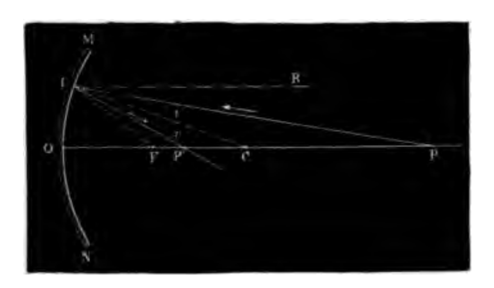


Fig. 211

dence et traçons de l'autre côté de CI, dans le plan PIC, la ligne IP' faisant avec CI un angle $r = i$; IP' sera la direction du rayon réfléchi. D'après une propriété connue de la bissectrice, le triangle PIP' donne

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{IP'}{IP}.$$

Mais, si le miroir a une ouverture très petite, IP' diffère peu de

OP′, IP de OP, et l'on peut écrire avec une grande approximation (¹)

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{OP'}{OP},$$

ou, en posant $OP = p$, $OP' = p'$, et $OC = R$,

$$\frac{R - p'}{p - R} = \frac{p'}{p},$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}.$$

Cette équation étant indépendante du point I, on en conclut que tous les rayons émanés de P et réfléchis par le miroir MM′ vont sensiblement se réunir en un point unique P′. Il y a donc en P′ une véritable image de P, image que, vu la concentration de la chaleur comme de la lumière au point P′, on appelle généralement le *foyer*, et plus explicitement le foyer *conjugué* de P, à cause de la symétrie de l'équation en p et en p'.

Si $p = \infty$, autrement dit, si les rayons incidents sont parallèles à l'axe, $p' = \frac{R}{2}$: les rayons réfléchis vont tous sensiblement passer en un point F, situé au milieu de la distance OC. C'est le *foyer principal*, et la longueur $OF = \frac{R}{2}$ est la *longueur focale principale* (²) : nous la désignerons par f, et l'équation précédente s'écrira

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

(¹) Soit T le point où la tangente en M rencontre l'axe principal : l'équation exacte est

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{TP'}{TP},$$

ou, si l'on pose $OT = \varepsilon$

$$\frac{R - p'}{p - R} = \frac{p' + \varepsilon}{p + \varepsilon},$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R} + \frac{\varepsilon}{pp'R}(p + p' - 2R).$$

(²) Roger BACON le premier a donné la place exacte du foyer d'un miroir concave dans son livre, dédié à Clément IV, *Opus majus*; 1267.

équation établie pour une situation particulière des points C, convient dans tous les cas, à condition que les distances R ou f soient comptées à partir du sommet O, positivement nilieu où se meut la lumière (en avant du miroir), négatien sens contraire.

ivers cas de la réflexion sur les miroirs concaves se déduiément de l'équation précédente, qu'il est commode pour la on de mettre sous la forme

$$p' = \frac{pf}{p-f}, \qquad \text{ou} \qquad p' = \frac{f}{1 - \frac{f}{p}}.$$

itient ainsi les résultats contenus dans le tableau suivant :

$p = \infty$	$p' = f$	
$p > 2f$	$f < p' < 2f$	
$p = 2f$	$p' = 2f$	foyer réel.
$2f > p > f$	$2f < p'$	
$p = f$	$p' = \infty$	
$f > p > 0$	$p' < 0$	foyer virtuel.
$p = 0$	$p' = 0$	
$0 > p$	$0 < p' < f$	foyer réel.

le dernier cas, les rayons incidents convergeant vers un tué derrière le miroir peuvent être considérés comme émaun point lumineux virtuel. La figure 212, tracée dans l'hy-

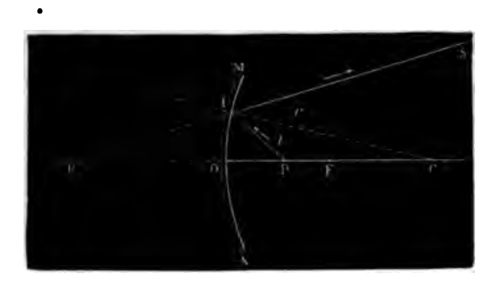


Fig. 212

inverse (point lumineux réel entre le foyer et le sommet, irtuelle), convient également ici, le point lumineux étant en P' et l'image en P.

miroir est convexe, R doit être compté négativement. Po-

sons $R = -\overline{R}$, de façon à mettre le signe en évidence ; nous a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{2}{\overline{R}},$$

ou, en désignant par $-\overline{f}$ la distance du foyer principal (virtu miroir,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{\overline{f}}.$$

La discussion de cette formule, que l'on peut écrire

$$p' = -\frac{p\overline{f}}{p+\overline{f}}, \qquad \text{ou} \qquad p' = -\frac{\overline{f}}{1+\frac{\overline{f}}{p}},$$

conduit immédiatement aux résultats consignés dans le tabl suivant :

$p = \infty$	$p' = -\overline{f}$	foyer virtuel.
$p > 0$	$-\overline{f} < p' < 0$	
$p = 0$	$p' = 0$	
$0 > p > -\overline{f}$	$0 < p'$	foyer réel.
$p = -\overline{f}$	$p' = \infty$	
$-\overline{f} > p > -2\overline{f}$	$p' < -2\overline{f}$	foyer virtuel.
$p = -2\overline{f}$	$p' = -2\overline{f}$	
$-2\overline{f} > p$	$-2\overline{f} < p' < -\overline{f}$	

La réflexion sur un miroir convexe ne donne de foyer réel

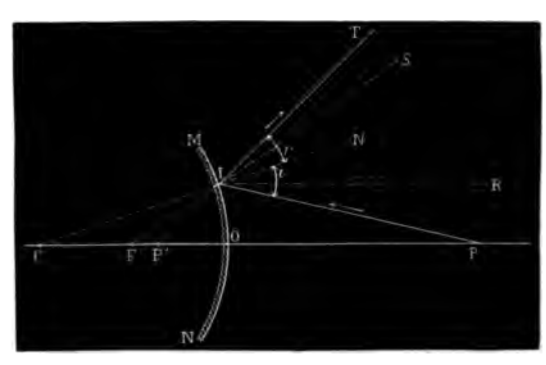


Fig. 213

dans le cas où les rayons incidents convergent vers un point l neux virtuel, situé entre le sommet O et le foyer principal F.

Autre forme. — La formule générale

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

ant que les quatre points P, C, P′, O constituent une division
nique, peut se mettre sous une autre forme.
ons le cercle de diamètre OC, et construisons la polaire AB
nt P; cette polaire passe en P′, conjugué de P par rapport à
qui donne une construction très simple de P′ ([1])). On a donc,

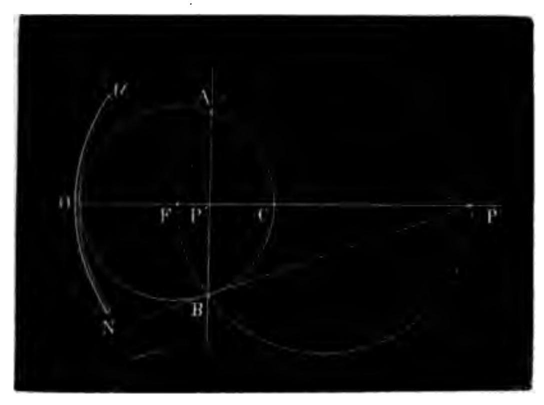


Fig. 214

ignant par ϖ et ϖ' les distances FP et FP′ du point lumineux
on image au foyer principal,

$$\varpi\varpi' = f^2,$$

n que l'on peut d'ailleurs obtenir par un simple changement
données. Si l'on prend pour origine le point F, l'équation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

t en effet, les différentes grandeurs étant affectées de signes
ables, ainsi qu'il a été dit plus haut,

$$\frac{1}{\varpi + f} + \frac{1}{\varpi' + f} = \frac{1}{f},$$

$$\varpi\varpi' = f^2.$$

équation, due à Newton ([2]), est générale. Elle montre que
e et l'image sont toujours d'un même côté du foyer princi-
n la discutant, on retrouverait les résultats énoncés plus
nais elle se prête surtout à une interprétation géométrique.

ir LEBOURG, *Journal de physique*, VI, 305; 1877.
WTON, *Opticks*, lib. I. London; 1704.

comme représentant une hyperbole équilatère rapportée à se asymptotes. Traçons cette hyperbole en prenant pour origine l foyer F et pour coordonnées les ϖ et les ϖ'. Quand le miroir es concave, C_1 représente le centre et C le sommet : alors la branch MM' correspond au cas où le point lumineux et le foyer sont tous le deux réels, la branche NN' au cas où l'un est réel (celui dont la

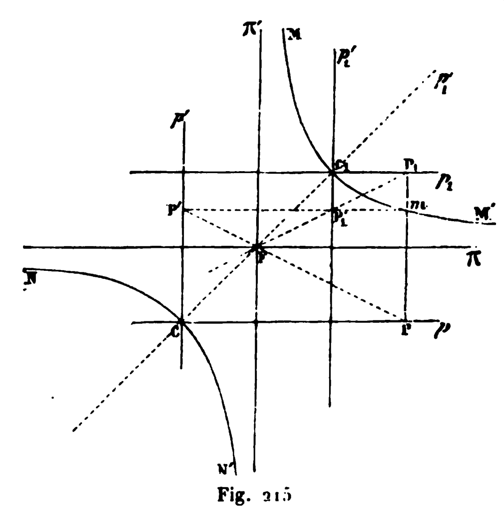


Fig. 215

coordonnée en valeur absolue est plus grande que f), l'autre vi tuel. Quand le miroir est convexe, le rôle des points C et C_1 e changé : la branche NN' correspond au cas où le point lumine et le foyer sont tous les deux virtuels, la branche MM' au cas où l' est réel (celui qui est défini comme plus haut), l'autre virtuel.

Puisque l'on peut passer de l'une des équations à l'autre par simple changement de coordonnées, il suffit d'effectuer ce chang ment sur la figure 215 pour avoir la représentation graphique l'équation

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}:$$

les nouveaux axes seront Cp, Cp'. Dans le cas du miroir convexe si l'on met en évidence le signe de f, en écrivant

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=-\frac{1}{f},$$

l'hyperbole se trouve rapportée aux axes C_1p_1, $C_1p'_1$.

La discussion des courbes avec ces nouveaux axes est facile. Elle peut encore être simplifiée au moyen de la remarque suivante, due à Lissajous (¹), qui en a tiré une construction très simple des foyers conjugués :

La droite PP' qui joint les projections d'un point m de l'hyperbole sur les axes Cp, Cp', passe par le point F.

Si, en effet, on désigne par x et y les coordonnées courantes et par p et p' l'abscisse et l'ordonnée du point m, l'équation de la droite PP' est

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{p'}=1,$$

équation vérifiée par $x=y=f$.

En conséquence, si l'on prend pour axes des coordonnées l'axe principal Cx d'un miroir concave et la perpendiculaire Cy à cet axe par le sommet C, et si l'on construit le point F ($x=y=f$), pour

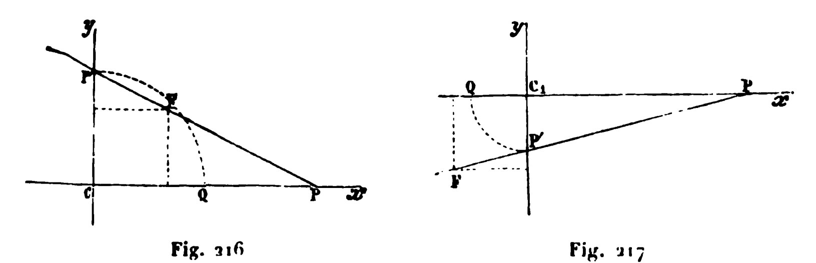


Fig. 216 Fig. 217

avoir la longueur p' conjuguée d'une longueur donnée p, il suffira de joindre le point P ($x=p$) au point F : la droite FP coupera l'axe des y en P' ($y=p'$) ; et pour mettre en place le foyer conjugué de P, on n'aura qu'à rabattre le point P' en Q sur l'axe principal Cx, ce rabattement étant fait à droite si P' est au-dessus de Cx, à gauche s'il est au-dessous.

La figure 217 montre la même construction effectuée pour un miroir convexe dont le foyer principal F se trouve derrière le miroir : Q est le conjugué de P.

Points en dehors de l'axe principal. — Jusqu'ici nous n'avons considéré que des points situés sur l'axe principal. Les résultats

(¹) LISSAJOUS, *Leçons inédites professées au lycée Saint-Louis.*

obtenus conviennent à tout point Q peu écarté de cet axe [1] (c'est-à-dire vu du sommet du miroir dans une direction peu différente de l'axe) : un miroir sphérique donne encore de ce point une image Q′, située sur le diamètre ou *axe secondaire* CQ. Soient, en effet, QI un rayon incident, IQ′ le rayon réfléchi qui rencontre

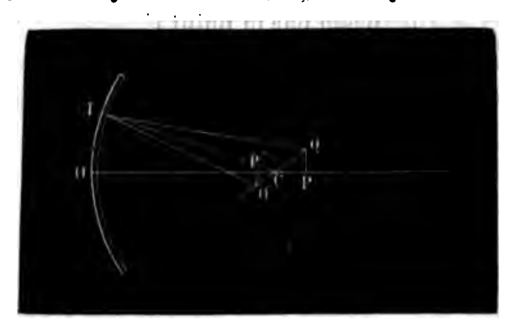


Fig. 218

en Q′ l'axe QC; on a, d'après la propriété déjà rappelée de la bissectrice,

$$\frac{CQ'}{CQ} = \frac{IQ'}{IQ}.$$

Abaissons de Q et Q′ les perpendiculaires QP et Q′P sur l'axe principal; le premier rapport pourra se remplacer par $\frac{CP'}{CP}$. Quant

[1] Lorsque l'on considère un point un peu éloigné du centre C, la condition d'être peu écarté de l'axe principal équivaut à celle d'être *situé sur un axe secondaire peu incliné sur l'axe principal*; et la proposition est alors évidente, le

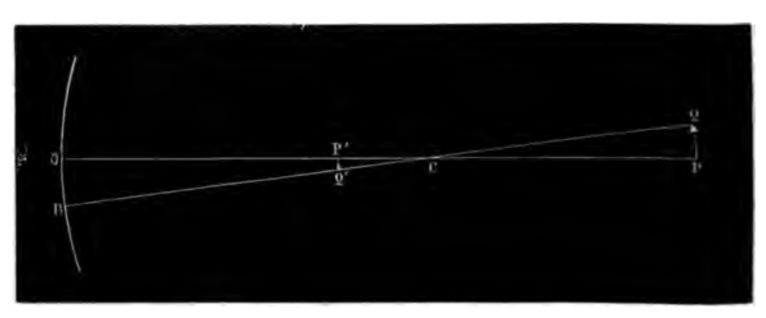


Fig. 219

miroir se comportant manifestement à l'égard d'un axe secondaire comme à l'égard de l'axe principal, tant que l'ouverture rapportée au nouvel axe reste assez petite.

ı deuxième, il est sensiblement égal à $\frac{OP'}{OP}$. On a donc, avec une pproximation du même ordre que précédemment,

$$\frac{CP'}{CP}=\frac{OP'}{OP};$$

e qui est précisément la relation établie plus haut. Cette relation tant indépendante de I, on en conclut que la position du point Q' ur l'axe secondaire QC est indépendante du rayon considéré; ' est donc l'image de Q, comme P' est celle de P.

Image d'une droite. — Formule du grossissement. — Puissance. — l en résulte que l'image de la droite PQ, normale à l'axe principal t petite (c'est-à-dire de faible grandeur angulaire), est la petite lroite P'Q' (¹), normale au même axe, définie quant à sa situation ar l'équation

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f},$$

et quant à sa grandeur par la formule

$$\frac{-I}{O}=\frac{p'}{p},$$

O désignant l'objet et I l'image prise positivement quand elle est lroite et négativement lorsqu'elle est renversée (²). On a en effet

$$\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{CP'}{CP}=\frac{OP'}{OP},$$

:'est-à-dire

$$\frac{-I}{O}=\frac{p'}{p},$$

(¹) L'image d'une droite indéfinie dans un miroir sphérique de petite ouverre est une conique, dont un foyer est le point C et dont l'axe focal est la perndiculaire abaissée de C sur la droite. Soient d la longueur de cette perpendiaire, ω l'angle que fait le rayon vecteur ρ avec le prolongement de cette ne, l'équation de la conique est

$$\rho=\frac{f}{1+\frac{f}{d}\cos\omega}$$

(²) L'image est droite ou renversée selon que les points conjugués sont d'un ne côté ou de côtés différents du centre.

ou

$$\frac{-\mathrm{I}}{\mathrm{O}}=\frac{f}{p-f}=\frac{p'-f}{f}=\frac{2f-p'}{p-2f}\ (^1),$$

ou, avec la notation de Newton,

$$\frac{-\mathrm{I}}{\mathrm{O}}=\frac{f}{\varpi}=\frac{\varpi'}{f};$$

et cette relation est également générale, avec les conventions adoptées.

On déterminera aisément dans chaque cas l'image d'une droite de faible grandeur angulaire située normalement à l'axe principal (²).

Nous supposerons d'abord que le miroir est concave.

L'objet étant extrêmement éloigné, l'image qui se forme dans le *plan focal principal* (plan mené par le foyer principal normalement à l'axe) est réelle, renversée et très petite $\left(-\mathrm{I}=\frac{\mathrm{O}}{p}f\right)$. Elle n'a de dimensions visibles que si l'objet a lui-même un diamètre apparent sensible : l'image du soleil, dont le diamètre apparent $\frac{\mathrm{O}}{p}=0{,}009$, est un disque de diamètre $0{,}009f$. La concentration des rayons sera d'autant plus énergique que la distance focale sera plus petite. En conséquence l'inverse de la distance focale s'appelle la *puissance* du miroir

$$\mathrm{P}=\frac{1}{f}.$$

L'objet se rapprochant, l'image, toujours réelle et renversée, s'éloigne et s'allonge; quand l'objet arrive au centre, l'image, aussi au centre, est égale à l'objet; puis, grandissant sans cesse tandis qu'elle s'enfuit, elle devient infinie à l'infini, lorsque l'objet atteint le foyer.

L'objet continuant à se rapprocher du miroir, l'image, marchant toujours en sens inverse, passe derrière le miroir. Virtuelle

(¹) La figure 219 donne immédiatement cette relation $\frac{-\mathrm{I}}{\mathrm{O}}=\frac{2f-p'}{p-2f}$.

(²) L'image d'une petite droite et par suite d'un petit objet plan perpendiculaire à l'axe principal est semblable à l'objet; dans tout autre cas il y a déformation.

oite, d'abord infiniment grande et infiniment éloignée, elle se roche et décroît jusqu'à devenir égale à l'objet quand elle se rpose à lui, au sommet.

ıfin, l'objet se faisant virtuel, l'image, redevenue réelle, est petite que l'objet.

s figures ci-jointes, relatives aux deux cas différents que peuvent

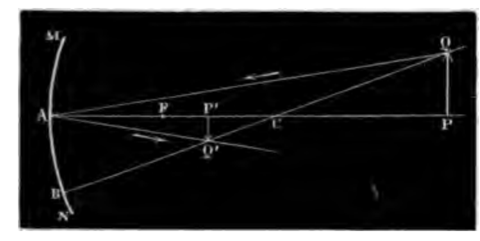


Fig. 220

enter les miroirs concaves, montrent les rapports de situation,

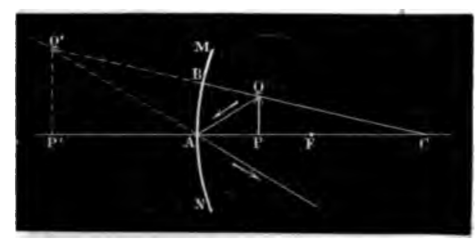


Fig. 221

randeur et de direction qui existent entre l'image et l'objet (1).

ıns un miroir convexe, un objet réel donne toujours une image

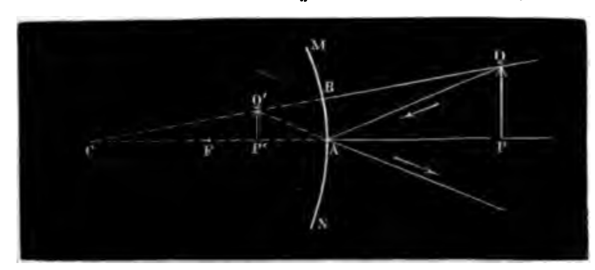


Fig. 222

lle, droite et plus petite que l'objet, située entre le foyer et le

es angles en A étant égaux, les triangles rectangles PQA et P'Q'A mettent dence la relation établie plus haut $\frac{-I}{O} = \frac{p'}{p}$.

sommet du miroir. Par contre, un objet virtuel, placé entre l
et le foyer, fournit une image réelle, droite, plus grande que
et grandissant à mesure qu'elle va depuis le miroir jusqu'à
L'objet virtuel s'éloignant derrière le miroir au delà du foyer,
se forme également derrière le miroir, virtuelle, renversée,
plus grande que l'objet, puis égale à celui-ci quand ils son
l'autre au centre, puis plus petite quand l'objet vient occuper
du centre les positions qui étaient tout à l'heure celles de l

Construction géométrique. — Dans les figures précéde
foyer conjugué d'un point, pris hors de l'axe principal, a ét
miné par l'intersection de l'axe secondaire relatif à ce p
d'un rayon réfléchi que nous avons tracé faisant avec la n
au point d'incidence un angle égal à celui que faisait av
même normale le rayon incident. En choisissant convenal
ce dernier, on peut éviter toute considération d'angles.

Prenons pour rayon incident le rayon AI, parallèle à l'ax

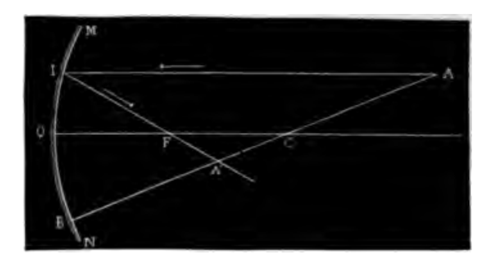


Fig. 223

cipal : le rayon réfléchi passera par le foyer F et viendra
l'axe secondaire au point cherché A'.

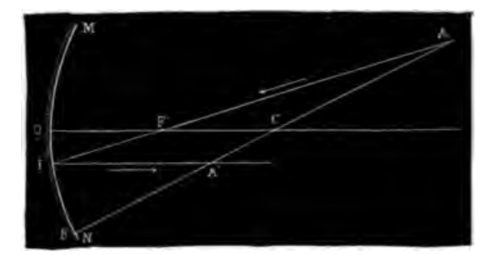


Fig. 224

Inversement, traçons le rayon AF passant par le foyer :

parallèlement à l'axe principal et rencontre l'axe secon-
n A'.

ı double moyen (le premier est le plus employé [1]) pour
place le foyer conjugué d'un point, et par suite l'image
le.

e 225 indique la construction de l'image A'B' d'une
et fait voir comment, la droite AB se rapprochant du

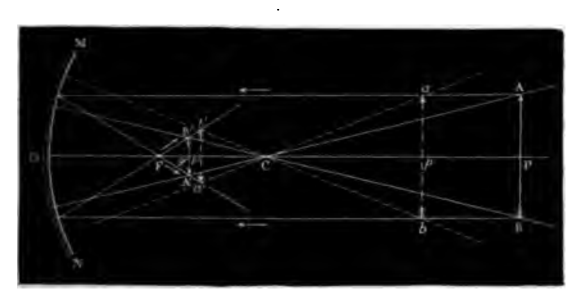


Fig. 225

:ourbure en *ab*, l'image marche vers le même point en
ıdit.

illeurs manifeste que ce procédé permet de retrouver
ıltats énumérés plus haut.

ns expérimentales. — La vérification expérimentale est
çoit sur un écran l'image réelle qu'un miroir concave
bjet lumineux (une bougie, une lampe à incandescence)
ement éclairé, situé au delà du foyer (fig. 226). On
ir directement l'*image aérienne* si les rayons réfléchis
ɔer l'œil au delà de leur point de concours.

ɔérience à ce sujet est celle du *bouquet renversé*. Sous
t noirci portant un vase vide, un bouquet est suspendu
ystème étant installé devant un miroir concave, dans
'observateur placé au delà du socle voit le bouquet se
s du vase avec une apparence surprenante de réalité.

ɪné par le point A parallèlement à l'axe principal ne ren-
, on remplacera l'axe principal par l'axe secondaire paral-
lconque rencontrant le miroir: la seule condition est de
e point de cet axe situé dans le plan focal principal.
ɔermet de construire le foyer conjugué d'un point situé
mme hors de cet axe.

Si l'on met un objet au foyer même d'un miroir concave, l'image, étant à l'infini en même temps qu'elle est infiniment grande, reste visible sous un angle fini, soit à l'œil nu accommodé pour l'infini, soit au moyen d'une lunette astronomique ajus-

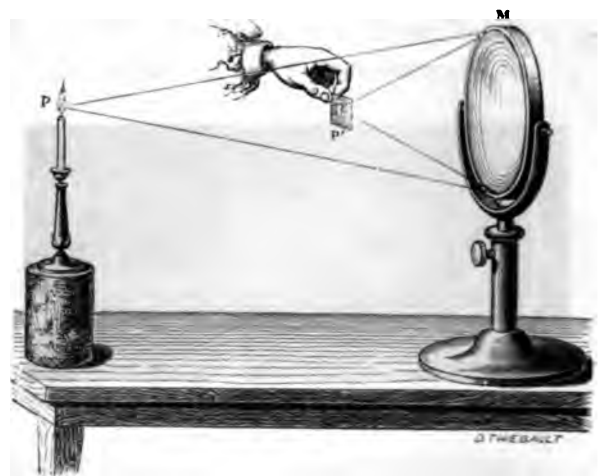


Fig. 226

tée pour voir nettement à l'infini, et recevant à une distance quelconque les rayons réfléchis par le miroir.

Nous n'avons pas à rappeler l'emploi des miroirs concaves comme *miroirs à barbe :* l'image virtuelle et droite qu'ils fournissent d'un observateur placé entre le foyer et le miroir est nécessairement un peu déformée, le nez qui fait saillie étant moins grossi que les joues.

L'effet contraire se produit dans les miroirs convexes. Lorsqu'on approche le doigt d'une *boule panoramique*, il apparaît comme une massue renflée à son extrémité.

Tout objet convexe suffisamment poli reflète la lumière extérieure suivant une image étroite et brillante qui accuse le relief de l'objet.

Mesure de la distance focale d'un miroir sphérique (¹). — a) *Miroir concave.* — Le moyen le plus simple pour déterminer la distance focale principale d'un miroir concave est de l'exposer droit

(¹) Il n'est question ici que des procédés optiques, plus commodes que les procédés mécaniques (114 et 118) qui ne devront cependant pas être négligés.

ux rayons solaires et de chercher avec un verre dépoli l'image du oleil. La distance de cette petite image au miroir est égale à f. Mais e procédé ne comporte pas grande précision.

On obtiendra au contraire un résultat très précis en mesurant soigneusement les distances p et p' du miroir à un objet plan situé au delà du foyer et à l'image de cet objet, et en appliquant à ce couple de mesures (que l'on répétera en variant la distance p) la formule fondamentale

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}.$$

Comme objet, on prendra soit un réticule, soit le bord d'un trou u d'une fente, vivement éclairé, et pour trouver la place exacte e l'image, on se servira d'un microscope que l'on déplacera usqu'à ce qu'on voie l'image le plus distinctement possible : celle-i sera alors à une distance de l'objectif que l'on déterminera en herchant où il faut mettre un test-objet quelconque pour le voir nettement dans le microscope.

b) *Miroir convexe.* — On peut également exposer le miroir aux rayons solaires; mais comme le foyer n'est pas réel, il faudra recourir à l'un ou à l'autre des deux procédés suivants :

1° Disposer devant le miroir un écran percé de deux petits trous A, A',

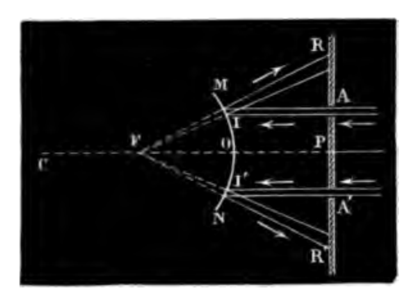


Fig. 227

t s'arranger de manière que les taches R, R', formées par les ayons réfléchis, soient écartées de $RR'=2AA'$: alors $OP=OF=f$.

2° Recevoir d'abord les rayons solaires sur un large miroir concave M'N', de distance focale connue f', et placer le miroir MN de çon que l'image réelle S de l'objet virtuel F' tombe entre les som-

mets O et O′ : on mesure $OS=a$ et $OO'=d$, et l'on calc
l'équation

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{\bar{f}-d}=-\frac{1}{\bar{f}}.$$

En employant un objet virtuel bien défini et en

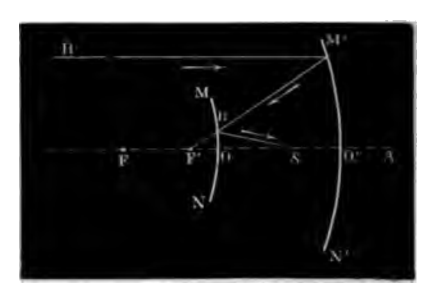


Fig. 228

de cet objet avec un microscope (par un trou pratiqué e
donnera à cette méthode toute la précision désirable.

On pourra aussi, plus simplement, viser au moyen d'un
astronomique l'image virtuelle d'un objet réel situé en
miroir à une distance $p > 0$: on déterminera le plan
comme dans le cas précédent, en cherchant où il faut p
objet témoin (une page d'imprimerie) pour la voir netten
aura ainsi p', et par suite $\bar{f}$.

Aberrations. — Nous avons supposé jusqu'ici l'ouve
miroir assez petite pour que les rayons réfléchis près d
(rayons marginaux) convergent au même point que les ra
sins du sommet (rayons centraux). Mais cette condition n'
ralement pas satisfaite ; il se produit des *aberrations* : on
aberration longitudinale la distance du foyer des rayons m
au foyer des rayons centraux, et *aberration latérale* le ray
section faite dans le cône des rayons marginaux par le p
central. La grandeur de ces aberrations dépend de la po
point lumineux. Nous considérerons seulement le cas où
lumineux est à l'infini ; elles s'appellent alors *aberrations prin*
F étant le foyer des rayons centraux, F_1 le foyer des rayo
ginaux, et FH la perpendiculaire à FF_1 menée par le point F
sa rencontre avec le rayon marginal MF_1, $CF_1 - CF$ est l'*ab*

gitudinale principale λ, et FH l'*aberration latérale principale* ρ.

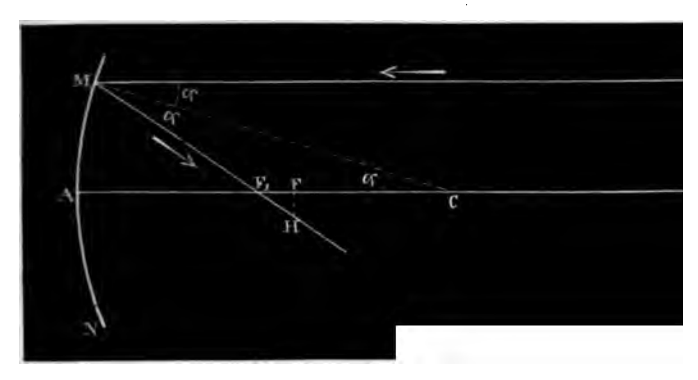


Fig. 229

l'on observe que le triangle CF_1M est isocèle et que l'angle FF_1H t égal à l'ouverture 2α du miroir, on a immédiatement

$$\lambda = f\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \quad \text{et} \quad \rho = \lambda \operatorname{tg} 2\alpha.$$

D'ordinaire α est assez petit pour que les termes du quatrième rdre soient négligeables; on prendra alors les valeurs approchées

$$\lambda = \frac{1}{2} f\alpha^2 \quad \text{et} \quad \rho = f\alpha^3,$$

u, si l'on préfère introduire les rayons de courbure $CM = R$ et 'ouverture $AM = r$,

$$\lambda = \frac{r^2}{4R} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{r^3}{2R^2}.$$

L'aberration latérale, celle qui est la plus importante à considé-ɪr, diminue très vite avec l'ouverture. Toutefois, dans le cas de $=200^{cm}$ et de $r = 5^{cm}$, on a encore $\rho > 0^{cm},0015$. Il semblerait donc npossible d'obtenir au moyen d'un télescope des images nettes et isceptibles d'un grossissement énergique, si l'on ne remarquait que s rayons se serrent vers le centre du cercle d'aberration, de sorte ue la partie efficace de ce cercle se réduit à une très petite surface. La concentration des rayons au foyer même résulte immédiatement de la considération de la caustique [1].

[1] Cette considération est due au mathématicien TSCHIRNAUS (*Acta eruditorum*, 364; 1682). DE LA HIRE (*Mémoires de l'ancienne Académie des sciences*, IX, 448; 1690) étudia la caustique engendrée par la réflexion d'un faisceau de rayons

Caustiques. — On appelle *caustique par réflexion* l
intersections successives des rayons réfléchis par
qu'éclaire un point lumineux. Malus a montré que ce
surface à deux nappes. Dans le cas d'un miroir
l'une des nappes se réduit au diamètre passant par le p
neux; l'autre est une surface de révolution ayant pou
la courbe que forme dans l'un des plans méridiens du
lieu des intersections successives des rayons réfléchis.
ce lieu. A cet effet, traçons deux rayons incidents infin
sins PI et PI'; les rayons réfléchis correspondants, IR
coupent suivant Q qui est un point du lieu, α, α' et ω étant

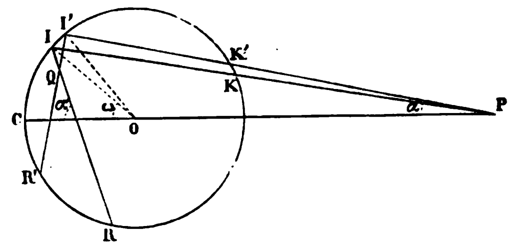


Fig. 230

que font respectivement avec l'axe PC le rayon incid
rayon réfléchi IR et la normale OI au point d'incide
fondamentale de la réflexion fournit aussitôt la relatio
fait générale,

$$\alpha + \alpha' = 2\omega,$$

et par suite

$$d\alpha + d\alpha' = 2d\omega,$$

ou, si l'on mesure ces angles par les arcs comptés sur le

$$RR' - KK' = 2II'.$$

parallèles dans un miroir sphérique. Jean BERNOUILLI (*Opera*, I, 5
LHOPITAL (*Analyse des infiniment petits*; 1696) s'occupèrent des cau
lesquelles SMITH (*Cours d'optique*, traduction Pézénas, I, 30; 1767) cl
terminer l'éclairement, et dont PETIT (*Correspondance sur l'École p*
publiée par Hachette, II, 353; 1812) donna le tracé par points. Le su
et élargi par MALUS (*Traité d'optique*, dans les *Mémoires présentés à*
sciences par divers savants, II, 214; 1811); DUPIN (*Ann. de chim. et*
V, 85; 1817); QUÉTELET (*Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, III, 15 et I
STURM (*Ann. de Gergonne*, XV, 205; 1824); GERGONNE (*Ann. de Gergo*
1823-26); TIMMERMANS (*Correspondance mathématique et physique des*
336; 1826), et LEVISTAL (*Annales scientifiques de l'École normale*, (1), I

Posons $IP = l$, $IQ = l'$ et $IR = IK = 4a$.

Les triangles semblables QII' et QRR' donnent

$$\frac{RR'}{II'} = \frac{4a - l'}{l'},$$

et les triangles semblables PII' et PK'K

$$\frac{KK'}{II'} = \frac{l - 4a}{l}.$$

De ces trois relations on tire

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a},$$

équation toute semblable à la formule des miroirs et qui se construit aisément.

Quand le point lumineux est à l'infini, $l = \infty$, l'équation se réduit à

$$l' = a,$$

c'est-à-dire $IQ = \frac{IR}{4}$. Le point Q de la courbe situé sur le rayon réfléchi IR est donc le pied de la perpendiculaire HQ abaissée de H, milieu de OI, sur ce rayon IR. En d'autres termes, le point Q

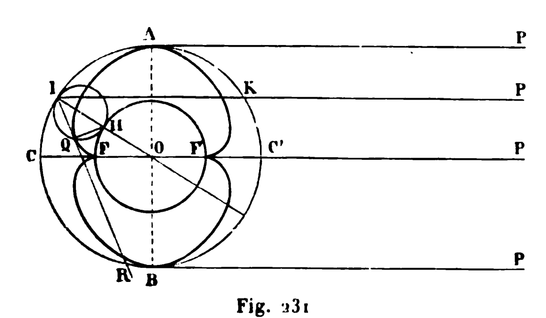


Fig. 231

se trouve à la rencontre de IR avec le cercle décrit sur IH comme diamètre, cercle tangent en I et en H aux cercles de rayons OI et OH. Comme d'ailleurs les deux angles égaux HIQ et HOC ont respectivement pour mesure $\frac{arc\,QH}{IH}$ et $\frac{arc\,FH}{OH}$, on a $arc\,QH = arc\,FH$.

Le lieu du point Q est donc l'épicycloïde décrite par le cercl

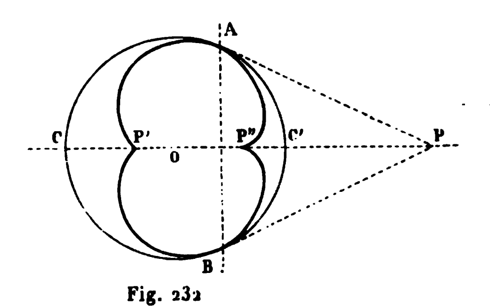


Fig. 232

de rayon $\frac{R}{4}$ roulant sur le cercle OH de rayon $\frac{R}{2}$. La partie AFB

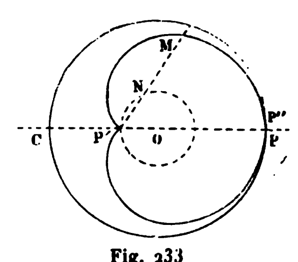


Fig. 233

la courbe est l'enveloppe des rayons réfléchis par le miroir co

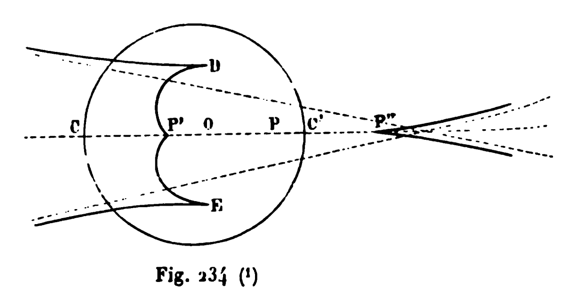


Fig. 234 (1)

cave ACB, la partie AF'B correspond virtuellement aux ra
réfléchis par le miroir convexe AC'B, les rayons incidents étant

(1) Les asymptotes rencontrent l'axe en un point dont la distance au c est $\frac{3lR^2}{4l^2-R^2}$ et sous un angle $\frac{V}{2}$ défini par la relation $\operatorname{tg}\frac{V}{2} = \frac{2\sqrt{(R^2-l^2)(4l^2-}}{8l^2+R^2}$
L'abscisse du rebroussement D,E, est $\frac{l(R^2-2l^2)}{R^2}$, et la tangente au rebr ment coupe l'axe au point $\frac{lR^2}{2l^2-R^2}$.

Les foyers principaux F,F' sont à l'intersection de la deuxième nappe de la caustique avec la première.

On voit très facilement la courbe AFB en exposant presque tangentiellement aux rayons solaires soit un anneau métallique bien poli placé sur une feuille de papier, soit le bord d'un verre plein

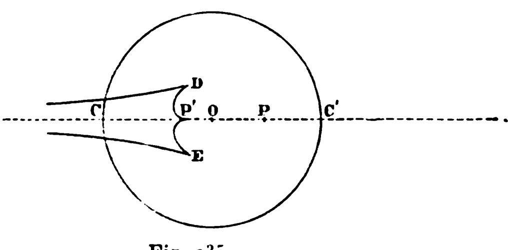


Fig. 235

'un liquide foncé, ou encore en recevant la lumière sur un cylindre e fer-blanc ; et l'on constate que le point F est particulièrement rillant.

Le point P se rapprochant progressivement, la courbe se modifie . se déplace, comme le montrent les figures ci-jointes ([1]),

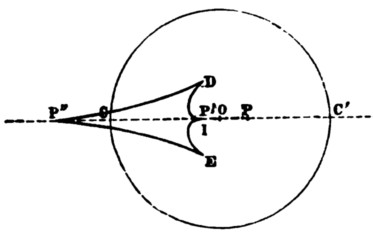


Fig. 236

jusqu'à ce que tout se réduise à un point lorsque le point lumineux arrive au centre.

Un miroir est dit *aplanétique* (ἀ privatif, πλάνη erreur) quand il

([1]) Noter le cas où le point lumineux est sur le cercle, en P (fig. 233) : la caustique st un limaçon de Pascal, que l'on tracera en construisant le cercle OP' de rayon $\frac{R}{3}$ t en prolongeant les rayons vecteurs P'N d'une longueur $= \frac{2R}{3}$. C'est aussi épicycloïde engendrée par un cercle de rayon $\frac{R}{3}$ roulant extérieurement sur cercle OP'.

donne d'un point une image réduite à un point. Un miroir sphéı est aplanétique pour son centre seulement (¹).

Insuffisance des considérations précédentes. — Nous ne poı rons pas plus loin l'étude géométrique des miroirs sphériques, ı que tout utile qu'elle est dans les limites où nous l'avons restre elle se trouve entachée d'un vice originel qui se trahit dès qu'ı serre de près. Ainsi, de fait, comme nous l'apprendra la thı des ondes, l'image d'un point dans un miroir aplanétique est, pas un point, mais un cercle brillant d'un éclat assez uniforme, touré d'anneaux colorés d'intensités rapidement décroissantes.

Nous ferons cependant encore remarquer que la forme dı caustique rend compte de la déformation des images vues obliqı

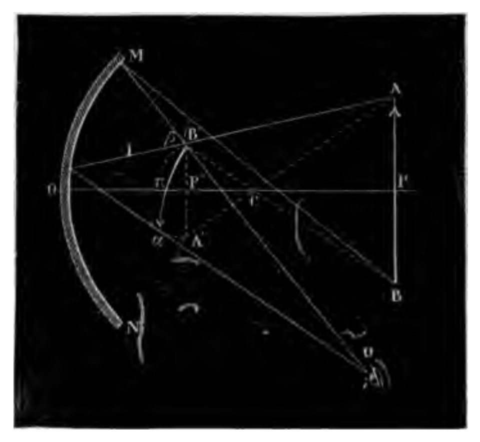


Fig. 237

ment dans les miroirs sphériques. Car l'œil placé en U voit l'im du point A entre les points A' et α appartenant respectivement

(¹) Une surface aplanétique est évidemment de révolution autour de la joignant le point lumineux à son image. Comme d'ailleurs la normalı courbe méridienne doit bisséquer l'angle des rayons vecteurs menés aux points, cette courbe est nécessairement une conique tournant autour de soı focal. La surface d'un miroir aplanétique est donc un ellipsoïde de révol (concave si le point lumineux et son foyer sont tous les deux réels, convexı sont tous les deux virtuels), un paraboloïde de révolution (quand l'un des points est à l'infini), ou enfin un hyperboloïde de révolution à deux napp l'un des points est réel et l'autre virtuel). Comme cas particuliers se prése la sphère et le plan : celui-ci est toujours aplanétique, quelle que soit la pos du point lumineux.

deux nappes de la caustique de A. L'image ainsi vue ne se confond pas avec celle que l'on recevrait sur un écran.

420. Miroirs paraboliques. — D'après la propriété bien connue de la parabole, il est manifeste qu'un miroir parabolique donnera dans le plan focal une image particulièrement nette d'un objet éloigné, de petites dimensions angulaires, situé sur l'axe. La construction d'un miroir exactement parabolique est donc très importante pour les astronomes. Déjà, en 1777, un opticien anglais, Mudge, avait perfectionné beaucoup les miroirs sphériques en les creusant légèrement vers le sommet, de façon à augmenter la courbure dans cette région et à rapprocher le foyer des rayons centraux de celui des rayons marginaux. La netteté croissante des images était le seul guide dans cette opération, que pratiquèrent lord Ross, Lassell et d'autres astronomes; encore risquait-on fort de dépasser le but. On ne pouvait d'ailleurs juger de la netteté qu'en mettant chaque fois le miroir en place dans le télescope.

Procédé de Foucault [1]. — Foucault a réalisé un grand progrès en dirigeant le travail par une série d'épreuves qui, sans exiger le montage du miroir, permettent de marcher sûrement vers la forme géométrique. En outre, il remplaça le métal des miroirs, lourd, cassant et altérable à l'air, par le verre argenté, dont la couche métallique, déposée chimiquement sur une épaisseur minime, peut être renouvelée quand on veut, sans qu'il soit nécessaire de procéder à un nouveau polissage, c'est-à-dire à un nouveau travail complet du miroir.

Car le dressage porte sur des quantités très faibles. La portion utile du paraboloïde de révolution que l'on se propose d'obtenir diffère extrêmement peu d'une calotte sphérique. Soient en effet (fig. 238) OB la parabole

$$y^2 = 4f(2f + x),$$

et OA le cercle tangent au sommet

$$x^2 + y^2 = 4f^2.$$

Le rayon CA différant à peine de la normale à la parabole en B,

[1] FOUCAULT, C. R., XLIV, 339; XLVII, 205 et 958; XLIX, 85; LIV, 1; 1857-62; et *Annales de l'Observatoire de Paris*, V, 197; 1859.

l'épaisseur e de matière à enlever sur le bord est très sensibl
CB — CA; on a donc

$$e=\sqrt{\left(\frac{y^2}{4f}-2f\right)^2+y^2}-2f$$
$$=2f\left(\frac{y^4}{128f^4}-\frac{y^8}{32768f^8}+\ldots\right).$$

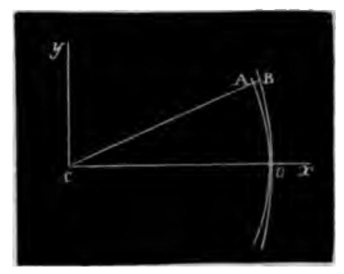


Fig. 238

Dans le grand miroir de lord Ross, où $f=54$ pieds anglais (
et $y=3$ pieds ($0^m,91$), e vaut à peine $2^\mu,5$. Ainsi, d
plus énorme miroir, la quantité de matière à enlever p
rendre parabolique est de l'ordre de celles qui se détach
polissage.

On cherchera donc d'abord à obtenir rigoureusement la
sphérique. Soit AB un miroir sphérique vérifié au sphéro

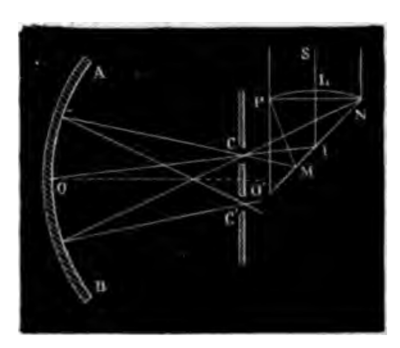


Fig. 239

tel que les fournit aisément l'industrie. Dans le plan cent
dispose un écran percé de deux trous C et C', symétriquement
à très petite distance du centre O'. Un miroir sphérique,

rigoureusement aplanétique pour son centre, le sera encore très approximativement pour les trous C et C′. Si donc, au moyen de la lentille L et du prisme à réflexion totale MNP, on dirige sur le petit trou C la lumière venant d'une source S de façon à réaliser en C un point lumineux, l'œil (armé d'une loupe) verra en C′ une tache blanche, entourée d'anneaux qui seront parfaitement réguliers quand la surface sera de révolution autour de l'axe OO′. S'il y a une déformation, elle indique un défaut de symétrie que l'on corrigera en usant convenablement le verre par frottement sur sa matrice.

Cette première condition satisfaite, on disposera en MN un petit réseau à mailles rectangulaires, que l'on éclairera comme précédemment, et dont on examinera l'image à l'aide d'un microscope placé en regard de M′N′ et portant en avant de son objectif un dia-



Fig. 240

phragme percé d'un très petit trou I, de sorte que l'image de la partie M du réseau proviendra des rayons réfléchis sur la portion *cd* du miroir, tandis que l'image de la partie N sera due aux rayons réfléchis sur la petite portion *ab*. Grâce à cette localisation des rayons réfléchis, les défauts que présenteront certaines parties de l'image indiqueront immédiatement les défauts des portions correspondantes de la surface. Si le miroir était parfait, l'image serait identique à l'objet (fig. 241). Si le miroir est défectueux, l'image sera déformée (fig. 242), les mailles étant agrandies là où le rayon de courbure est trop grand, et rétrécies là où il est trop petit ; et la grandeur de ces déformations montrera si le miroir doit encore être

reporté sur sa matrice, ou s'il peut être corrigé par la m
des retouches locales, véritable trait de génie de Foucault.

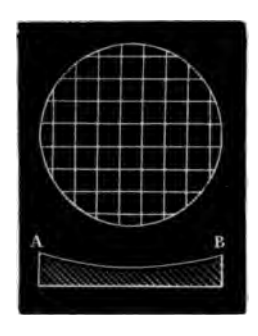


Fig. 241

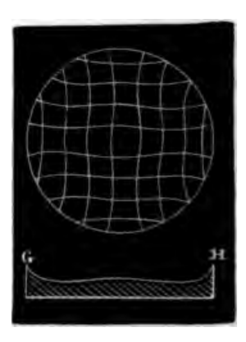


Fig. 242

Changeant le mode d'épreuve, on met le point lumin
centre O'; les rayons réfléchis viennent former au mêm
une image que l'on cache avec un écran DO' : l'œil placé d
cet écran ne doit donc recevoir aucun rayon réfléchi ; il d
la surface du miroir uniformément éclairée par cette lumi

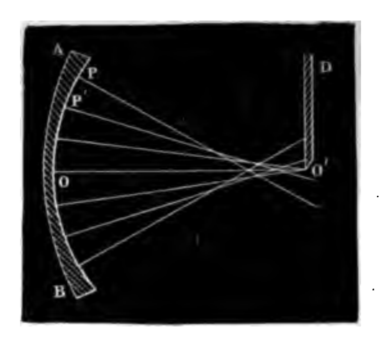


Fig. 243

fuse que laisse subsister le plus beau poli. Mais si certain
PP' font saillie, les rayons réfléchis en ces points viendront
l'axe entre O et O' et passant au-dessous de l'écran arriveront
la région PP' paraîtra éclairée. Au contraire, une portion en
semblera obscure. Après cette épreuve, Foucault prenait e
un polissoir recouvert de rouge d'Angleterre et frottait les par
lui avaient paru brillantes; puis il soumettait le miroir à un
examen optique ; et il continuait ses retouches jusqu'à ce q

rement se montrât uniforme. Le miroir était alors sphérique. e la sphère on passe à l'ellipsoïde en modifiant progressivement ırface, du centre vers les bords, de manière que, la lumière étant un des foyers, l'œil placé derrière l'écran à l'autre foyer voie la ace uniformément éclairée. En écartant graduellement les

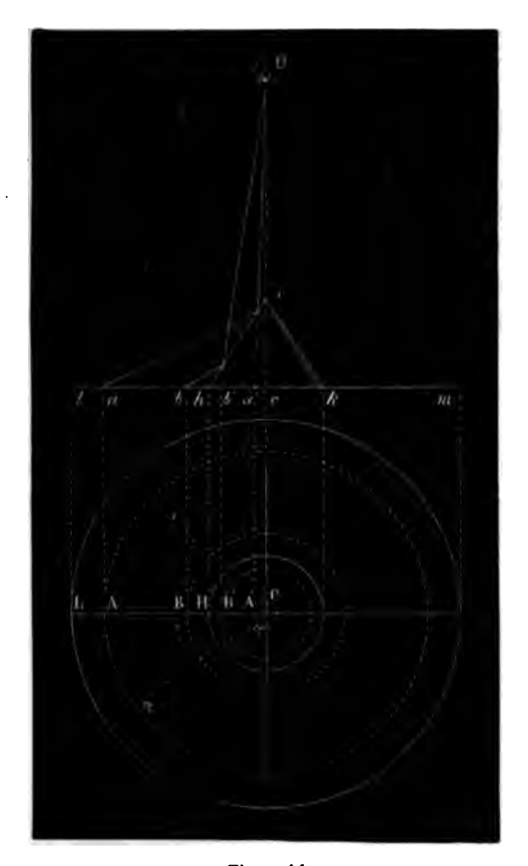


Fig. 244

yers, on allonge de plus en plus l'ellipsoïde; et quand la distance cale a atteint une vingtaine de mètres, on est bien près du paraıloïde. Pour y arriver, on remplace le point lumineux par un ıllimateur qui envoie sur le miroir un faisceau de rayons parallèles et, guidé toujours par la même règle, on enlève sur les bords petite quantité de matière dont l'ablation est commandée par forme à réaliser.

Le miroir est alors prêt à être mis en place dans le télescope.

421. Miroirs cylindriques et coniques. — Les miroirs cylindriques ou coniques produisent des effets curieux dont on se rendra facilement compte à l'aide des principes posés plus haut. Il n'y a pas de cabinet de physique qui ne possède un de ces miroirs, associé à des *anamorphoses* (ἀνὰ indiquant transposition, μορφή, forme) : on appelle ainsi des dessins d'apparences bizarres, bien que construits d'après des règles déterminées (1), et qui donnent dans ces miroirs des images régulières. La figure 244 fait voir comment les rayons partis des points a, b de l'anamorphose sont vus en $a'b'$ par l'œil placé en un point O au-dessus du miroir conique SHK. Un dessin étant tracé dans le cercle CH, on en obtiendra l'anamorphose dans la couronne HL par une épure très simple, tous les points situés sur le cercle A′ ayant leur anamorphose sur le cercle A dont le rayon se déduit de celui de A′ par la loi fondamentale de la réflexion, comme le montre la partie supérieure de la figure, et l'anamorphose de a' se trouvant nécessairement sur le rayon Ca.

(1) Stevin, *Magia universalis*. Herbipolis (Wurtzbourg); 1657.

CHAPITRE III

RÉFRACTION

1. — LOI DE LA RÉFRACTION.

de la réfraction. — *Énoncé de Descartes.* — yon lumineux passe d'un milieu transparent dans un ouve en général un brisement ou *réfraction*. Appelons *d'incidence* le plan SIN déterminé par le rayon inci- normale en I à la surface de séparation des deux mi-

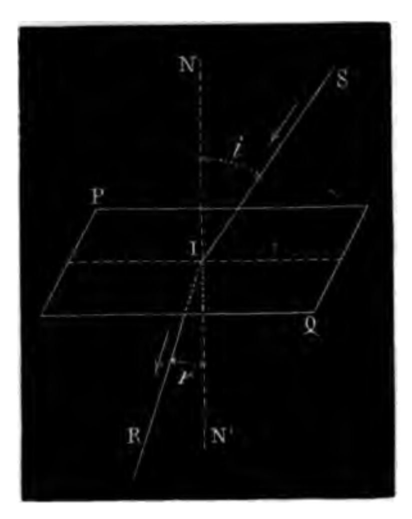


Fig. 245

d'incidence l'angle SIN du rayon incident SI avec la , et, de même, *angle de réfraction* l'angle NIR du té IR avec la normale IN au point d'incidence. Si le

nouveau milieu dans lequel se propage la lumière est isotro[
rayon réfracté reste compris dans le plan d'incidence; et le ra[
des sinus des angles d'incidence et de réfraction est un no
constant; de sorte que, si nous désignons par n ce nombre cons
qui se nomme l'*indice de réfraction* du deuxième milieu
rapport au premier, nous avons

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Cette loi a été donnée pour la première fois par Descartes (
sa *Dioptrique* (διὰ à travers, ὄπτομαι voir), parue à Leyde en 1
en même temps que le *Discours de la méthode*, les *Météores* e
Géométrie (¹).

Règle de Fermat. — Fermat a montré que le chemin s

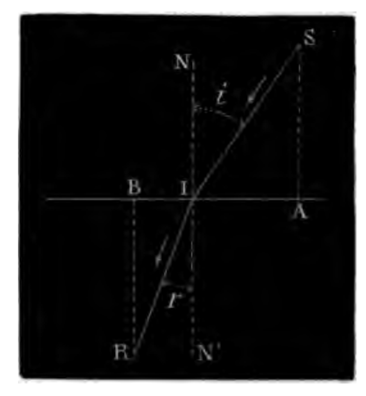


Fig. 246

par la lumière dans la réfraction, comme dans la réflexion,

(¹) Au lendemain de la mort de Descartes, Isaac Voss et Huygens l'accusè
d'avoir connu la loi par un manuscrit, qui n'a jamais été publié, dans le
Snell, de Leyde, l'aurait énoncée, moins clairement, plusieurs années aup
vant. Cette accusation, sans preuve aucune, fut accueillie et grossie par
ennemis de Descartes : le plagiat était certain (POGGENDORFF, *Histoire de la*
sique, traduction Bibart et de la Quesnerie, p. 189). Cependant M. Kra
tenté récemment de rétablir les faits (KRAMER, *Zeitschrift für Math. u. P*
XXVII, Supplément; 1882); mais sa critique très impartiale montre s
ment combien l'histoire de la science devient difficile quand on aband
la règle d'attribuer une découverte à celui qui l'a publiée le premier.
prétend que Snell a trouvé la loi en 1621; mais ce ne serait qu'en 1634

lui qu'elle peut parcourir dans le temps le plus court possible [1].

Soient, en effet, deux points S et R situés dans deux milieux ifférents, où la lumière se meut avec les vitesses respectives v et v'. n reprenant le raisonnement fait plus haut (413), on reconnaît isément que le chemin de plus courte arrivée est formé de deux lroites SI et IR, comprises dans le plan normal à la surface plane de éparation MN [2], et que le temps employé à parcourir ces droites

$$\frac{\mathrm{SI}}{v}+\frac{\mathrm{IR}}{v'}$$

st minimum si

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v}{v'},$$

c'est-à-dire si, conformément à la loi de Descartes, les sinus des ngles d'incidence et de réfraction sont dans un rapport constant, equel ne serait autre que le rapport des vitesses de la lumière dans s deux milieux successifs.

Valeur théorique de l'indice. — La théorie des ondes nous conira, en effet, à cette valeur remarquable de l'indice de réfraction

$$n=\frac{v}{v'}.$$

On en conclut que l'*indice absolu*, c'est-à-dire l'indice N par rapport au vide, où la vitesse de la lumière est V, est égal à l'indice n relatif à l'air multiplié par l'indice absolu de l'air $\nu=1,000292$. On a, en effet, v et v' désignant encore les vitesses dans l'air et dans le milieu,

$$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{V}}{v'},\qquad n=\frac{v}{v'},\qquad \nu=\frac{\mathrm{V}}{v},$$

d'où

$$\mathrm{N}=n\nu.$$

le professeur Honorius l'aurait divulguée. D'autre part, Descartes était certainement en possession de la loi plus de dix années avant la publication de son livre; car en 1627 il s'occupait de questions de dioptrique qui la supposent. Pour lequel donc opter de ces deux savants, qui sans doute sont arrivés au but à peu près à la même époque, chacun de son côté?

(1) FERMAT, *Litteræ ad P. Mersennum contra Dioptricam Cartesianam*. Paris; 1667.

(2) Même remarque que pour la réflexion si la surface est courbe.

Par suite

$$n = \frac{N}{\nu}.$$

En général, l'indice d'un milieu 2 par rapport à un milieu 1 est égal au rapport des indices absolus de ces deux milieux, ou encore au rapport des indices de ces deux milieux relativement à un même troisième. On a

$$n = \frac{N_2}{N_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Cette théorie a inspiré à Huygens [1] une construction géométrique pour mettre en place le rayon réfracté correspondant à un rayon incident proposé.

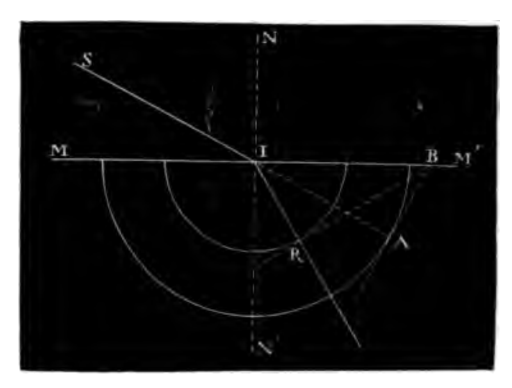


Fig. 247

Soit SI un rayon tombant sur le plan MM' qui forme la séparation de deux milieux isotropes, l'air et l'eau, par exemple. Du point I comme centre, traçons dans le plan d'incidence SIN deux cercles, l'un A de rayon 1, l'autre R de rayon $\frac{1}{n}$, n étant l'indice de l'eau par rapport à l'air [2]. Prolongeons le rayon incident SI jusqu'à sa rencontre en A avec le cercle de rayon 1, et menons la tangente en A à ce cercle : elle coupe en B la surface MM'; par le point B, menons la tangente BR au cercle de rayon $\frac{1}{n}$; IR est le rayon réfracté.

(1) HUYGENS, *Traité de la lumière*. Leide; 1690.

(2) Ces deux cercles représentent pour Huygens les traces marquées à un même instant sur le plan de la figure par l'onde incidente et l'onde réfractée.

En effet, les triangles IBA et IBR, dont les angles en B sont spectivement égaux aux angles i et N'IR, donnent

$$\sin i = \frac{1}{\text{IB}}, \qquad \sin \text{N'IR} = \frac{\frac{1}{n}}{\text{IB}},$$

l'où

$$\sin i = n \sin \text{N'IR};$$

donc

$$\text{N'IR} = r.$$

Vérifications expérimentales. — a) *Ptolémée.* — Le brisement des rayons à la surface de séparation de deux milieux frappa les plus anciens observateurs. Ptolémée, mort en 147 à Alexandrie, rapporte dans son « Optique(1) » l'expérience de la pièce de monnaie que es bords d'un vase empêchent d'apercevoir et qui devient visible uand le vase est plein d'eau. Il relate ensuite les mesures d'anles qu'il a prises sur la lumière passant de l'air dans l'eau, de l'air ans le verre (ou du verre dans l'air), et du verre dans l'eau. Le rocédé qu'il employait sert encore aujourd'hui à démontrer dans s cours la loi de Descartes.

Pour mesurer, par exemple, les angles d'incidence et de réfracon au passage de l'air dans l'eau, il plongeait dans l'eau la moié inférieure d'un cercle gradué, dont le centre était marqué ar une petite boule colorée, et sur la circonférence duquel on laçait deux autres petites boules, l'une dans l'air, l'autre dans eau, de manière que l'œil vît les trois boules en ligne droite.

Puis il remettait dans l'air la moitié inférieure du cercle, et la ouvrait avec un demi-cylindre de verre. Un pinceau lumineux, digé suivant un rayon du cercle, rencontrant normalement la surace courbe du cylindre et la franchissant par conséquent sans déviation, n'était brisé qu'en traversant le plan de séparation du verre et de l'air. On avait donc ainsi une seule réfraction, que l'on étudiait comme précédemment.

Enfin, on plaçait la face plane du bloc de verre sur la surface

(1) DELAMBRE a donné dans la *Connaissance des temps* pour 1816 une analyse détaillée de ce livre remarquable, qui était connu jusqu'alors par des citations seulement, et dont on venait de trouver des manuscrits latins traduits de l'arabe.

de l'eau, et l'on mesurait les angles d'incidence dans le ve
réfraction dans l'eau.

Il était d'ailleurs manifeste, au cours de toutes ces exp
que le rayon réfracté restait dans le plan d'incidence.

Alhazen, mort au Caire en 1038 ([1]), dont l'Optique est la

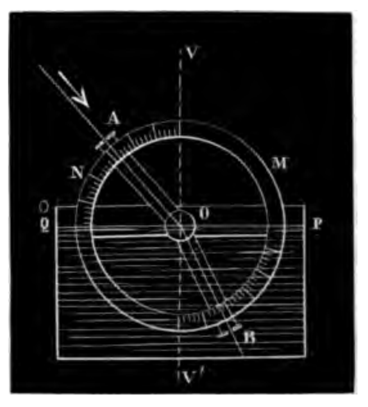


Fig. 248

à citer après celle de Ptolémée, reprit ces mesures
instrument plus parfait (fig. 248), mais sans apporter à l
de nouveaux résultats.

La figure 249 représente l'appareil construit de nos j
Silbermann. C'est un vase cylindrique en verre, que l'on
d'eau jusqu'au diamètre horizontal, et qui ne fait encore s
lumière qu'un seul brisement. Deux alidades, dirigées re
ment suivant le rayon incident et suivant le rayon réfracté
tenu dans le plan d'incidence, marquent les angles sur le c
leurs sinus sur la règle HH', amenée successivement en re
extrémités S' et R. Les rayons peuvent être rendus visible
par des poussières en suspension dans les deux milieux
à l'aide de fumée dans l'air et de sulfate de quinine (di
moyen d'acide sulfurique) dans l'eau.

b) *Képler*. — Képler opérait par un procédé ingénieu

([1]) Sur la vie et les travaux d'Alhazen, consulter E. WIEDEMANN, *P*
CLIX, 656 et *Wied. Ann.* I, 480 et VII, 680; 1876-79.

([2]) Pour assurer cette direction on placera sur le liquide un papier
d'un petit trou en face du centre.

également en jeu qu'une réfraction. Derrière un écran opaque ᵓQ, il disposait un parallélipipède de verre PQSTUVXY de

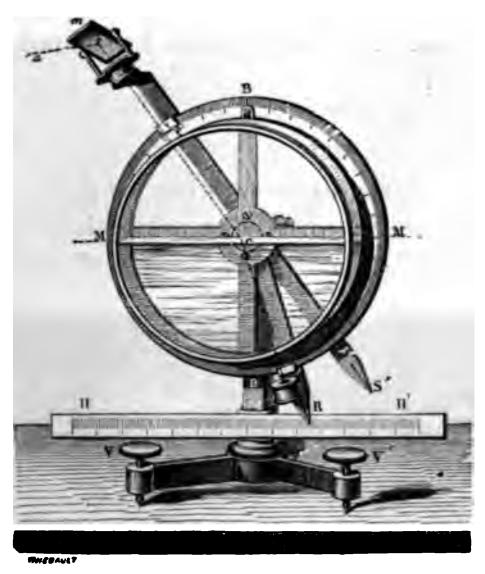


Fig. 249

: hauteur, reposant sur une planchette NY montée à angle avec l'écran et blanchie. L'appareil était exposé au soleil de

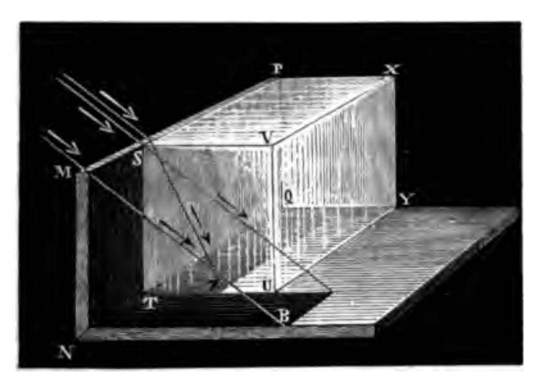


Fig. 250

n que, les rayons tombant perpendiculairement sur le bord MP 'écran, deux ombres se dessinaient sur la planchette : l'une due aux rayons ayant continué leur trajet dans l'air ; l'autre produite par la lumière transmise dans le verre. La longueur

de ces ombres, jointe à la hauteur de l'écran, définissait les an i et r; et en opérant à différentes heures du jour on pouvait su le phénomène dans des limites assez étendues. Képler ne tro cependant pas ainsi la loi exacte; mais il reconnut que, pour petits angles, on a

$$i = nr.$$

c) *Descartes.* — Descartes recevait sur un prisme de verre B normalement à la face AB, un faisceau délié, qui, se brisant à la sor venait marquer sur le plan PQ une tache lumineuse VR. Des d

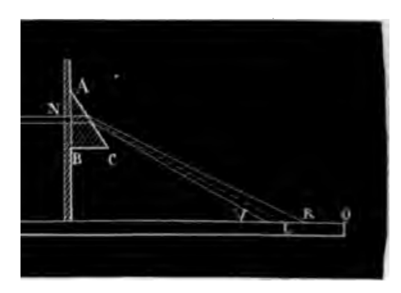


Fig. 251

nées de l'expérience il déduisait aisément l'angle d'incidence et l'a gle de réfraction, qu'il faisait varier en changeant l'angle du prisn

d) *Newton.* — Nous citerons encore le procédé de Newton, que figure 252 fait suffisamment comprendre. On incline l'appar de façon que la lumière, déviée à son entrée dans le pris liquide APQ, sorte normalement à la face PQ : l'angle de réfr tion, égal à MOC, se lit immédiatement sur le quart de cercle M On aura de même l'angle d'incidence en répétant l'observati après avoir supprimé le liquide.

Mais ce ne sont là que des méthodes grossières, qu'il serait d'a leurs inutile de chercher à rendre plus précises. Lors de son passa d'un milieu dans un autre, la lumière est, non seulement dévié mais séparée en différentes couleurs s'échelonnant depuis le rou jusqu'au violet. Ce phénomène, que l'on appelle *dispersion*, sera étu plus loin en détail, et l'on verra alors comment chacun des ray colorés suit exactement la loi de Descartes avec un indice détermi

Principe du retour inverse des rayons. — Toutes les expérien

confirment aussi le principe du retour inverse des rayons [1], principe général que nous avons déjà rencontré dans les phénomènes de réflexion et qui peut s'énoncer ainsi :

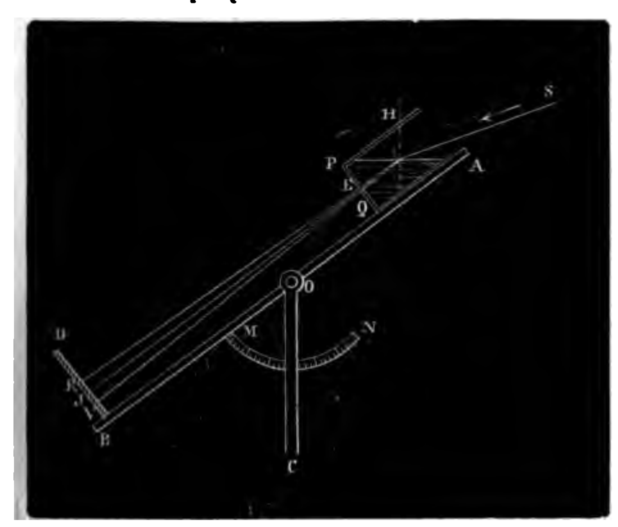


Fig. 252

Le chemin suivi par la lumière reste le même dans quelque sens qu'elle se propage.

Pour le moment, nous en conclurons ce fait, que les appareils indiqués plus haut pourraient encore montrer :

Si n est l'indice de réfraction d'un corps A par rapport à un corps B, $\frac{1}{n}$ est l'indice de B par rapport à A.

C'est une conséquence immédiate du principe précédent. Car, si la lumière revient sur ses pas, r est l'angle d'incidence, i l'angle de réfraction, et l'on a

$$\sin r = \frac{1}{n} \sin i.$$

Conséquences de la loi de la réfraction. — Étudions maintenant les conséquences de la loi de Descartes

$$\sin i = n \sin r.$$

Supposons d'abord $n > 1$. Dans ce cas, qui se présente par exemple quand la lumière passe de l'air dans l'eau $\left(n = \frac{4}{3}\right)$ ou dans

[1] Ptolémée avait constaté la réciprocité des rayons incident et réfracté.

le verre $\left(n=\frac{3}{2}\right)$, le deuxième milieu est dit *plus réfringent* q
premier.

Alors, sin r étant toujours plus petit que sin i, comme i et
tous les deux moindres que 90°, l'angle r est toujours plus pet

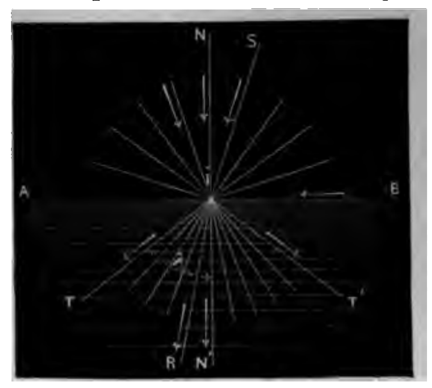


Fig. 253

l'angle i : le rayon réfracté se rapproche de la normale à la s
de séparation des deux milieux.

Quand l'incidence augmente, l'angle r croît moins vi
l'angle i; car

$$dr = di\frac{\cos i}{n\cos r};$$

on a supposé $n>1$, et par suite $\cos r > \cos i$; on a donc dr
Par suite, la déviation $D = i - r$ augmente avec i [1].

Quand $i = 90°$, l'angle r atteint une valeur limite λ, telle qu

$$\sin\lambda = \frac{1}{n}.$$

L'angle limite mesure à très peu près 48° dans l'eau, et 42°
le verre.

[1] On a d'ailleurs

$$\sin D = \sin i \cos r - \sin r \cos i,$$
$$= \sin i\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}} - \frac{\sin i}{n}\sqrt{1-\sin^2 i}$$
$$= \frac{\sin i}{n}\left(\sqrt{n^2-\sin^2 i}-\sqrt{1-\sin^2 i}\right),$$

expression nulle pour $i=0$ et qui pour $i=90°$ atteint sa plus grande
$\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$.

s le cas de $n < 1$, en renversant les propositions qui précè-
ous voyons que r est toujours plus grand que i, croît plus
e i et atteint la valeur 90° pour $i = \lambda$. Au delà, il n'y a plus de
émergent; toute la lumière passe dans le rayon réfléchi in-

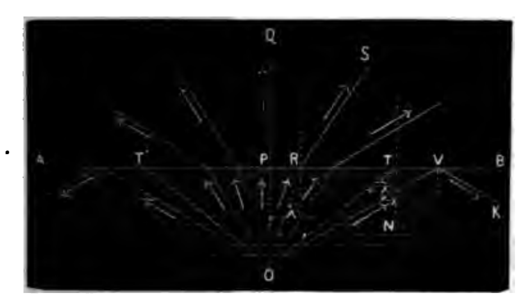


Fig. 254

rement, qui n'a pas cessé d'accompagner le rayon réfracté eurement : il y a *réflexion totale*, comme l'a reconnu Képler.

lexion totale. — On peut aisément constater le fait en faisant

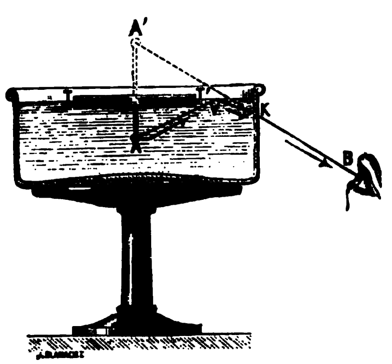


Fig. 255

sur l'eau un liège TT' ayant 3 centimètres de rayon, sous l est piquée une épingle A, longue de 2 centimètres. Dans onditions, aucun rayon lumineux parti de l'épingle ne peut r à l'œil placé au-dessus du liquide. Mais si l'on abaisse l'œil on voit une image A' de l'épileng, symétrique de A et un peu ;ée par la réfraction en K à la sortie du vase.

vérifie que la réflexion est totale à l'aide du petit appa- iguré ci-contre et qui se compose d'un parallélipipède de ABCD, surmonté d'un prisme de même substance *abc*. A

travers cet appareil on regarde une feuille de papier blanc dis| en face d'une fenêtre (de préférence une fenêtre au nord) et voyant par toute sa surface une lumière bien égale. On ne con

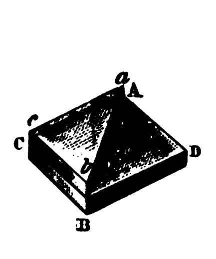


Fig. 256



Fig. 257

aucune différence entre les intensités des deux faisceaux, SR dont l'un, simplement transmis par le parallélipipède a subi

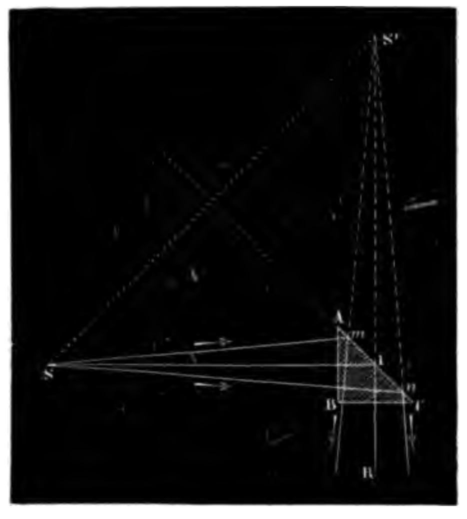


Fig. 258

réfractions, à l'entrée en I et à la sortie en I', tan tre faisceau, ayant traversé le prisme, a éprouvé réflexion ρ, qui s'est par conséquent produite sans

e à réflexion totale. — L'angle limite pour le verre ordi-'indice 1,5, étant, comme nous l'avons dit, voisin de 42°, ne ayant pour base un triangle rectangle isocèle réfléchira ité les rayons qui tomberont normalement, ou à peu près ment, sur l'une de ses faces (1). Pour renvoyer à angle n faisceau de rayons sensiblement parallèles, un prisme ion totale est supérieur à un miroir argenté par derrière et ant deux images, ou argenté par devant et alors facile-ltérable.

ines lumineuses. — Une curieuse application du phéno-



Fig. 259

e la réflexion totale est l'éclairement de la veine liquide faisceau de lumière lancé dans le jet (2). La lumière reste nnée dans le liquide dont elle ne peut sortir et l'illumine e sa longueur. Colladon (3) a disposé pour cette expérience il figuré ci-contre, qui sert au théâtre à faire la fontaine de l'eau est changée en vin par l'interposition d'un verre

ut substituer à la veine une baguette de verre courbée

r a pas à s'occuper des réfractions à l'entrée et à la sortie d'un rayon n, les deux déviations se compensant exactement, de sorte que le a finalement la même direction que s'il était simplement réfléchi sur AC.

(2) ...ET, *C. R.*, XV, 802; 1842.

(3) ...ADON, *C. R.*, XV, 800; 1842.

d'une manière quelconque. Les *fontaines lumineuses* sont truites sur le même principe ([1]).

II. — LAMES.

423. Réfraction à travers une surface plane. - *d'image proprement dite.* — La réfraction à travers une s plane ne donne généralement pas de véritable image.

Les rayons émanés d'un point lumineux situé dans l'eau ment plus dans l'air un faisceau convergeant en un point uniq rayons peuvent, en effet, se grouper de deux manières différ

1° Les rayons qui font dans l'eau un même angle avec la n

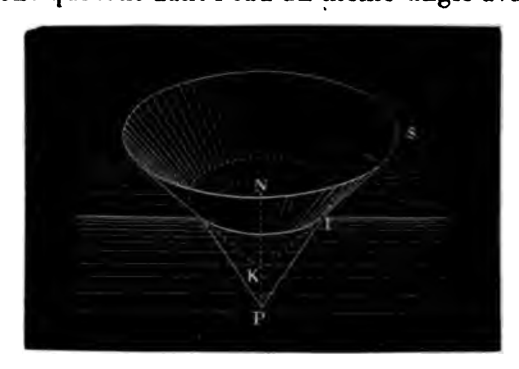


Fig. 260

PN et qui dans l'air constitueront évidemment aussi un cô dont l'angle au sommet i sera lié à l'angle au sommet r du c par la relation

$$\sin i = n \sin r;$$

on en conclut

$$KI = PI.\frac{1}{n}.$$

On a d'ailleurs

$$KN = PN\frac{\cot i}{\cot r} = PN.\frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}.$$

2° Les rayons situés dans un même plan normal : deux r infiniment voisins PI, PI′ donneront dans l'air les deux r IS, I′S′, dont les prolongements se couperont en un point l'on aura, en considérant les arcs de cercle infiniment

([1]) Voir *La Nature*, 17e année, 1er semestre, p. 401; 1889.

QI . di et PI . dr comme les projections de II' sur les directions respectivement perpendiculaires à PI et QI,

$$\mathrm{QI}\,di = \mathrm{II'} \cos i,$$
$$\mathrm{PI}\,dr = \mathrm{II'} \cos r,$$

et par suite

$$\mathrm{QI} = \mathrm{PI}\frac{\cos i}{\cos r}\frac{dr}{di} = \mathrm{PI}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos^2 i}{\cos^2 r}$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{QM} = \mathrm{PN}\frac{\mathrm{IQ}}{\mathrm{IP}}\frac{\cos i}{\cos r} = \mathrm{PN}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos^3 i}{\cos^3 r}.$$

En conséquence, l'œil placé au-dessus de l'eau recevra par l'ouverture de la pupille un pinceau de rayons qui, pouvant se répartir

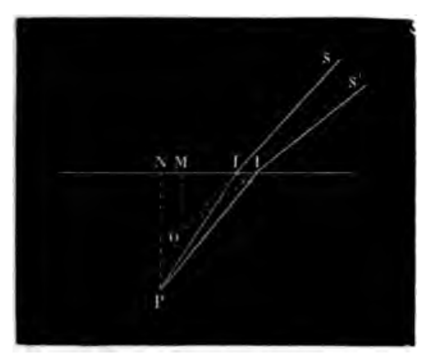


Fig. 261

sur des cônes peu différents de NPI, rencontreront une petite portion de la droite PN, et qui, étant en outre situés dans des plans peu inclinés sur le plan NPI, s'appuieront tous sur une deuxième petite droite perpendiculaire au plan moyen de réfraction. Ce pinceau étroit s'étrangle donc suivant deux petites droites rectangulaires, conformément au théorème de Sturm (431), mais sans présenter nulle part une véritable image du point P, sauf dans le cas où, l'œil étant placé sur la normale PN, les deux droites se coupent et par conséquent tous les rayons se rencontrent à une distance de la surface

$$\frac{d}{n},$$

d étant la distance PN.

Ainsi, l'image d'un objet plongé dans l'eau sera mal défi moins qu'il n'ait la forme d'une droite orientée suivant l'u l'autre des deux directions indiquées plus haut, et encore l' d'une telle droite sera-t-elle peu nette à ses extrémités.

Le plan n'est donc pas une surface réfringente aplanétiqu

Caustique par réfraction. — Un autre résultat du double pement des rayons est la forme de la surface caustique, env des rayons réfractés.

Le premier groupement donne une première nappe de

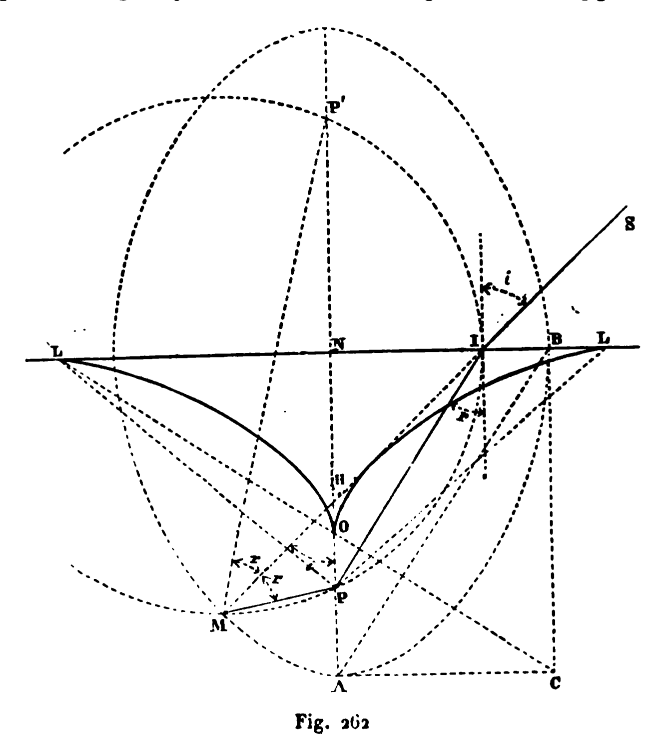


Fig. 262

surface, formée par la portion PN de la normale à la surfac mante.

Au deuxième groupement correspond une deuxième nap quelle est une surface de révolution dont la courbe méri peut être déterminée de la manière suivante :

Soit P' le point symétrique de P. Le rayon réfracté SI pro du rayon PI rencontre en M la circonférence menée par l

P, P′, I, et bissèque l'angle PMP′ (les arcs PI et P′I sont) ; par suite

$$\frac{PM}{PH} = \frac{P'M}{P'H} = \frac{PM + P'M}{PP'}.$$

'ailleurs, le triangle PMH donne

$$\frac{PM}{PH} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

n a donc

$$PM + P'M = nPP'.$$

nsi, le lieu du point M est une ellipse, dont P et P′ sont les s, dont le grand axe égale nPP′, et à laquelle le rayon cté est normal en M. Donc l'enveloppe des rayons SM est la oppée OL de cette ellipse.

4. Réfraction à travers une lame à faces parallèles. *s de déviation.* — De la proposition énoncée plus haut, à sa-

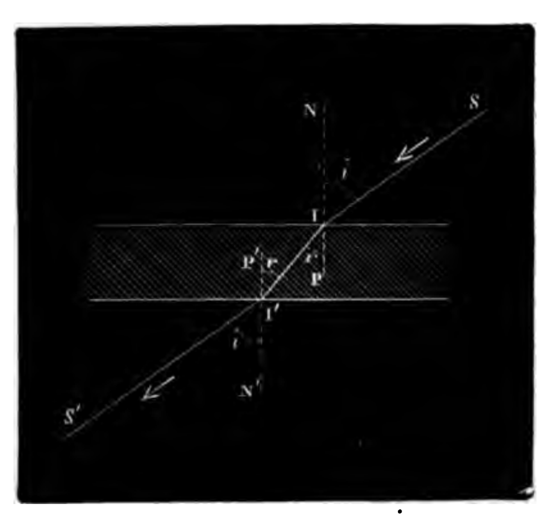


Fig. 263

que l'indice de réfraction de l'air relativement à un milieu é, est l'inverse de l'indice de ce milieu par rapport à l'air, il te que le rayon I′S′, émergeant d'une lame à faces parallèles gée dans l'air, est parallèle au rayon incident SI.

Effectivement, si l'on interpose une lame de verre à faces parallèles devant l'objectif d'une lunette astronomique visant une étoile ou le réticule d'un collimateur, l'image n'éprouve aucune déviation.

Cette expérience, étant susceptible d'une grande exactitude, fournit une démonstration rigoureuse du principe du retour inverse des rayons.

Moyen de reconnaître le parallélisme des deux faces d'une lame. — Inversement, le principe étant admis, la même expérience permet de reconnaître si une glace est à faces parallèles.

Toutefois, pour constater ce parallélisme, il vaut mieux opérer par réflexion. On vise l'image du réticule d'un collimateur dans la glace soutenue par les pointes de trois vis formant trépied : cette image doit rester immobile quand on fait tourner la lame sur elle-même autour de l'axe du trépied (¹).

Moyen de reconnaître la planéité d'une surface. — Quant à la planéité même des faces, on la vérifie d'abord par l'aspect de la surface éclairée au moyen d'un large faisceau de lumière parallèle, puis par comparaison avec un type (²), à l'aide des franges d'interférence, suivant la méthode de M. Fizeau, comme il sera dit en son lieu.

Déplacement. — Si une lame à faces parallèles ne dévie p... rayon SI, elle le déplace parallèlement à lui-même de

$$e \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}\right),$$

e étant l'épaisseur de la lame.

Rapprochement. — Un point lumineux regardé normalement à travers cette lame paraîtra rapproché de

$$e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

(¹) Un appareil pour cet examen a été construit par M. Laurent (*Jo... physique*, (2), II, 511 ; 1883).

(²) Ce type s'obtient par l'emploi de la même méthode : en compara...ant plateaux deux à deux, on détermine la courbure de chacune des trois ... Laurent, *loc. cit.*).

effet, d la distance du point à la première face de la lame, ion à l'entrée dans le verre produit une image située ce nd de la première face. Cette image, agissant comme ıel, donne, au retour des rayons dans l'air, une nouvelle uée à une distance de la deuxième face égale à $=d+\frac{e}{n}$, et par conséquent à une distance $e\left(1-\frac{1}{n}\right)$ du ineux.

me à réflexion totale, étant la moitié d'une lame à faces d'épaisseur e, rapproche l'image de la même quantité

ɜ fournie par une glace étamée, dans une direction à normale, est celle qu'offrirait le tain avancé vers l'ob- $-\frac{1}{n}\Big)$. D'où un moyen facile d'estimer l'épaisseur d'une applique une pointe contre la glace et on évalue à l'œil e de la pointe à son image : n étant sensiblement égal sseur de la glace est les $\frac{3}{4}$ de cette distance.

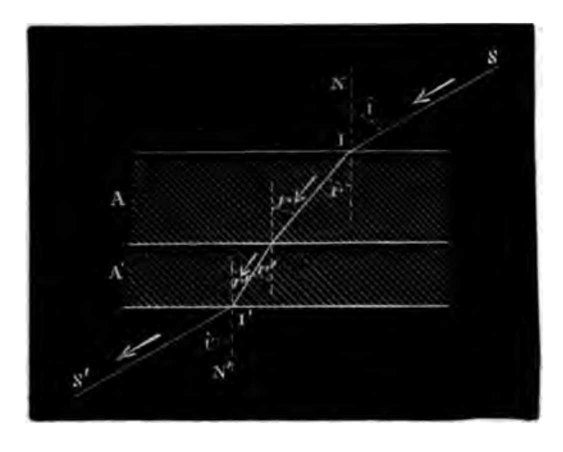


Fig. 264

Réfraction à travers deux ou plusieurs lames es. — Lorsque la lumière traverse deux lames parallèles

A et A', dont les indices par rapport à l'air sont n et n', on a, l'indice de A' par rapport à A étant $\frac{n'}{n}$ (422),

$$\sin i = n \sin r,$$

$$\sin r = \frac{n'}{n} \sin r',$$

$$\sin i' = n' \sin r',$$

d'où

$$\sin i' = \sin i,$$

et par suite

$$i' = i,$$

conclusion que l'expérience vérifie, quel que soit le nomb lames.

Réfraction atmosphérique. — L'atmosphère terrestre est posée de couches concentriques de densité décroissante à par



Fig. 265

sol. Un rayon lumineux venant d'un astre E éprouvera do série de déviations qui le rapprocheront graduellement normale, de sorte que l'astre, qui sera vu dans la directio dernier élément A de la trajectoire lumineuse $abc...$, par relevé au-dessus de l'horizon en E'.

En admettant une constitution spéciale de l'atmosphère (2 en s'aidant de l'observation, on a pu établir une formule et d des tables qui permettent de corriger l'effet de la réfraction

ctitude suffisante pour les points qui ne sont pas trop rap-
de l'horizon.

III. — Prisme.

Réfraction à travers un prisme. — *Définitions.* — que, un *prisme* est un milieu réfringent, limité par deux anes inclinées l'une sur l'autre d'un certain angle que l'on l'*angle* du prisme. La droite suivant laquelle elles se cou- l'*arête* ; à cette arête est opposée une troisième face qui est du prisme. Une section perpendiculaire à l'arête est dite *principale.*

ules. — Considérons un rayon se propageant dans une sec- ncipale : il entre en I et sort en I′, dévié vers la base. Si



Fig. 266

pelons toujours i et i' les angles dans l'air, r et r' les angles milieu réfringent, et si nous désignons par A l'angle du et par D la *déviation* totale, somme des déviations $(i-r)$ à et $(i'-r')$ à la sortie, nous avons les quatre équations

$$\left.\begin{aligned} D &= i+i'-(r+r'), \\ A &= r+r', \\ \sin i &= n \sin r, \\ \sin i' &= n \sin r', \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

éliminant r, i' et r', on tirera une relation entre D, n, A et i :

la déviation D peut donc être regardée comme une fonction des trois quantités n, A et i.

Influence de l'indice. — L'expérience montre en effet que, toutes choses égales d'ailleurs, la déviation dépend de l'indice de la substance. Si l'on envoie un même faisceau de lumière sur plusieurs prismes de même angle, mais de matières différentes, accolés de façon à figurer un prisme unique (*polyprisme*), et qui reçoivent par conséquent tous la lumière sous le même angle, on constate que chaque prisme produit une déviation particulière, d'autant plus considérable que l'indice est plus élevé.



Fig. 267

Influence de l'angle. — L'influence de l'angle se met aisément en évidence à l'aide du *prisme à angle variable*, représenté ci-contre : c'est, comme l'on voit, une sorte d'auge, formée par deux plaques métalliques verticales fixes et deux lames de verre susceptibles de recevoir différentes inclinaisons : ces lames constituent les faces d'entrée et de sortie d'un prisme creux, dans lequel on mettra de l'eau ou tout autre liquide réfringent. Avec un liquide déterminé, l'incidence restant constante, la déviation augmente quand on fait croître l'angle du prisme depuis zéro jusqu'à la valeur pour laquelle se manifeste la réflexion totale.



Fig. 268

Cherchons la valeur de l'angle A correspondant à l'apparition de ce dernier phénomène.

Condition d'émergence. — Pour qu'un rayon RI, tombant sur un prisme de substance plus réfringente que le milieu ambiant, donne

e à un rayon émergent I'R', il faut que le rayon intérieur II' ɔris dans le cône MIM' d'axe IP normal à AC et d'angle λ. part, le rayon II' est nécessairement dans le cône DID', normal à AB et d'angle λ, cône qui comprend tous les 'éfractés provenant des rayons qui peuvent tomber en I. :ondition d'émergence est que le rayon II' soit dans la partie e aux deux cônes, qui doivent d'abord se couper pour que rayon puisse sortir.

ıs bornant aux rayons situés dans la section principale pas-

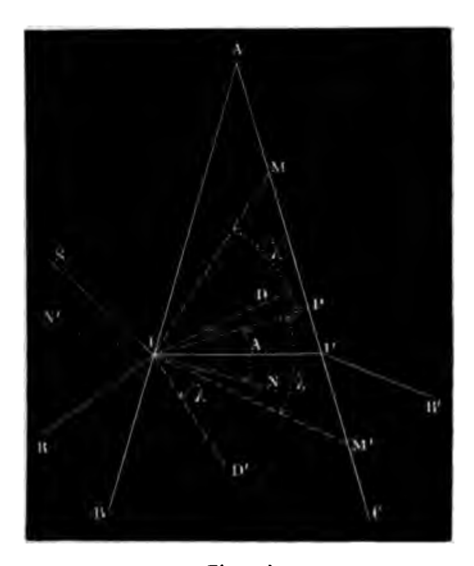


Fig. 269

I, nous dirons que le rayon intérieur doit être contenu ıgle M'ID. Mais cet angle est égal à M'IP + PID, c'est-à- +(λ − A),

$$M'ID = 2\lambda - A.$$

· 2λ, il n'y aura pas d'émergence possible. Ainsi, un prisme (λ = 42°) d'angle supérieur à 84° ne laissera sortir aucun .r sa seconde face, qui réfléchira totalement.

2λ, le prisme livre passage aux rayons compris à l'inci- .tre BI, qui donne naissance à ID, et SI, qui donne nais- M'. Les rayons incidents situés dans l'angle BIS = x pas- x qui sont situés dans l'angle AIS = $\pi - x$ sont arrêtés et

renvoyés par réflexion totale. Or la direction SI, qui limite avec IB l'*angle de passage* α, fait avec la normale N'I un angle i_1 défini par la relation

$$\sin i_1 = n \sin(\lambda - A).$$

On a donc

$A=0$	$i_1=\frac{\pi}{2}$	$\alpha=\pi$	tous les rayons sont transmis.
$A<\lambda$	$i_1<\frac{\pi}{2}$	$\alpha<\pi$	l'angle de passage est obtus.
$A=\lambda$	$i_1=0$	$\alpha=\frac{\pi}{2}$	— — droit.
$A>\lambda$	$i_1<0$	$\alpha<\frac{\pi}{2}$	— — aigu.
$A=2\lambda$	$i_1=-\frac{\pi}{2}$	$\alpha=0$	aucun rayon ne passe.

Influence de l'incidence. Déviation minimum. — Enfin, en faisant tourner à l'aide d'un bouton b un prisme P autour d'un axe parallèle à son arête, on constate que la déviation dépend de l'incidence. Si le rayon incident, d'abord couché sur BI (fig. 269), marche vers l'arête jusqu'en SI, la déviation diminue, passe par un minimum pour lequel la trajectoire de la lumière est symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle A, puis elle croît jusqu'à ce que l'émergence cesse de se produire.



Fig. 270

Ce fait est d'accord avec les équations (1). Quand i diminue, r diminue d'après la relation $\sin i = n \sin r$, par suite r' augmente puisque $r+r'=A$, et par conséquent i' augmente aussi. On ne voit donc pas immédiatement comment la déviation $D=i+i'-A$ varie. Mais, à cause de la symétrie des équations en i et i', symétrie conforme au principe du retour inverse des rayons, la déviation prend des valeurs égales pour deux valeurs différentes de i de part et d'autre de l'angle I défini par la condition $i=i'$; donc elle présente pour I un maximum ou un minimum. On verra aisément que c'est un minimum en comparant la déviation pour $i=I$ à la déviation correspondant à une autre incidence, par exemple $i=0$.

On peut d'ailleurs appliquer la méthode ordinaire de recherche des maxima et des minima. Partant de l'expression de la déviation, telle qu'elle résulte des deux premières équations (1),

$$D = i + i' - A,$$

on prendra la dérivée de cette expression par rapport à i,

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di},$$

ou, en remplaçant $\frac{di'}{di}$ par sa valeur déduite de la différentiation des trois dernières équations ([1]),

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \frac{\cos r'}{\cos r};$$

et l'on égalera cette dérivée à zéro; ce qui donnera

$$\cos i \cos r' = \cos i' \cos r,$$

ou

$$\sqrt{1 - \sin^2 i}\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i'}{n^2}} = \sqrt{1 - \sin^2 i'}\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}},$$

ou

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\sin^2 i = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\sin^2 i',$$

ou, n^2 étant différent de 1,

$$\sin^2 i = \sin^2 i',$$

ou enfin, puisque les angles i et i' sont tous les deux aigus,

$$i = i'.$$

Ainsi D est maximum ou minimum pour

$$i = i',$$

condition qui entraîne

$$r = r' = \frac{A}{2}.$$

([1]) Cette différentiation donne $dr + dr' = 0$
$\cos i \; di = n \cos r \; dr$
$\cos i' \; di' = n \cos r' dr'$.

Mais pour $i=i'$, la dérivée seconde de D est positive, com
le reconnaîtra facilement; donc la déviation est alors minim
La valeur de ce minimum est

$$d=2i-A;$$

et cette expression, jointe à

$$2r=A,$$
$$\sin i=n\sin r,$$

montre que la déviation minimum est une quantité définie p
prisme donné, n et A étant alors déterminés ([2]).

Foyer du prisme. — Si l'on regarde un point lumineux P
vers un prisme, dans le voisinage de l'arête, généralement
voit pas ce point d'une façon nette.

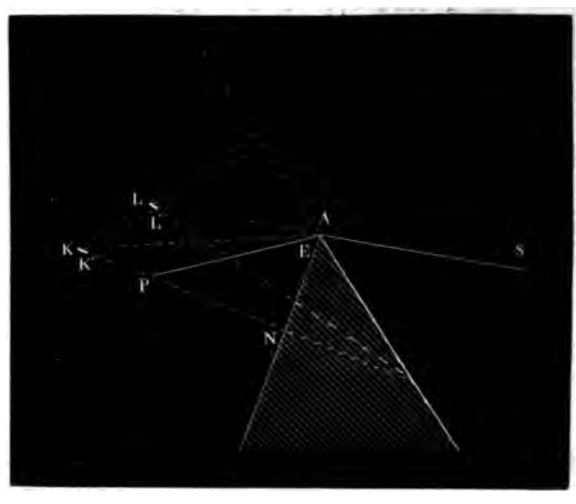


Fig. 271

En effet, les rayons([3]) qui arrivent à l'œil, même armé d'un
lunette, forment un pinceau étroit dont les droites peuvent s

([1]) Elle serait maximum dans le cas de $n<1$.

([2]) Tant qu'il y a émergence et par conséquent déviation, le minimun
nifeste. Le rayon intérieur correspondant au minimum bissèque en effet
NIP (fig. 269) et par suite l'angle DIM' (les angles PID et NIM' étant éga
les deux à $\lambda-A$), il est donc toujours compris dans l'angle DIM', si p
soit cet angle.

([3]) Ces rayons sont toujours supposés d'indice n unique et déterminé

per de deux manières, comme nous l'avons déjà indiqué pour la réfraction à travers une seule surface plane.

1° On peut les distribuer sur des éléments plans parallèles à l'arête. Les rayons situés dans l'élément plan qui se projette sur la section principale suivant PA, font tous sensiblement même angle avec la normale PN; la première réfraction les amène dans des directions qui vont toutes rencontrer PN en un même point K, tel que

$$AK = AP.n.$$

A chacun des éléments de surface, qui s'étagent de PA en PE à l'intérieur du pinceau proposé, correspond ainsi un petit triangle dont le sommet est placé sur la droite focale KK', et dont la base étroite se projette entre A et E.

Si nous considérons maintenant ces triangles comme appartenant à des cônes ayant leur axe perpendiculaire sur la deuxième face du prisme, dans le voisinage de l'arête (¹), nous voyons que chaque point de la droite KK' donne, après la deuxième réfraction, un point d'une nouvelle droite LL' définie par la relation

$$AL = AK.\frac{1}{n} = AP.$$

Les rayons qui pénètrent dans l'œil à leur sortie du prisme vont donc, par leurs prolongements, rencontrer tous une première droite focale LL', perpendiculaire à l'arête et située à la même distance de celle-ci que le point lumineux (²).

2° On peut répartir les rayons en petits faisceaux perpendiculaires à l'arête, tels que PAE (fig. 272) (³). Nous savons qu'un faisceau de cette nature, après avoir traversé la première face, converge virtuellement vers un point Q dont la distance à cette face est

$$QA = PA.n\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}.$$

(¹) Le pinceau est supposé assez étroit pour que l'on puisse faire abstraction de la distance des différents points E à l'arête, ainsi que de l'épaisseur du prisme.

(²) Cette droite différera très peu de LL', image de KK' en lumière parallèle.

(³) Ces faisceaux sont situés, soit dans la section principale menée par le point P (c'est le faisceau PAE), soit dans des plans peu inclinés sur cette section principale.

De même, les prolongements des rayons émergents concourront en un point R, distant de la deuxième face de

$$RA = QA . \frac{1}{n} \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'},$$

c'est-à-dire de

$$RA = PA . \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} \frac{\cos^2 r}{\cos^2 r'};$$

et ce point R sera la trace d'une deuxième droite focale parallèle à l'arête et située à une distance de celle-ci variable avec l'incidence.

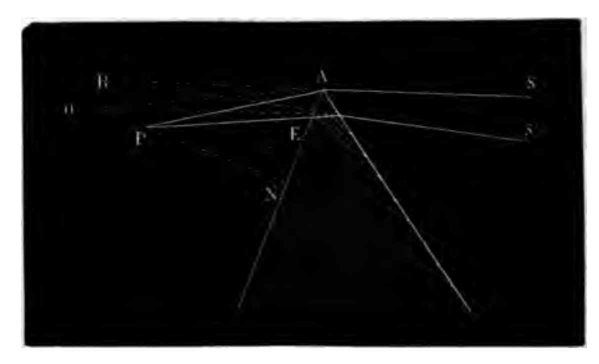


Fig. 272

Les deux droites focales ne se couperont donc pas en général : les rayons ne convergeront pas vers un foyer unique ; le pinceau se rétrécira simplement dans la région comprise entre les deux droites, et l'œil ne verra qu'une tache lumineuse de forme et de situation indécises. Mais si $i = i'$ et par suite $r = r'$, les deux droites se coupent : alors, c'est-à-dire dans le cas de la déviation minimum, il y a un véritable foyer situé à la même distance de l'arête que le point lumineux.

Réfraction dans une direction oblique à la section principale [1]. — La marche de la lumière en dehors de la section principale est définie par les deux théorèmes suivants :

1° *Le rayon émergent fait avec la section principale le même angle que le rayon incident.*

[1] Voir Cornu, *Annales de l'École normale*, (2), I, 231 ; 1872.

roposition est en quelque sorte évidente si l'on applique la ction d'Huygens (442) à un point I de l'arête. En effet, au ù le rayon incident prolongé perce la sphère de rayon 1 ; le plan tangent à la sphère; ce plan coupe la face d'entrée une droite qui rencontre l'arête en un point K. Par cette nenons à la sphère de rayon $\frac{1}{n}$ un plan tangent qui définit 1 réfracté et qui coupe la deuxième face suivant une droite en K et par laquelle nous mènerons un plan tangent à la de rayon 1 pour avoir le rayon émergent. Le rayon incident yon réfracté sont donc définis par deux plans tangents à la phère de rayon 1 et passant tous les deux par le même point K, le également inclinés sur l'arête qui joint le centre I de la au point K. L'angle θ de ces plans avec l'arête est l'angle ons avec la section principale.

s projections des rayons sur la section principale obéissent à le Descartes, le rapport des sinus étant égal non à l'indice n la quantité $\sqrt{n^2+(n^2-1)\operatorname{tg}^2\theta}$.

étant l'arête du prisme, soient SI le rayon incident, IR le

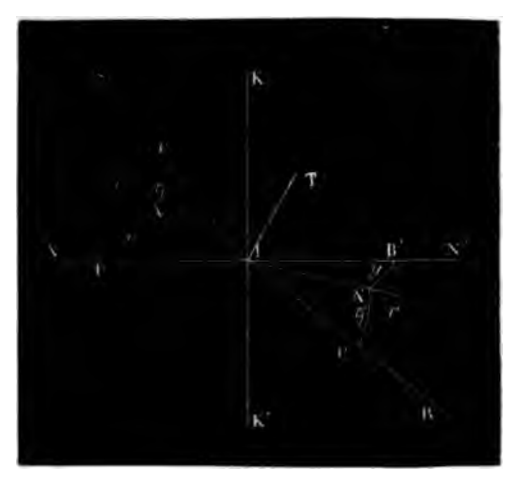


Fig. 273

éfracté intérieurement, IN la normale en I à la face d'entrée : s droites sont contenues dans un même plan qui fait un anvec la section principale du prisme et dont la trace sur la

face d'entrée est TT′. Les rayons SI et IR se projettent sur la section principale en AI et IA′; et si nous décrivons de I comme centre une sphère de rayon égal à l'unité, nous avons en ABC, A′B′C′ deux triangles sphériques rectangles dans lesquels BC et B′C′ sont les angles d'incidence et de réfraction i et r; AC et A′C′ sont les angles θ et θ' du rayon incident et du rayon réfracté avec la section principale; AB et A′B′ sont les angles x et y que les projections IA et IA′ des mêmes rayons sur la section principale font avec la normale IN; enfin $B = B' = \Theta$.

La relation $\sin b = \sin a \sin B$ donne par conséquent

$$\sin\theta = \sin i \sin\Theta,$$
$$\sin\theta' = \sin r \sin\Theta,$$

d'où

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = n.$$

De même

$$\sin x = \sin i \sin X,$$
$$\sin y = \sin r \sin Y,$$

et par suite

$$\frac{\sin x}{\sin y} = n\,\frac{\sin X}{\sin Y}.$$

Mais de la relation $\cos B = \cos b \sin C$ on déduit

$$\sin X = \frac{\cos\Theta}{\cos\theta},$$

$$\sin Y = \frac{\cos\Theta}{\cos\theta'},$$

et par conséquent

$$\frac{\sin X}{\sin Y} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\theta}.$$

On a donc

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{n^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \sin^2\theta},$$
$$= \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\,\mathrm{tg}^2\theta}.$$

IV. — Lentilles.

427. Réfraction à travers une surface sphérique de faible ouverture. — Les lentilles étant habituellement limitées par des calottes sphériques de faible ouverture, nous étudierons la réfraction de la lumière par une petite calotte sphérique MN, séparant deux milieux d'indices absolus n_1 et n_2. Supposons d'abord le point lumineux P_1 placé sur l'axe OA de la calotte sphérique, dont O est le centre de courbure et A le pôle ou sommet. Prenons pour plan de la figure une *section* méridienne ou *principale* quelconque.

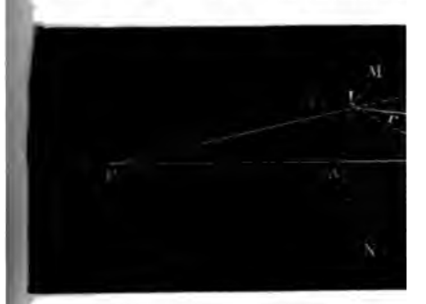


Fig. 274

Un rayon incident, tel que P_1I, donnera naissance à un rayon réfracté IP_2; et puisque, par hypothèse, les angles ω, α_1, α_2, i et r sont petits, nous pourrons les confondre soit avec leur sinus, soit avec leur tangente. Nous prendrons donc la formule de Képler

$$n_1 i = n_2 r;$$

et, comme $i = \omega + \alpha_1$ et $r = \omega - \alpha_2$, en posant $AP_1 = p_1$, $AP_2 = p_2$, $AO = R$ et $AI = h$, nous aurons

$$i = \frac{h}{R} + \frac{h}{p_1},$$

$$r = \frac{h}{R} - \frac{h}{p_2};$$

d'où nous tirerons

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \qquad (1)$$

p_2 sera positif lorsque la lumière convergera vers un p
dans le deuxième milieu ([2]). Quant au signe de R, il e
défini, le point O étant à lui-même sa propre image. A
le cas considéré, si le point lumineux est en O, $p_1 = - R$, l
aussi en O, $p_2 = R$; par suite, le premier membre est $\frac{n_2 -}{}$
que le second membre soit égal au premier, R doit
compté positivement ([3]).

L'équation (1) est tout à fait semblable à celle que n
établie pour les miroirs sphériques ([4]) et elle se disc
même. Nous noterons seulement les valeurs corresp

([1]) Nous nous conformons ainsi au principe du retour inverse des

([2]) En d'autres termes, chacune de ces grandeurs sera positive
suivant que le point correspondant sera réel ou virtuel.

([3]) Dans le cas où la calotte sphérique tourne sa concavité vers le
neux réel situé dans le premier milieu, n_2 étant toujours supposé
que n_1, le point de concours des rayons réfractés est virtuel et situé
mier milieu, p_2 est donc négatif : désignons-le par $-\bar{p}_2$, en appela
leur absolue de la distance AP_2. Le premier membre de l'équatio
$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{\bar{p}_2}$. Si P_1 est en O, $p_2 = R$, $\bar{p}_2 = R$, le premier membre devi
R doit donc être compté négativement dans la formule (1). Par
$\bar{R}$ étant la valeur absolue du rayon, on aura

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{\bar{p}_2} = - \frac{n_2 - n_1}{\bar{R}}.$$

([4]) Quand la surface de séparation des deux milieux est plane, l

$p_1 = \infty$ et $p_2 = \infty$: dans le premier cas, les rayons incidents sont parallèles et vont après réfraction converger en un point que l'on appelle le *deuxième foyer principal* et dont la distance au point A (comptée positivement vers le deuxième milieu) est

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1};$$

dans le deuxième cas, les rayons émergents étant parallèles, les rayons incidents émanent d'un point que l'on appelle le *premier foyer principal* et dont la distance au point A (comptée positivement vers le premier milieu) est

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \text{ [1]}.$$

On remarquera que

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

et que

$$f_2 - f_1 = R.$$

Si l'on introduit ces distances focales, la formule (1) devient

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1, \qquad (2)$$

et elle s'étend à tous les cas, avec la convention faite précédemment sur les signes.

La même forme de relation subsiste si le centre O est pris pour origine. Soient en effet f'_1, p'_1, f'_2, p'_2, les distances comptées à partir de ce point, on a

$$f_1 = f'_1 - R, \qquad p_1 = p'_1 - R, \qquad f_2 = f'_2 + R, \qquad p_2 = p'_2 + R,$$

et par suite

$$\frac{f'_1 - R}{p'_1 - R} + \frac{f'_2 + R}{p'_2 + R} = 1,$$

[1] Dans le cas où R est négatif, f_1 et f_2 sont négatifs : les deux foyers sont virtuels; le deuxième foyer est situé dans le premier milieu à une distance de la surface égale à $\frac{n_2 \overline{R}}{n_2 - n_1}$, le premier foyer est situé dans le deuxième milieu à une distance de la surface égale à $\frac{n_1 \overline{R}}{n_2 - n_1}$.

ou, comme on le voit aisément en remarquant que $f'_1 - f'_2 =$ l

$$\frac{f'_1}{p'_1}+\frac{f'_2}{p'_2}=1.$$

Le point O, comme le point A, est à lui-même son propre conj
La forme (2) persiste si les distances f et p d'une part, f' et p' d
part, sont comptées à partir de deux points conjugués quelconq
et Q_2, tels par conséquent que $\frac{f_1}{q_1}+\frac{f_2}{q_2}=1$. Si en effet on appell
p''_1 les distances comptées à partir de Q_1 positivement dans l
d'où vient la lumière dans le premier milieu et de même
les distances comptées à partir de Q_2 positivement dans le
va la lumière dans le deuxième milieu, on a

$$f_1=f''_1+q_1,\qquad p_1=p''_1+q_1,\qquad f_2=f''_2+q_2,\qquad p_2=p''_2$$

et, en substituant dans la relation (2), on trouve facileme

$$\frac{f''_1}{p''_1}+\frac{f''_2}{p''_2}=1.$$

Si l'on prend pour origine les deux foyers F_1 et F_2, et si l'on d
par ϖ_1 la distance F_1P_1 comptée positivement du côté d'où
la lumière et par ϖ_2 la distance F_2P_2 comptée positivement d
où va la lumière,

$$p_1=\varpi_1+f_1,\qquad p_2=\varpi_2+f_2,$$

et l'on a la formule de Newton

$$\varpi_1\varpi = f_1 f_2. \qquad (3$$

L'analogie avec les miroirs sphériques est frappante. Le
mules que nous venons d'établir s'appliquent aux miroirs si
fait $n_1 = 1$ et $n_2 = -1$; en effet *la réflexion peut être con*
comme une réfraction avec l'indice -1.

Des raisonnements tout à fait analogues à ceux que nous
faits à propos des miroirs montreront que les mêmes formul
viennent aux points peu écartés de l'axe, et que par suite l
d'une petite droite perpendiculaire à l'axe est elle-même une
droite perpendiculaire à l'axe.

On déterminera aisément cette image en construisant le conjugué Q_2 d'un point Q_1 pris hors de l'axe, par l'intersection de l'axe secondaire OQ_1 relatif à ce point (cet axe secondaire n'est autre que le rayon de la sphère OA passant par ce point) avec le rayon réfracté provenant soit du rayon incident Q_1B parallèle à l'axe, soit du rayon incident Q_1C passant par le premier foyer F_1.

Si donc l'objet est plan, l'image sera semblable à l'objet et semblablement placée, le point O étant le centre de similitude. On voit

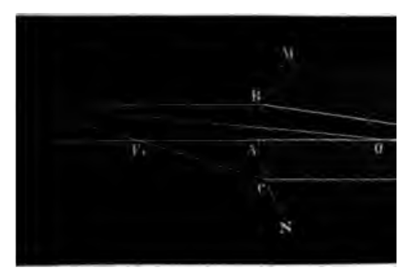


Fig. 275

immédiatement sur la figure que $-I$ étant l'image P_2Q_2 de l'objet O figuré ici par P_1Q_1, on a

$$\frac{-I}{-I+O}=\frac{f_1}{p_1},$$

$$\frac{O}{-I+O}=\frac{f_2}{p_2},$$

d'où

$$\frac{-I}{O}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{f_1}{f_2} \text{ (}^1\text{)}; \tag{4}$$

et aussi

$$\frac{-I}{O}=\frac{f_1}{\varpi_1}=\frac{\varpi_2}{f_2} \text{ (}^2\text{)}. \tag{5}$$

(1) Des deux relations qui précèdent on tirerait, si on ne l'avait précédemment établie, la formule (2)

$$\frac{f_1}{p_1}+\frac{f_2}{p_2}=1.$$

(2) De cette dernière égalité on conclurait la formule (3)

$$\varpi_1\varpi_2=f_1f_2.$$

$$n_1 O x_1 = n_2 I x_2 \text{ (1)}.$$

Toutes ces formules sont générales (2).

L'analogie avec les miroirs nous dispense d'entrer da
amples détails sur cette question.

428. Réfraction à travers un système de s sphériques centrées. — *Conservation de l'homocentrici* maintenant une succession de milieux différents, **séparés** l autres par des surfaces sphériques de faible ouverture ay leur centre et leur pôle sur une même droite, qui sera l'*axe* du système : les rayons qui partent d'un point P_1, situé su très près de l'axe) dans le premier milieu, et qui après la réfraction vont converger réellement ou virtuellement en P_2, se présenteront à la deuxième réfraction comme s'ils de ce point P_2 et seront par conséquent amenés à passe un nouveau point réel ou virtuel P_3, et ainsi de suite dernière réfraction, de sorte que les rayons originairen d'un même point, ou *homocentriques*, formeront enc toutes ces réfractions en nombre quelconque un faisce centrique.

On aura donc à considérer par rapport à un système d sphériques centrées, comme par rapport à une seule su points conjugués et des plans conjugués, particulièren

(1) Cette loi, due à L[illegible], a été remise en lumière par M. [illegible]

foyers et les deux plans focaux correspondants : nous appelons toujours deuxième foyer l'image d'un point situé à l'infini dans le premier milieu, et premier foyer le point du premier milieu dont l'image est située à l'infini dans le dernier milieu. Le système est *convergent* ou *divergent* suivant que des rayons incidents parallèles vont à l'émergence aboutir à un foyer réel ou à un foyer virtuel (¹).

Lentilles infiniment minces. — Avant d'étudier plus en détail les propriétés d'un système quelconque de surfaces sphériques centrées, nous examinerons en particulier le cas de deux surfaces limitant dans le milieu 2 une lentille dont nous supposerons l'épaisseur négligeable relativement aux rayons de courbure des faces.

La première réfraction est exprimée par l'équation

$$\frac{n_1}{p_1}+\frac{n_2}{p_2}=\frac{n_2-n_1}{R}.$$

La deuxième sera représentée par une équation toute semblable dans laquelle p_2 et R′ seront pris négativement, la distance du point lumineux P_2 au pôle A′ de la deuxième surface étant comptée positivement de A′ vers le milieu 2, et le rayon R′ de la deuxième surface étant regardé comme positif quand cette surface est convexe du côté du milieu 3,

$$-\frac{n_2}{p_2}+\frac{n_3}{p_3}=-\frac{n_3-n_2}{R'}.$$

On en tire

$$\frac{n_1}{p_1}+\frac{n_3}{p_3}=\frac{n_2-n_1}{R}+\frac{n_2-n_3}{R'}, \qquad (1)'$$

formule analogue à celle qui règle la réfraction à travers une seule surface sphérique.

Si l'on y fait $p_1=\infty$, p_3 devient la deuxième distance focale f', comptée positivement vers le troisième milieu ; ce qui donne

$$\frac{n_3}{f'}=\frac{n_2-n_1}{R}+\frac{n_2-n_3}{R'}.$$

(¹) Les deux foyers n'étant pas nécessairement de même nature, le système peut être convergent d'un côté et divergent de l'autre (oculaire négatif d'Huygens).

La première distance focale f, comptée vers le premier milieu, et correspondant à $p_3=\infty$, est déterminée par la relation

$$\frac{n_1}{f}=\frac{n_2-n_1}{R}+\frac{n_2-n_3}{R'}.$$

Les distances focales f et f' satisfont donc encore à la relation

$$\frac{f}{f'}=\frac{n_1}{n_3};$$

et si on les introduit dans la formule (1)', en posant $p_1=p$ et $p_3=p'$, on retrouvera l'équation

$$\frac{f}{p}+\frac{f'}{p'}=1, \qquad (2)'$$

équation qui s'étend à tous les cas, et qui se conserve avec un couple de points conjugués quelconques pour origines; tandis que, si l'on prend respectivement pour origine les deux foyers, on retombe sur la formule de Newton

$$\varpi\varpi'=ff'. \qquad (3)'$$

L'image d'une petite droite perpendiculaire à l'axe, image qui pour un système centré quelconque est une petite droite perpendiculaire à l'axe et conjuguée de la droite-objet, se construit immédiatement au moyen des foyers, ainsi que le montrent les figures ci-contre (lentilles convergentes et lentilles divergentes), qui donnent encore

$$\frac{-I}{O}=\frac{p'}{p}\cdot\frac{f'}{f}. \qquad (4)'$$

On a d'ailleurs

$$n_1 O_1 x_1 = n_2 O_2 x_2 = n_3 O_3 x_3,$$

ou

$$n_1 O x_1 = n_3 I x_3. \qquad (6)'$$

Si l'on mène la droite QQ' qui coupe en N l'axe principal PP', on trouve

$$\frac{FN}{BQ'}=\frac{AC}{AB}=\frac{CF'}{BQ'},$$

d'où

$$FN=CF'.$$

Donc le point N reste à une distance invariable du point fixe F; par conséquent il est fixe lui-même. Le rayon QN se prolongeant

ne droite suivant NQ′ est le *rayon sans déviation* ou l'*axe se-*
re du point Q, analogue au rayon passant par le centre d'une
e sphérique unique ; et l'image est semblable à l'objet par

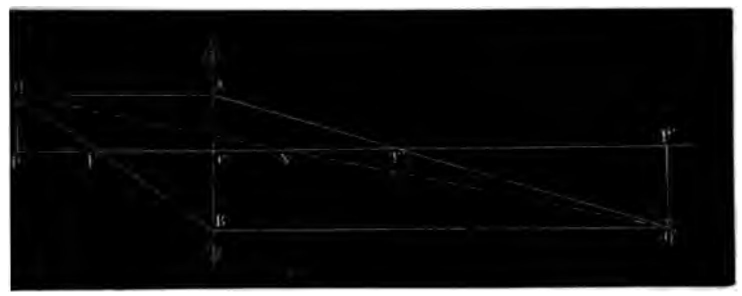


Fig. 276

t au point N, qui représente la superposition des deux points



Fig. 277

x d'une lentille épaisse. La relation précédente montre que
ıt nodal double est situé sur l'axe principal du côté du foyer
éloigné, à une distance de la lentille égale à la différence des
istances focales.

illes infiniment minces dans l'air. — Un cas particulièrement
sant est celui où la lentille plonge dans l'air : alors $n_1 = n_3 = 1$
$= n$, n désignant l'indice de la matière constitutive de la len-
latívement à l'air.

deux distances focales sont égales

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

l'ailleurs à distinguer les lentilles convergentes qui peuvent
ter l'une des trois formes : biconvexe (A), plan-convexe (B),

concave-convexe ou ménisque convergent (C); et les lent vergentes : biconcave (D), plan-concave (E), convexe-con ménisque divergent (F). Quand l'épaisseur est très faibl

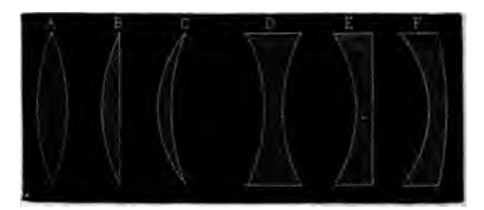


Fig. 278

notre hypothèse actuelle, on peut dire que les lentill vergentes sont plus épaisses au centre que sur les bords, traire ayant lieu pour les lentilles divergentes, conformém formule précédente ([1]).

Les deux distances focales étant égales, le point nodal d confond avec le centre de figure de la lentille.

Il est d'ailleurs facile d'établir directement que tout ra sant par le centre de figure d'une lentille infiniment minc dans l'air la traverse sans déviation.

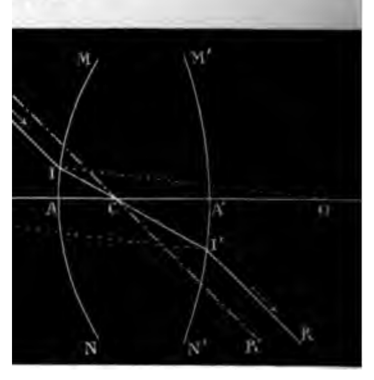


Fig. 279

Soit en effet un rayon incident quelconque SI renconti lentille épaisse située dans l'air (ou plus généralement sur ses deux faces par un même milieu), ce rayon traverse tille suivant II'. Si le plan tangent en I' est parallèle au pl

([1]) Si l'épaisseur est un peu forte, la règle précédente peut se trouver ainsi que nous le verrons plus loin.

gent en I, le rayon RI' émergera parallèlement au rayon incident, comme ayant traversé une lame à faces parallèles. Mais alors les normales OI et O'I' au point d'incidence et au point d'émergence sont parallèles entre elles, et l'on a

$$\frac{CO}{CO'} = \frac{R}{R'};$$

par suite, le point C est fixe. Ainsi, quand le rayon émergent est parallèle au rayon incident, le rayon intérieur passe par un point fixe, que l'on appelle le *centre optique*, et dont les distances aux deux sommets sont proportionnelles aux rayons de courbure des faces. On a en effet

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{R - CO}{R' - CO'} = \frac{R}{R'} \text{(¹)}.$$

Prolongeons le rayon SI jusqu'à sa rencontre avec l'axe principal en n. Comme les deux droites $X'n$ et Sn représentent deux rayons

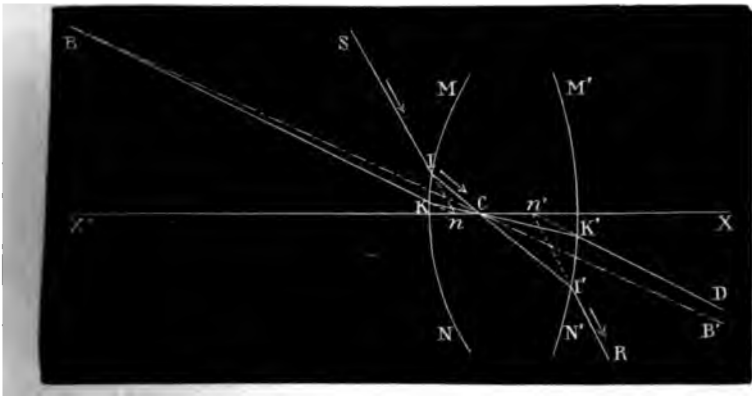


Fig. 280

émanés du point virtuel n et amenés par la première réfraction à converger en C, on voit que n et C sont conjugués par rapport à la première face; donc le point n est également fixe. Il en est de même de n', point où le rayon émergent RI' converge avec l'axe. Par con-

(¹) Le centre optique est donc à l'intérieur d'une lentille biconvexe ou biconcave, au sommet de la face courbe d'une lentille plan-convexe ou plan-concave, à l'extérieur d'un ménisque et du côté de la face qui a le plus petit rayon.

séquent, *tout rayon incident qui passe par le point n donne na sance à un rayon émergent parallèle passant par n'.* Ces de points n et n' sont dits les *points nodaux* de la lentille. Ce so les images du centre optique dans l'une et l'autre face de lentille : on les mettra donc aisément en place d'après les règ de la réfraction à travers une calotte sphérique de faible ouvertu

Quand la lentille est infiniment mince, les deux points noda et le centre optique se confondent avec le centre de figure de lentille, qui se trouve être ainsi le point par lequel passent les rayo sans déviation et conséquemment le centre de similitude ent l'image et l'objet.

Les formules relatives au cas où les deux milieux extrêmes sc quelconques deviennent ici

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right). \qquad (1)''$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}, \qquad (2)''$$

et

$$\varpi\varpi'=f^2. \qquad (3)''$$

L'analogie entre les lentilles et les miroirs est intime, une le tille convergente se comportant comme un miroir concave, un lentille divergente comme un miroir convexe, de même distan focale [1].

La *puissance* se définit, ainsi que pour un miroir, l'inverse de l distance focale,

$$P=\frac{1}{f}.$$

L'unité de puissance, ou *dioptrie*, est la puissance d'une lentill dont la distance focale principale est égale à 1 mètre [2].

[1] Ne pas oublier que la lumière réfractée par une lentille continue sa marche en avant, tandis que la lumière réfléchie par un miroir revient en arrière. Il en résulte qu'ici, contrairement à ce qui se passe avec les miroirs, l'image et l'objet se déplacent toujours dans le même sens.

[2] La substitution du système métrique au système duodécimal dans l'évaluation des distances focales, exprimées jusqu'alors en pouces, a été proposée par M. Javal au Congrès d'ophtalmologie de Paris en 1867 et adoptée par le Congrès de Berlin en 1875. La *dioptrie* a été indiquée comme unité de puissance par M. Monoyer.

Si l'on accole deux lentilles infiniment minces, on a

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}=\frac{1}{f},$$

$$-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f'},$$

d'où

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'};$$

la puissance de l'ensemble est égale à la somme des puissances individuelles. En général, la puissance du système formé par plusieurs lentilles infiniment minces en contact est égale à la somme algébrique des puissances de ces lentilles.

Propriétés générales d'un système centré quelconque. — Dans le cas d'une surface sphérique de faible ouverture, le rayon incident et le rayon émergent peuvent être considérés comme coupant en un même point le plan tangent au sommet de la calotte sphérique donnée, puisque la partie utile de la calotte se confond avec ce plan.

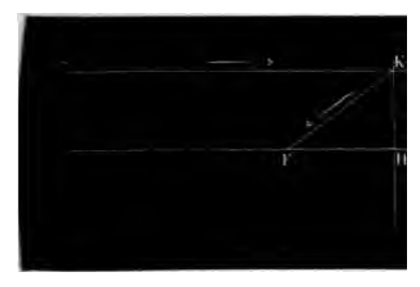
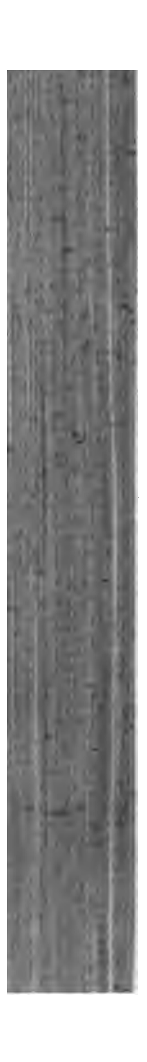


Fig. 281

Gauss ([1]) a montré que dans un système quelconque de surfaces sphériques centrées, de faible ouverture et rencontrées par des rayons peu inclinés sur l'axe principal, il existe deux plans conjugués que le rayon incident et le rayon émergent rencontrent toujours à la même hauteur : ce sont les *plans principaux* du système; et l'on appelle premier plan principal celui qui correspond au rayon incident, deuxième plan principal celui qui se rapporte au rayon

([1]) Gauss, *Dioptrische Untersuchungen*, dans *Abhand. d. kön. Gesells. d. Wiss. zu Göttingen*, I; 1838-43.



Mais il en est de même de deux points quelconques situés
côté de l'axe et à la même hauteur dans les deux plans c
perpendiculaires à l'axe, KH, K'H'. Ces deux plans sont
que l'image d'une droite KH comprise dans l'un de ce
une droite K'H' de même grandeur et de même sens com
l'autre. Les points H et H' où les plans principaux cou
se nomment les *points principaux*.

Avec les deux foyers ils constituent les *points cardinaux* d
Un système est complètement défini par ses points car

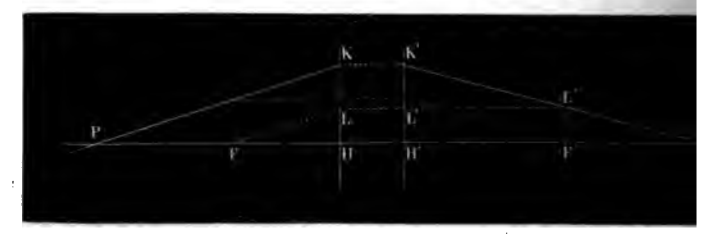


Fig. 282

En effet, connaissant ces quatre points, les deux foyer
les deux points principaux H, H', on peut construire le
d'un rayon incident quelconque PK. Ce rayon perçan
premier plan principal, le point K' situé à la même hau
le deuxième plan principal est un point du conjugué. P
un deuxième point, on mènera par le premier foyer un
parallèle au rayon incident et qui, devenant, après réfra
rallèle à l'axe, coupe le deuxième plan focal en E', leq

deuxième point cherché, car les deux rayons parallèles PK et FL doivent à la sortie passer par un même point du deuxième plan focal. On pourrait aussi (en renversant la construction) déterminer la direction du rayon émergent.

De toutes manières, on saura trouver le conjugué P′ d'un point P pris sur l'axe.

Si le point Q est situé hors de l'axe, on construira aisément le conjugué Q′ à l'aide du rayon QK parallèle à l'axe, qui devient K′F′, et du rayon passant par le premier foyer, qui devient LL′.

On aura ainsi l'image P′Q′ de la droite PQ.

D'ailleurs, en considérant les triangles QKL et FHL d'une part et les triangles Q′L′K′ et F′H′K′ d'autre part; et en appelant f et p

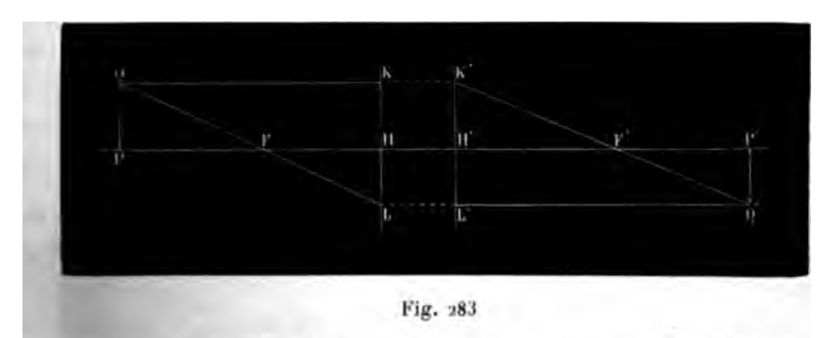


Fig. 283

les longueurs HF et HP comptées à partir du premier point principal positivement vers le premier milieu, et f' et p' les longueurs H′F′ et H′P′ comptées à partir du deuxième point principal positivement vers le dernier milieu, on retrouve les relations

$$\frac{-I}{I+O}=\frac{f}{p},$$

$$\frac{-I}{I+O}=\frac{f'}{p'},$$

d'où

$$\frac{f}{p}+\frac{f'}{p'}=1\ (^1). \qquad (11)$$

(1) Quand l'objet se déplace du premier foyer au premier plan principal, l'image, marchant dans le même sens que l'objet, va de $-\infty$ au deuxième plan principal. Il y a donc un plan où l'image et l'objet se rencontrent. M. Martin (*Ann. de chim. et de phys.*, (4), X, 426; 1867) a appelé l'attention sur ce plan, déjà signalé par Bravais (*Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIII, 498; 1835). Le

Donc, si l'on prend pour origines les deux points principaux si l'on conserve les conventions pour les signes, on retrouve formule fondamentale (II). On y arriverait de même en prenai pour origine un couple de points conjugués quelconques.

Les deux relations précédentes donnent aussi

$$\frac{-1}{0} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{f}{f'}. \qquad \text{(IV)}$$

On en tire également, ϖ et ϖ' désignant les distances FP et F'P

$$\frac{-1}{0} = \frac{f'}{\varpi} = \frac{\varpi'}{f'}, \qquad \text{(V)}$$

d'où

$$\varpi\varpi' = ff'. \qquad \text{(III)}$$

Enfin on a toujours

$$n_1 0 \alpha_1 = n_e 1 \alpha_e \qquad \text{(IV)}$$

α_1 étant l'angle que fait avec l'axe principal un rayon partant point P dans le milieu 1 d'indice n_1, α_e l'angle que fait avec même axe ce rayon arrivant au point conjugué P' dans le mili extrême d'indice n_e.

Si le rayon émergent est parallèle au rayon incident, c'est-à-di si $\alpha_e = \alpha_1$, $\frac{1}{0} = \frac{n_1}{n_e}$; et les points où le rayon incident et le rayo émergent rencontrent l'axe sont situés à des distances de F et de respectivement égales à

$$\varpi_n = -\frac{n_e}{n_1} f$$

et

$$\varpi'_n = -\frac{n_1}{n_e} f',$$

point B où le *plan de Bravais* coupe l'axe, entre F et H, ou *point symptotique* de Listing (LISTING, *Pogg. Ann.*, CXXIX, 466; 1866), étant à lui-même sa propre image, on a évidemment, si l'on désigne par $\bar{\varpi}$ et $\bar{\varpi}'$ les longueurs FB et F'B $\bar{\varpi} + \bar{\varpi}' = f + f' + \delta$, et $\bar{\varpi}\bar{\varpi}' = ff'$. Ces deux équations symétriques en $\bar{\varpi}$ et $\bar{\varpi}'$ déterminent deux points, situés à des distances respectivement égales des deux foyers, et distants l'un de l'autre de $b = \sqrt{(f + f' + \delta)^2 - 4ff'}$, la condition de réalité de ces points étant $(f + f' + \delta)^2 - 4ff' > 0$. Lorsque le système optique se réduit à une lentille infiniment mince placée dans l'air, les plans de Bravais ainsi que les plans principaux se confondent avec la surface de la lentille.

c'est-à-dire indépendantes de x (¹). Il existe donc sur l'axe principal *deux* points tels qu'à tout rayon incident passant par le premier correspond un rayon émergent parallèle passant par le deuxième. Ce sont les deux *points nodaux.*

L'existence de ces points peut d'ailleurs être établie géométriquement d'une façon très simple. Soit QE un rayon quelconque arrivant parallèlement à l'axe : il perce le premier plan principal en K, le deuxième en K' et émerge suivant K'F' en passant au deuxième foyer F'. Par le point E où QE perce le premier plan focal, menons un rayon SE parallèle à K'F' : ce rayon devra émerger aussi parallèlement à K'F', puisque tous les rayons émanant d'un même point E du premier plan focal forment à l'émergence un faisceau de rayons parallèles. Le rayon émergent L'S' sera donc parallèle au rayon incident SL (le point L' étant pris dans le deuxième plan principal à la même hauteur que le point L dans le premier). Or ces deux rayons coupent l'axe respectivement en N et N' qui sont fixes, car les triangles rectangles égaux EFN et K'H'F'



Fig. 284

(EF=K'H') d'une part, et N'F'E' et EKL (E'F'=K'L'=KL) d'autre part, donnent

$$FN = H'F' \qquad \text{et} \qquad F'N' = KE,$$

c'est-à-dire

$$-\varpi_n = f' \qquad \text{et} \qquad -\varpi_n = f,$$

ϖ_n étant la distance du premier point nodal au premier foyer

(¹) Si l'on admet la relation générale $\frac{f'}{f} = \frac{n_e}{n_1}$, on a immédiatement $\varpi_n = -f'$ et $\varpi'_n = -f$, valeurs que nous allons trouver directement ; ou, si on le préfère, la comparaison des deux systèmes de valeurs peut servir à démontrer cette relation.

(distance comptée positivement à partir du premier foyer vers l'extérieur) et ϖ'_n la distance du deuxième point nodal au deuxième foyer (distance comptée de même positivement à partir du deuxième foyer vers l'extérieur). Ainsi, deux rayons conjugués, tels que le rayon émergent soit parallèle au rayon incident, passent respectivement par deux points fixes et conjugués N et N'. On verrait aisément que deux rayons parallèles passant par ces deux points sont conjugués. Ces deux rayons conjugués parallèles se nomment les *directrices*.

On a encore

$$HN = H'N' = f' - f, \text{ (1)}$$

$$NN' = HH' :$$

la distance des deux points nodaux est égale à la distance des deux points principaux : c'est l'*interstice* δ.



Fig. 285

La figure 285 montre comment à l'aide des points nodaux on peut construire de deux manières le conjugué d'un rayon incident quelconque, en appliquant l'une ou l'autre des deux règles suivantes :

Tout rayon issu du point E *appartenant au premier plan focal émerge parallèlement à la première directrice* NE ;

Tout rayon parallèle à la deuxième directrice N'E' *rencontre le deuxième plan en* E' ;

soit que l'on trace par K' une parallèle à NE, soit que l'on joigne K'

(1) Si HH' = o, N et N' se confondent dans le point nodal double trouvé plus haut.

point E′ où la droite N′E′, menée par N′ parallèle à PK, perce le uxième plan focal.

De même, dans la construction de l'image Q′ d'un point Q, il ffira de joindre à l'un des rayons K′F′ ou LL′ la directrice N′Q′, couple QN, N′Q′ formant le rayon sans déviation.

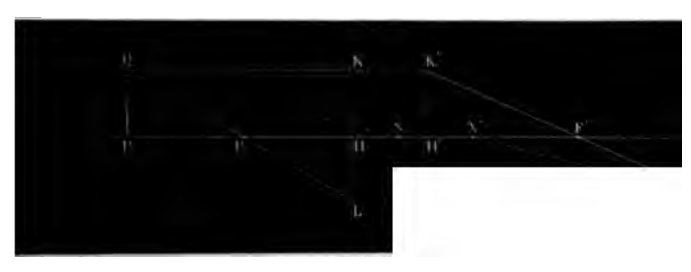


Fig. 286

Lentilles épaisses. — Appliquons ces considérations à quelques s particuliers.

Soit d'abord une lentille constituée par un milieu d'indice n_2, us une épaisseur $A_1A_2 = e$, et dont les faces A_1 et A_2, de rayons R R′, sont respectivement en conctact avec deux milieux d'indices n_1 et n_3. Nous désignerons par F_1 et F'_1 les foyers de la première urface réfringente et par F_2 et F'_2 ceux de la deuxième, en posant (430)

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}, \qquad f'_1 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1},$$

et

$$f_2 = \frac{n_2 R'}{n_2 - n_3}, \qquad f'_2 = \frac{n_3 R'}{n_2 - n_3}.$$

Un rayon SI_1, parallèle à l'axe et rencontrant en I_1 la surface de séparation des deux milieux 1 et 2, irait passer en F'_1 si le deuxième milieu s'étendait jusque-là. Mais nous supposerons l'épaisseur e plus petite que l'un et l'autre des rayons R et R′. Le rayon $I_1F'_1$ perce en un point R_2, situé entre I_1 et F'_1, la surface séparant les milieux 2 et 3, et il est rabattu en R_2F', de sorte que F′ est le deuxième foyer de la lentille. Si HK et H′K′ sont les deux plans principaux de la lentille, le rayon R_2F' rencontre le deuxième plan

principal en un point K' situé à la même hauteur que le point K où le rayon incident traverse le premier plan principal. De même le rayon $S'I_2$, réfracté d'abord suivant I_2F_2, puis suivant R_1F, vient

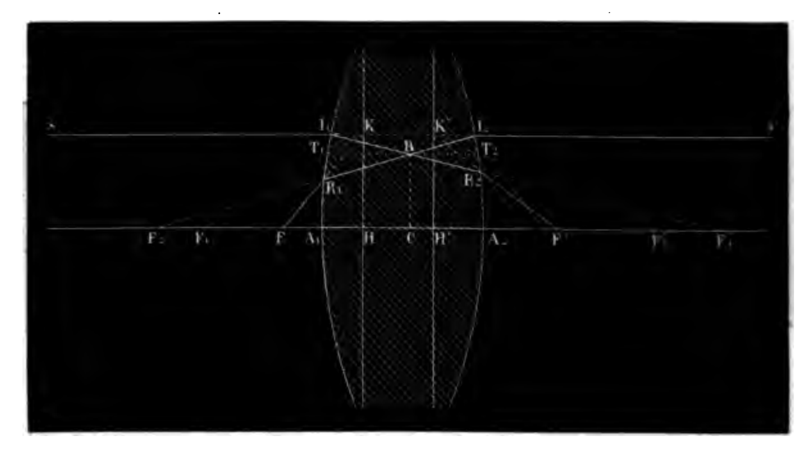


Fig. 287

aboutir au premier foyer F de la lentille, en suivant la direction KR_1 [1].

Les triangles semblables $K'H'F'$ et R_2A_2F' donnent

$$\frac{K'H'}{R_2A_2} = \frac{H'F'}{A_2F'};$$

de même les triangles $I_1A_1F'_1$ et $R_2A_2F'_1$

$$\frac{I_1A_1}{R_2A_2} = \frac{A_1F'}{A_2F'_1};$$

d'où, I_1A_1 étant égal à $K'H'$,

$$\frac{H'F'}{A_2F'} = \frac{A_1F'_1}{A_2F'_1} = \frac{f'_1}{f'_1 - e}.$$

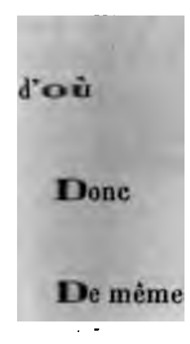
[1] Soit B le point de rencontre des rayons intérieurs I_1F' et I_2F_2; les deux rayons BI_1 et BR_1 vont, après réfraction à travers la première surface, passer tous les deux en K : K est donc l'image de B vu à travers la face A_1; de même K' est l'image de B vu à travers la face A_2. Si donc l'on mène par le point B le rayon T_1T_2 parallèle à l'axe, les deux rayons T_1F_1 et $T_2F'_2$, qui vont aboutir respectivement aux foyers F_1 et F'_2, passeront par les points K et K'. Par suite aussi, les deux droites KH et K'H' sont respectivement les images de la droite BC à travers les deux faces de la lentille.

D'ailleurs, les points F'_1 et F' étant conjugués par rapport à la face A_2, on a

$$-\frac{f_2}{A_2F'_1}+\frac{f'_2}{A_2F'}=1,$$

ou

$$-\frac{f_2}{f'_1-e}+\frac{f'_2}{A_2F'}=1,$$



d'où

$$A_2F'=\frac{(f'_1-e)f'_2}{f'_1+f_2-e}.$$

Donc

$$H'F'=f'=\frac{f'_1f'_2}{f'_1+f_2-e}.$$

De même

$$HF=f=\frac{f_1f_2}{f'_1+f_2-e}.$$

On en déduit

$$\frac{f'}{f}=\frac{n_3}{n_1}:$$

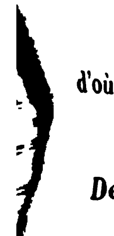
le rapport des distances focales de la lentille est égal au rapport des indices des milieux extrêmes, quelle que soit la matière de la lentille.

Cherchons la distance de chaque point principal à la surface correspondante. Nous avons

$$\frac{H'F'-A_2F'}{H'F'}=\frac{f'_1-(f'_1-e)}{f'_1},$$

ou, si nous désignons par h' la distance $H'A_2$ comptée positivement de H' à A_2 vers l'extérieur, suivant la convention générale, ou de A_2 à H' vers l'intérieur,

$$\frac{h'}{f'}=\frac{e}{f'_1},$$



d'où

$$h'=e\frac{f'}{f'_1}=e\frac{f'_2}{f'_1+f_2-e}.$$

De même

$$h=e\frac{f}{f_2}=e\frac{f_1}{f'_1+f_2-e}.$$

L'interstice HH' est

$$\delta = e - h - h'$$
$$\delta = e\frac{f'_1 - f_1 + f_2 - f'_2 - e}{f'_1 + f_2 - e}.$$

Si les deux milieux extrêmes sont l'air, $n_3 = n_1 = 1$, $n_2 = n$, deux distances focales deviennent égales, $f' = f$, et la formule éta[illegible] plus haut donne

$$f = f' = \frac{nRR'}{(n-1)[n(R+R')-(n-1)e]},$$

ou

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} - \frac{n-1}{n}\frac{e}{RR'}\right).$$

Les distances h et h' des plans principaux aux faces corres[illegible] dantes ont alors pour valeurs respectives

$$h = e\frac{R}{n(R+R')-(n-1)e},$$
$$h' = e\frac{R'}{n(R+R')-(n-1)e}:$$

elles sont proportionnelles aux rayons

$$\frac{h}{h'} = \frac{R}{R'};$$

et l'interstice $\delta = e - h - h'$ devient

$$\delta = e(n-1)\frac{R+R'-e}{n(R+R')-(n-1)e}.$$

Quand e est peu considérable par rapport à R et R', on a blement

$$\delta = e\frac{n-1}{n}.$$

Ainsi, dans une lentille ordinaire, en verre d'indice $\frac{3}{2}$, fère peu de $\frac{1}{3}e$.

D'ailleurs, la relation $f = f'$ entraîne $HN = H'N' = 0$; d[illegible] une lentille placée dans l'air les points nodaux N et N' s[illegible]

vec les points principaux H et H', et le centre optique est en trois points H, H' et O étant toujours conjugués deux à deux.



Fig. 288

constructions à effectuer pour obtenir le conjugué d'un



Fig. 289

donné ou l'image d'une petite droite perpendiculaire à l'axe

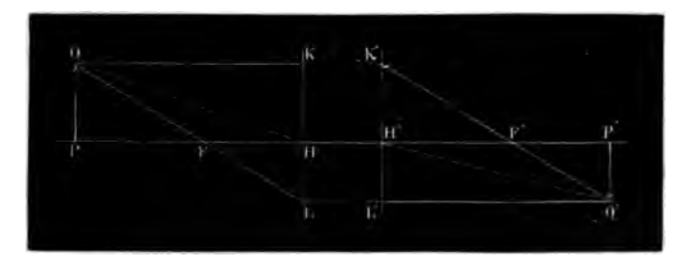


Fig. 290

plifient alors, comme le montrent les figures 288, 290 (lentilles convergentes), et 289, 291 (lentilles divergentes).

Passons en revue les diverses formes de lentilles citées précédemment.



Fig. 291

Relativement à la lentille biconvexe, les raisonnements et figures établis plus haut se rapportant à cette forme (sauf indication contraire), nous n'avons rien à ajouter.



Fig. 292

Dans une lentille plan-convexe, $R' = \infty$; par suite $f = \frac{R}{n-}$ $h = 0$: le premier plan principal est tangent au sommet de la face courbe; $h' = \frac{e}{n}$; et par conséquent $\delta = \frac{n-1}{n} e$.

La lentille biconcave a ses deux rayons négatifs; f est négatif:

$$f = -\frac{n\overline{R}\overline{R}'}{(n-1)[n(\overline{R}+\overline{R}')+(n-1)e]},$$

$-\overline{R}$ et $-\overline{R}'$ étant les rayons des deux faces; h, h' et δ sont positifs : les points H et H' sont donc à l'intérieur de la lentille et dans l'ordre normal.

Si la lentille est plan-concave, $\overline{R}'=\infty$, $f=-\frac{\overline{R}}{n-1}$, $h=0$, $h'=\frac{e}{n}$,
$=\frac{n-1}{n}e$.

Dans un ménisque convergent, on a

$$f=\frac{nR\overline{R}'}{(n-1)[n(\overline{R}'-R)+(n-1)e]},$$

pression qui sera positive si

$$n(\overline{R}'-R)+(n-1)e>0,$$

st-à-dire si

$$\overline{R}'-R+e>\frac{e}{n}.$$

Or le premier membre de cette dernière inégalité représente la

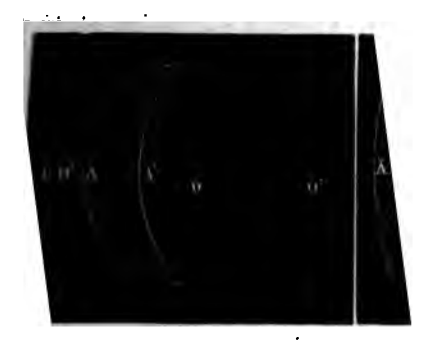


Fig. 293

ce d des centres O et O′ des deux faces

$$d=R'-R+e.$$

nc à distinguer les trois cas suivants :

la lentille est convergente.

uffit pas, on le voit, pour qu'une lentille soit convergente,
it plus mince sur les bords, ce qui a lieu quand d est >0.

e d soit $>\frac{e}{n}$.

Supposons la condition satisfaite. Les distances des points H et H′ aux faces A et A′ sont respectivement

$$h = -\frac{eR}{n(\overline{R}' - R) + (n-1)e},$$

$$h' = \frac{e\overline{R}'}{n(\overline{R}' - R) + (n-1)e},$$

et l'interstice

$$\delta = e(n-1)\frac{\overline{R}' - R + e}{n(\overline{R}' - R) + (n-1)e};$$

h est négatif, h' positif et δ positif aussi : les points H et H′ sont dans l'ordre normal, H, H′; mais H est à l'extérieur de la lentille [1].

$d = \frac{e}{n}$, on a un verre neutre.

$d < \frac{e}{n}$, le ménisque est divergent. Alors, h est positif et h' négatif : les points principaux sont à droite des surfaces correspondantes. δ est positif si d est < 0, c'est-à-dire si la lentille s'épaissit



Fig. 294.

sur les bords : dans ce cas, les points principaux sont disposés normalement, et la marche des rayons s'effectue comme dans une lentille biconcave ou plan-concave. Au contraire avec $d > 0$,

[1] D'ailleurs, les deux foyers tombent en dehors de la lentille supposée toujours d'une épaisseur moindre que l'un et l'autre rayons; en effet, f est $> h'$, puisque, R étant $> e$, nR est $> ne$, et à plus forte raison $\frac{nR}{n-1}$ est $> e$.

<0, la disposition ordinaire des plans principaux est ren-
se : H' précède H ; un rayon suit alors la marche indiquée
la figure 294.

nsi, quand l'épaisseur est faible, les deux plans principaux à l'intérieur d'une lentille biconvexe ou biconcave, l'un de ces s étant tangent à la face courbe si la deuxième face devient ie; dans un ménisque, un plan principal au moins est à l'exté- ir, du côté de la face la plus courbe.

ombinaison de deux systèmes optiques. — Soit maintenant le ème résultant de l'association de deux lentilles, ou plus géné- ment de deux systèmes 1 et 2, représentés par leurs plans prin- ux A_1, A'_1, A_2, A'_2 et leurs foyers F_1, F'_1, F_2, F'_2, les interstices des x systèmes étant respectivement δ_1 et δ_2, et l'écartement entre leuxième plan principal du premier système et le premier plan icipal du deuxième étant $A'_1A_2=e$. Le premier système est en act par sa face d'entrée avec un milieu d'indice n_1 et par sa face ortie avec un milieu d'indice n_m ; le deuxième est en contact sa face d'entrée avec le même milieu d'indice n_m et par sa face ortie avec un milieu d'indice n_e. Les éléments du système ré- int, compris entre les mêmes milieux extrêmes, se détermineront



Fig. 295

tement comme dans le cas d'une lentille unique, avec cette seule rence que les plans A_1, A_2 sont en quelque sorte dédoublés.

es triangles semblables K'H'F' et $R'_2A'_2F'$ d'une part, $I'_1A'_1F'_1$ et F'_1 d'autre part, donnent encore

$$\frac{H'F'}{A'_2F'}=\frac{f_1}{f'_1-e}.$$

D'ailleurs, les points F'_1 et F' étant conjugués par rapport au système 2,

$$A'_2F' = \frac{(f'_1 - e)f'_2}{f'_1 + f_2 - e}.$$

On a donc

$$H'F' = f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f_2 - e};$$

et de même

$$HF = f = \frac{f_1 f_2}{f'_1 + f_2 - e}.$$

On en déduit

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_e}{n_1}.$$

Ainsi se maintient dans tous les cas la loi déjà formulée : le rapport des distances focales du système résultant est égal au rapport des indices des milieux extrêmes.

D'autre part, les relations

$$h' = e\frac{f'}{f'_1} = e\frac{f'_2}{f'_1 + f_2 - e},$$

et

$$h = e\frac{f}{f_2} = e\frac{f_1}{f'_1 + f_2 - e},$$

où $h' = A'_2H'$ et $h = A_1H$, définissent la position des points principaux du système, dont les points cardinaux sont ainsi connus.

L'interstice est

$$\delta = e + \delta_1 + \delta_2 - h - h'.$$

Si les deux systèmes composants sont deux lentilles placées dans l'air, $f_1 = f'_1$, $f_2 = f'_2$; et les formules précédentes deviennent

$$f = f' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e},$$

$$h = e\frac{f_1}{f_1 + f_2 - e},$$

$$h' = e\frac{f_2}{f_1 + f_2 - e},$$

$$\delta = -\frac{e^2}{f_1 + f_2 - e} + \delta_1 + \delta_2.$$

uand le dénominateur de toutes ces expressions devient nul, points cardinaux sont rejetés à l'infini; les constructions pré- entes sont en défaut. Le système est dit *afocal.* Un faisceau in- ent parallèle reste parallèle à l'émergence; mais, en général, sa ion change (1). Supposons, pour simplifier, les deux lentilles niment minces. Soit e leur écartement. Le rapport de l'image à jet est

$$\frac{I}{O}=\frac{p_1}{p}\cdot\frac{p'}{e-p_1},$$

si l'on élimine p et p_1 à l'aide des deux équations

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}=\frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{e-p_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f_2},$$

$$\frac{I}{O}=-\frac{p'(f_1+f_2-e)+f_2(e-f_1)}{f_1 f_2}.$$

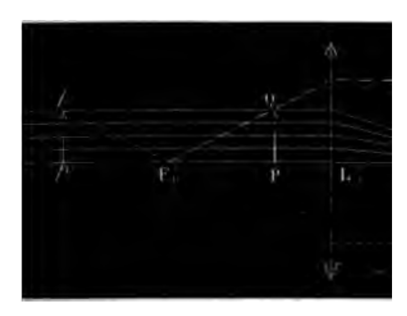


Fig. 296

i $f_1+f_2-e=0$, on a

$$\frac{I}{O}=-\frac{e-f_1}{f_1}=-\frac{f_2}{f_1},$$

tion évidente sur les figures ci-jointes.

(1) Sauf dans les cas où il est parallèle à l'axe, le faisceau change en outre rection.

La grandeur de l'image est invariable, quelle que soit la distance de l'objet.

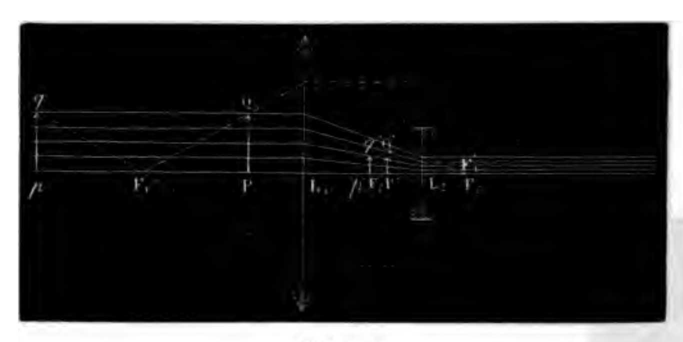


Fig. 297

Lentille équivalente. — Géométriquement, quelque complexe que soit un système optique, il peut être remplacé par une lentille unique, ayant mêmes points cardinaux; car la marche d'un rayon dans les milieux extrêmes ne sera pas affectée par cette substitution.

Supposons le système placé dans l'air. La détermination de la lentille équivalente revient à la résolution des quatre équations

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}-\frac{n-1}{n}\frac{e}{RR'}\right),$$

$$\delta=e-h-h',$$

$$h=e\frac{R}{n(R+R')-(n-1)e},$$

$$h'=e\frac{R'}{n(R+R')-(n-1)e},$$

dans lesquelles f et δ sont donnés et qui contiennent six inconnues R, R', n, h, h', e, dont deux, par conséquent, restent arbitraires.

Physiquement, la substitution d'une lentille unique à un système complexe est le plus souvent irréalisable, parce que 1° la position des surfaces extrêmes n'est pas indifférente; 2° les ouvertures n'étant pas infiniment petites, il faut tenir compte de l'aberration de sphéricité que des combinaisons convenables de lentilles permettent d'atténuer.

9. Détermination expérimentale des éléments ca-téristiques d'un système optique. — *Mesure de la puis-e d'une lentille mince.* — Une lentille infiniment mince est dé-
par sa puissance ou par sa distance focale.

n appelle focomètres (*focus*, foyer; *metrum*, mesure) ou phako-re (φακὸς, lentille; μέτρον, mesure) les appareils servant à mesu-la distance focale principale f.

Le *focomètre de Silbermann* repose sur ce principe qu'une len-le convergente donne d'un objet placé à une distance $2f$ une age égale à l'objet, réelle, renversée, et située de l'autre côté de lentille à la même distance $2f$. La lentille convergente L, dont on ut mesurer la distance focale, s'introduit dans une bague disposée 'extrémité d'un pied mobile le long d'une règle graduée. Sur la me règle peut glisser un deuxième pied mobile, que surmonte demi-disque D′ en matière translucide (ivoire ou verre dépoli), sentant une division millimétrique et recevant la lumière d'une npe par une lentille A. De l'autre côté de la lentille L, en face zéro de la règle, est installé un système semblable, composé

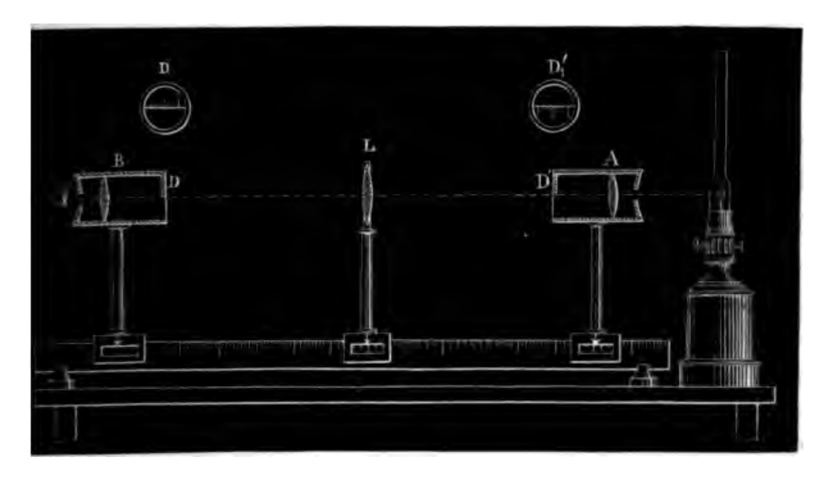


Fig. 298

n demi-disque identique D et d'une loupe B, que l'on ajuste bord de façon à voir nettement la division tracée en D. Puis déplace à la fois les pièces D′ et L, en maintenant toujours L=LD, jusqu'à ce que l'image du demi-disque D′ (image qui

présente l'aspect D'_1) venant se placer au-dessous du demi-dis que D ([1]), les traits D'_1 forment le prolongement exact des traits D La distance DD' est alors égale à $4f$, ou plus exactement à $4f+$ 2 δ désignant l'interstice qui, dans une lentille peu épaisse, est, nous le savons, sensiblement égal au tiers de l'épaisseur de la lentille

Comme il est assez difficile pour l'opérateur de maintenir les deux demi-disques à égale distance de la lentille, Soleil ajouta à l'instrument un pignon et deux crémaillères, qui font mouvoir également les deux supports extrêmes de part et d'autre de la lentille restant fixe.

Deux rubans en acier, minces et flexibles, attachés d'un côté à l'objet et à l'écran, de l'autre à une glissière mobile le long du pied de l'appareil, remplissent le même office dans le *phakomètre de Snellen,* qui se distingue par l'adjonction de deux lentilles convergentes placées symétriquement par rapport à la lentille en étude pour augmenter la convergence. La règle porte une échelle divisée empiriquement en dioptries et donnant la puissance cherchée indépendamment de celle des lentilles supplémentaires.

Ces appareils ne permettent pas de mesurer directement la distance focale d'une lentille divergente. Mais, en associant la lentille divergente à une lentille convergente convenable, on forme un système dont on peut déterminer la puissance ; et comme la puissance de deux lentilles infiniment minces accolées est égale à la somme des puissances algébriques des deux lentilles, on en conclut la puissance, et par suite la distance focale de la lentille divergente.

Si $\bar{f}$ est la distance focale de la lentille divergente, prise en valeur absolue,

f' la distance focale de la lentille convergente auxiliaire,

φ la distance focale du système formé par les deux lentilles accolées,

on a

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{\bar{f}},$$

d'où

$$\bar{f}=\frac{f'\varphi}{f'-\varphi}.$$

([1]) L'image de D' est bien dans le plan de D si, en déplaçant un peu l'œil devant l'oculaire, on ne constate aucun déplacement de cette image par rapport à D.

Les opticiens évaluent couramment la puissance des lentilles et en particulier des verres de besicles, aussi bien divergents que convergents, au moyen de leur *boîte d'optique*, qui renferme une série de verres de puissances graduées, positives et négatives. Pour mesurer la puissance d'une lentille, il suffit de chercher dans la boîte le verre qui, superposé à la lentille, la neutralise. On reconnaît cette neutralisation à ce que les images des objets vus à travers le système complexe ne se déplacent pas quand on déplace celui-ci. Le numéro du verre de la boîte, pris en signe contraire, représente la puissance de la lentille proposée.

Détermination des éléments principaux d'un système optique. — Un système optique est défini par ses quatre points cardinaux : les deux foyers principaux et les deux points principaux (qui se confondent avec les deux points nodaux pour un système dont les faces extrêmes sont en contact avec un même milieu). Ce sont ces quatre points dont il s'agit de trouver la position sur l'axe principal du système, les conditions théoriques d'aplanétisme et d'achromatisme étant supposées satisfaites [1].

Le procédé le plus simple [2] et auquel M. Cornu [3] a donné une forme très précise, peut se formuler ainsi : *a*) déterminer la position des foyers principaux F, F′, par l'observation du point où viennent converger les rayons émanant d'un objet situé à l'infini, vers lequel on tourne successivement les deux faces du système; *b*) placer un objet à une distance ϖ de l'un des foyers principaux et observer la distance ϖ' de l'image à l'autre foyer principal : le produit $\varpi\varpi'$ est égal au carré f^2 de la distance focale principale. En portant cette longueur à partir de F et de F′, dans le sens convenable, on obtient les points principaux H, H′.

a) La première détermination s'effectue aisément si l'on dispose d'une mire assez éloignée pour qu'on puisse la considérer comme située à l'infini, ou d'un collimateur bien réglé. M. Cornu préfère

[1] Si le système n'est pas aplanétique, on en réduira l'ouverture avec un diaphragme convenable, de façon à faire disparaître l'aberration de sphéricité. S'il n'est pas achromatique, on opérera avec une lumière homogène (l'interposition d'un verre coloré suffit habituellement).

[2] Nous supposons le système placé dans l'air. Trois conditions, dont un grossissement, suffisent alors à le déterminer.

[3] Cornu, *Journal de physique*, VI, 276 et 308; 1877.

viser un objet se trouvant à une distance un peu grande et approximativement connue ϖ_1 : la distance de l'image au foyer principal étant $\varpi'_1 = \frac{f}{m}$ si $\varpi_1 = mf$, la quantité ϖ'_1 dont il faudra corriger la position de l'image pour avoir celle du foyer principal se calculera avec une exactitude suffisante dès que m sera assez grand, quand bien même il ne serait qu'imparfaitement connu [1].

b) Les mesures de ϖ et de ϖ' doivent être faites avec toute la précision possible. Si, en effet, on commet sur ϖ une erreur $\delta\varpi$ et sur ϖ' une erreur $\delta\varpi'$, il en résulte pour f une erreur δf définie par l'équation

$$(f+\delta f)^2 = (\varpi+\delta\varpi)(\varpi'+\delta\varpi'),$$

ou approximativement

$$2f\delta f = \varpi'\delta\varpi + \varpi\delta\varpi',$$

ou

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\varpi}{\varpi} + \frac{\delta\varpi'}{\varpi'}\right)$$

En d'autres termes, l'erreur relative commise sur la distance focale est la moyenne des erreurs relatives commises sur les distances ϖ et ϖ' de l'objet et de son image.

Les erreurs absolues $\delta\varpi$ et $\delta\varpi'$ sont du même ordre de grandeur que l'erreur $\delta\lambda$ afférente à la détermination des foyers ; on peut donc poser

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta\lambda}{2}\,\frac{\varpi+\varpi'}{\varpi\varpi'}.$$

L'erreur relative sera minima si les distances ϖ et ϖ' sont égales entre elles. Il en est ainsi dans le focomètre de Silbermann, où $\varpi = \varpi' = f$; mais, outre que l'instrument n'est pas très précis, cette disposition exige un développement souvent inadmissible (le quadruple de la distance focale).

M. Cornu a trouvé plus pratique et plus exact d'attribuer à ϖ et ϖ' deux valeurs pour ainsi dire égales et contraires à celles de Silbermann, en choisissant deux points très voisins des points principaux, savoir le sommet de l'une ou de l'autre des deux surfaces

[1] La position du foyer exactement fixée, on pourra inversement se servir du système pour régler un collimateur.

ıtérieures du système optique donné et son image vue à travers la ırface opposée.

Sur le milieu de l'une des surfaces, il trace à l'encre de Chine ın petit trait S, et il mesure (par un moyen qui sera indiqué plus



Fig. 299

oin) la distance ε' de l'image Σ' du trait regardé à travers l'autre ace au sommet S′ de cette deuxième face, qu'il a marqué égalenent d'un petit trait. Comme il a mesuré préalablement les istances des foyers principaux F et F′ aux surfaces voisines, c'est--dire $FS = d$ et $F'S' = d'$, l'équation

$$d(d' + \varepsilon') = f^2$$

ui permet de calculer la distance focale principale f.

Le système étant retourné, il observe S′, c'est-à-dire son image Σ, travers la surface S, et il mesure la distance $S\Sigma = \varepsilon$, ce qui le onduit à une nouvelle équation

$$d'(d + \varepsilon) = f^2$$

léterminant aussi f; d'où une vérification précieuse.

Pour mesurer ε et ε', M. Cornu monte le système proposé, convenablement diaphragmé et bien centré dans le tube TT′, sur un petit

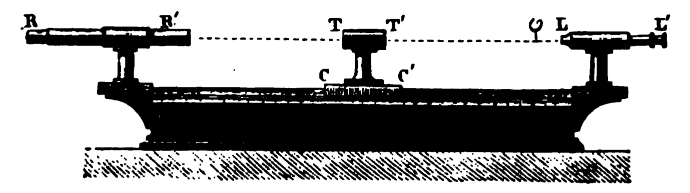


Fig. 300

chariot CC′ mobile le long d'un banc divisé BB′, à l'une des extrémités duquel est fixé un microscope à long foyer LL′, muni d'un

situé à une distance connue approximativement et égale à centaines de fois la distance focale du système étudié, place le chariot jusqu'à ce que l'image de cet objet vien exactement dans le plan de visée du microscope (²); on l tion du chariot sur le banc : soit z'_0 cette lecture.

2° On rapproche le chariot jusqu'à ce que le point tr surface la plus voisine soit perçu nettement dans le micr lit la nouvelle position de l'index z'_1.

3° On rapproche encore davantage le chariot jusqu' tinctement dans le microscope le point marqué sur la s posée du système ; soit z'_2 la troisième position de l'inde

Si l'objet visé est suffisamment éloigné, on a immédi

$$d' = z'_1 - z' \qquad d' + \varepsilon' = z'_2 - z'_0 ;$$

sinon, on corrige la lecture z'_0 de la quantité indiquée et les formules restent les mêmes.

4°, 5° et 6° On retourne le système optique bout po l'on fait les trois lectures analogues z_0, z_1, z_2. On a alors

$$d = z_1 - z_0 \qquad d + \varepsilon = z_2 - z .$$

On en conclut

$$f^2 = (z_1 - z_0)(z'_2 - z'_0) = (z'_1 - z'_0)(z_2 - z_0) \text{ (³)}.$$

(¹) A l'autre extrémité du banc est un collimateur RR' remplaç mesures rapides un objet à l'infini et pouvant d'ailleurs s'enlever a

(²) Si le système à étudier est divergent, on pourra se trouver obl placer le microscope par une lunette astronomique, que l'on pre

D'autres procédés ont été parfois employés pour obtenir les éléments d'un système optique.

M. von Helmholtz (¹) a déterminé les points cardinaux du cristallin de l'homme en mesurant, au moyen de son ophtalmomètre (²), les largeurs σ et σ_1 des images d'une fente lumineuse de largeur s, placée successivement aux distances d et d_1 de la face antérieure de la lentille.

On avait en effet

$$\frac{\sigma}{s+\sigma}=\frac{f}{d+h}, \quad \frac{\sigma_1}{s+\sigma_1}=\frac{f}{d_1+h},$$

d'où

$$f=(d_1-d)\frac{\sigma\sigma_1}{s(\sigma-\sigma_1)},$$

et

$$h=\frac{d_1\sigma_1(s+\sigma)-d\sigma(s+\sigma_1)}{s(\sigma-\sigma_1)}.$$

En retournant le cristallin, on obtenait de même f à nouveau et h'.

Il a trouvé comme moyennes de plusieurs mesures ainsi effectuées, $f=46^{mm}$, $h=2^{mm},5$, $h'=1^{mm},5$; l'épaisseur du cristallin étant au plus $4^{mm},3$, on voit que l'interstice δ ne dépasse pas $0^{mm},3$. Le cristallin isolé, placé dans l'air, se comporte donc très sensiblement comme une lentille infiniment mince, de longueur focale $f=46^{mm}$.

n même temps que le microscope jusqu'à ce que l'image ait repris sa grandeur primitive : elle sera alors dans le premier plan principal du système, et le plan e visée du microscope dans le deuxième plan principal; le déplacement du microscope donne donc immédiatement δ (Sentis, *Journal de physique*, (2), VIII, 13, 1889).

(¹) Helmholtz, *Optique physiologique*, traduction Javal et Klein, p. 105. Paris, Masson ; 1867. (Cette 1re partie a paru, en allemand, en 1856.)

(²) L'*ophtalmomètre* consiste essentiellement en une lunette, disposée pour ...r à de petites distances, et devant l'objectif de laquelle sont placées deux lames e verre, identiques, masquant chacune l'une des moitiés de l'objectif. Quand ...deux lames sont dans un même plan normal à l'axe optique de la lunette, ... ne voit qu'une seule image de l'objet observé. Mais si l'on incline les ...x lames de quantités égales en sens contraire, l'image se dédouble et l'on ... calculer l'écartement des deux images d'après l'angle i formé par les ...es avec l'axe (cet écartement est le double du déplacement déterminé p. 404). ...l'on amène au contact les bords opposés des deux images, la largeur de ...une d'elles, étant égale à leur écartement, sera dès lors connue (Helmholtz, — *cit.*, p. 11).

430. Aberrations. — *Cas d'une surface sphérique.* — dérons d'abord le cas d'une surface sphérique. On a (fig. 273

$$\frac{\sin i}{\sin \omega} = \frac{p_1 + R}{MP_1}, \qquad \frac{\sin r}{\sin \omega} = \frac{p_2 - R}{MP_2},$$

d'où

$$\frac{p_1 + R}{p_2 - R} = n \frac{MP_1}{MP_2}.$$

Soit y la longueur de la perpendiculaire abaissée du point l'axe OA,

$$MP_1 = \sqrt{y^2 + (p_1 + R - \sqrt{R^2 - y^2})^2}.$$

Nous avons jusqu'ici supposé $MP_1 = p_1 + R$. Nous effectu maintenant le calcul en tenant compte des termes en y^2, ma négligeant les termes supérieurs. A ce degré d'approximation convient à une ouverture modérée de la surface sphérique,

$$MP_1 = p_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{p_1}\right) y^2,$$

et de même

$$MP_2 = p_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p_2}\right) y^2.$$

On a donc

$$\frac{p_1 + R}{p_2 - R} = n \frac{p_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{p_1}\right) y^2}{p_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p_2}\right) y^2}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{p_2}} = n \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{p_1}\right) y^2}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p_2}\right) y^2},$$

ou, en posant, avec Herschell [1], $\frac{1}{p_1} = \pi_1$, $\frac{1}{p_2} = \pi_2$, $\frac{1}{R} = \varkappa$, $\frac{1}{n} =$

$$\frac{\varkappa - \pi_2}{\varkappa + \pi_1} = \nu \frac{1 - \frac{1}{2}\pi_2(\varkappa - \pi_2) y^2}{1 + \frac{1}{2}\pi_1(\varkappa + \pi_1) y^2},$$

(1) J. F. W. Herschell, *Phil. Trans.*, CXI; 1821.

(2) $\varkappa$ est la courbure de la surface, π_1 se nomme la proximité du point neux, π_2 la proximité de l'image.

ır suite, en se bornant toujours aux termes en y^2,

$$x-\pi_2=\nu(x+\pi_1)-\frac{1}{2}\nu(x+\pi_1)\left[\pi_2(x-\pi_2)+\pi_1(x+\pi_1\right]y^2.$$

même degré d'approximation, on peut remplacer dans la pa-
èse π_2 par la valeur qui convient aux rayons centraux,

$$(\pi_2)_c=(1-\nu)x-\nu\pi_1$$

i donne

$$\pi_2=(1-\nu)x-\nu\pi_1+\frac{1}{2}\nu(1-\nu)(x+\pi_1)^2\left[\nu x+(1+\nu)\pi_1\right]y^2. \qquad (1)$$

nous posons, pour abréger,

$$A=(1-\nu)x-\nu\pi_1,$$
$$B=\frac{1}{2}\nu(1-\nu)(x+\pi_1)^2\left[\nu x+(1+\nu)\pi_1\right],$$

aurons

$$\pi_2=A+By^2$$

r conséquent

$$p_2=\frac{1}{A}-\frac{B}{A^2}y^2.$$

n est plus grand que 1, les rayons marginaux rencontrent
plus près de la surface que les rayons centraux $\left(\text{pour lesquels}\right.$
, $\left.(p_2)_c=\frac{1}{A}\right)$ [1]; l'aberration longitudinale est

$$\lambda=\frac{B}{A^2}y^2.$$

ıberration transversale est

$$\rho=\frac{B}{A}y^3 \text{ [2]}.$$

:s valeurs s'annulent pour $p=-R$ et $p=-(n+1)R$: l'aberra-
est alors nulle, non seulement aux termes en y^2 près, mais

[1] On le voit très bien avec une grande lentille plan-convexe, dont la face
: est recouverte par un diaphragme percé de quatre trous, deux centraux
ux marginaux.

[2] Ces valeurs sont immédiatement applicables aux miroirs sphériques, la
tion n'étant pour l'algèbre qu'un cas particulier de la réfraction ($n=-1$).

d'une façon absolue, comme on le reconnaîtra sans peine (¹). On vérifiera aussi aisément que dans ces deux cas particuliers se trou remplie la condition à laquelle une surface doit satisfaire pour ê aplanétique par réfraction.

Condition de l'aplanétisme. — Si une surface fait converger un seul point P_2 tous les rayons émanés d'un point P_1, elle est é demment de révolution autour de P_1P_2 : il suffit donc de dét miner la courbe méridienne AB. Tous les rayons, qui vont de en P_2 par AB, effectuent cette route dans le temps minim

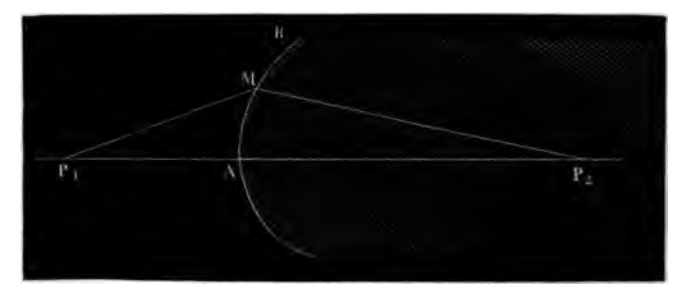


Fig. 301

d'après la règle de Fermat (**422**), et par conséquent dans le m temps, quel que soit le point M où ils pénètrent dans le deu milieu. La condition de l'aplanétisme est donc

$$\frac{P_1M}{v_1}+\frac{P_2M}{v_2}=C^{te},$$

v_1 et v_2 étant les vitesses de propagation de la lumière dans les milieux, vitesses dont le rapport est égal à l'indice de réfra du deuxième milieu par rapport au premier,

$$\frac{v_1}{v_2}=n.$$

Si donc nous posons

$$P_1M=\rho_1, \qquad P_2M=\rho_2,$$

nous aurons pour l'équation de la méridienne AB

$$\rho_1+n\rho_2=C^{te},$$

(¹) Dans le premier cas (le point lumineux est au centre), $p'=R$; dans le deuxième, $p'=\frac{n+1}{n}R$.

e représente un nombre infini de courbes qui sont toutes
les de Descartes ([1]), les rayons ρ_1 et ρ_2 étant de même signe
yers sont de même nature (tous les deux réels ou tous les deux
s), et de signe contraire si les foyers sont de nature diffé-
l'un réel, l'autre virtuel).

d les rayons incidents sont parallèles, les distances ρ_1 doi-
re comptées à partir d'un plan quelconque perpendiculaire
direction. Appelant u les distances ainsi comptées, nous

$$u + n\rho_2 = C^{te};$$

me l'origine des distances u est arbitraire, nous pouvons
constante égale à zéro, ce qui donne

$$u + n\rho_2 = 0 :$$

toujours supposé plus grand que 1, cette équation repré-
ne ellipse rapportée au point F et à une droite DE telle que

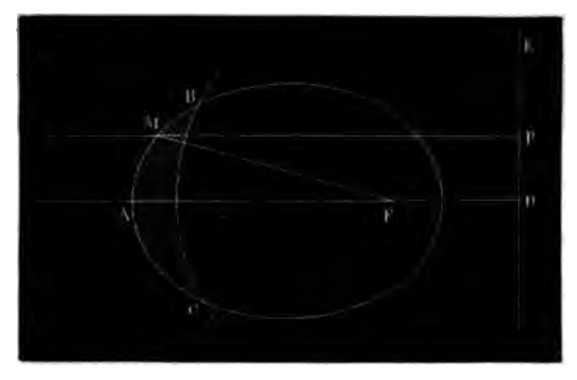


Fig. 302

, ou plutôt une infinité d'ellipses, ayant toutes même excen-
[2]), égale à n.

n adjoignait à l'une de ces ellipses une sphère ayant son

ypothèse $n = -1$ redonne les coniques trouvées pour les miroirs
note).

sait que le rapport des distances d'un point d'une ellipse au foyer et à
ice est égal à l'excentricité $\frac{c}{a}$.

centre en F, on formerait une lentille ABC qui serait rigoureusement aplanétique pour un faisceau de rayons parallèles. Il suffira donc d'augmenter convenablement la courbure de la face convexe d'un ménisque convergent à surfaces sphériques, pour avoir un système qui, recevant sur sa face rendue elliptique un plein faisceau de rayons parallèles, ferait converger tous ces rayons en un point unique.

En combinant de même les deux cas où la sphère est aplanétique, on formera une lentille aplanétique, mais à image virtuelle. Toutefois, cette combinaison ayant pour effet de diminuer l'angle

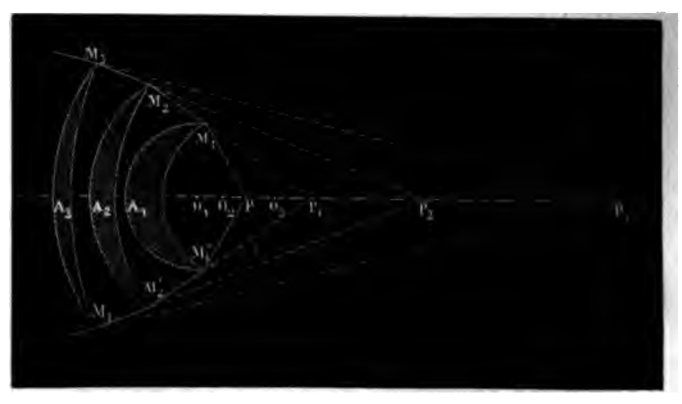


Fig. 303

du faisceau permettra de présenter finalement à une dernière lentille un faisceau assez étroit pour que l'aberration soit très faible. La figure 303 montre comment avec trois ménisques convergents aplanétiques on peut réduire à 30° une ouverture qui était de 120° au début (¹).

Cas de deux surfaces sphériques. — Revenons au cas général, et supposons le deuxième milieu séparé d'un troisième par une

(¹) Les lentilles sont supposées toutes les trois en verre d'indice $\frac{3}{2}$. La face A_1 ayant un rayon de 10^{mm}, le point lumineux est placé en P à une distance $A_1P = \frac{5}{3}.10$, et les rayons entrent dans le verre par la surface sphérique $M_1M'_1$ ayant son centre en P : l'image se forme en P_1 à la distance $A_1P_1 = \frac{5}{2}.10$; et si l'angle $M_1PM'_1 = 120°$, $M_1P_1M'_1 = 70°$. De même, le ménisque $A_2M_2M'_2$ abaisse l'angle du faisceau à 45°, et le ménisque $A_3M_3M'_3$ à 30°.

uxième surface sphérique, de façon à constituer une lentille; la uvelle réfraction est représentée par l'équation

$$x_2 = -(1-\nu')x' + \nu'\pi_2' - \frac{1}{2}\nu'(1-\nu')(x'+\pi_2')^2[\nu'x' + (1+\nu')\pi_2']y^2, \quad (2)$$

paisseur de verre traversée par le rayon marginal étant supposée gligeable, de sorte que $y' = y$. Dans cette équation, π_2' est l'in-



Fig. 304

rse de la longueur p_2' comptée à partir du pôle de la deuxième rface. Si donc nous représentons par e l'épaisseur de la lentille, antité de l'ordre de y^2 et exprimée, au degré d'approximation nous nous sommes placé, par

$$e = \frac{1}{2}(x+x')y^2,$$

us avons

$$p_2' = p_2 - e$$

par suite

$$\pi_2' = \pi_2 + \pi_2^2 e,$$

st-à-dire

$$x - \nu\pi_1 + \left\{ \frac{1}{2}\nu(1-\nu)(x+\pi_1)^2[\nu x + (1+\nu)\pi_1] + \frac{1}{2}[(1-\nu)x - \nu\pi_1]^2(x+x') \right\} y^2. \quad (1)'$$

Les équations (1)' et (2) permettront, dans tous les cas, de déteriner la position du foyer des rayons marginaux, et, par suite, de lculer les aberrations, le foyer des rayons centraux étant donné r les termes indépendants de y^2 des équations (1) et (2).

Considérons le cas d'une lentille ordinaire pour laquelle $\nu' = \frac{1}{\nu}$, cherchons les aberrations principales.

Alors

$$\pi_1 = 0.$$

Par suite,

$$\pi_2' = (1-\nu)\varkappa + \frac{1}{2}(1-\nu)\varkappa^2[\nu^2\varkappa + (1-\nu)(\varkappa+\varkappa')]y^2.$$

Soit f la valeur correspondante de p_3. Nous avons, en remplaçant π_2' par $(1-\nu)\varkappa$ dans le coefficient de y^2 et après quelques réductions évidentes,

$$\frac{1}{f} = \frac{1-\nu}{\nu}(\varkappa+\varkappa') + \frac{(1-\nu)^2}{\nu}\varkappa^2 e + \frac{1-\nu}{\nu^3}[\varkappa'^2 + (2-2\nu-\nu^2)\varkappa\varkappa' + (1-2\nu+2\nu^3)\varkappa^2]e \ldots$$

Mais si $\frac{1}{f} = a + be$, en négligeant les puissances supérieures de e, on a : $f = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}e$. Donc

$$f = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{\varkappa+\varkappa'} - \nu\frac{\varkappa^2}{(\varkappa+\varkappa')^2}e - \frac{1}{\nu(1-\nu)(\varkappa+\varkappa')^2}[\varkappa'^2 + (2-2\nu-\nu^2)\varkappa\varkappa' + (1-2\nu+2\nu^3) \ldots$$

Les deux premiers termes de cette expression représentent la valeur de f pour les rayons centraux (¹)

$$(f)_c = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{\varkappa+\varkappa'} - \nu\frac{\varkappa^2}{(\varkappa+\varkappa')^2}e.$$

(¹) Le foyer des rayons centraux dans une lentille épaisse est déterminé immédiatement par les deux équations

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{p_2} = \frac{n-1}{R}$$

et

$$\frac{1}{p_3} - \frac{n}{p_2 - e} = \frac{n-1}{R'},$$

ou, avec la notation d'Herschell,

$$\nu\pi_1 + \pi_2 = (1-\nu)\varkappa$$
$$\nu\pi_3 - \pi_2(1+\pi_2 e) = (1-\nu)\varkappa'.$$

Si les rayons incidents sont parallèles, $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = (1-\nu)\varkappa$, et l'on a

$$\frac{1}{(f)_c} = \frac{1-\nu}{\nu}(\varkappa+\varkappa') + \frac{(1-\nu)^2}{\nu}\varkappa^2 e.$$

Cette équation donne la valeur de $(f)_c$ indiquée dans le texte.

du plus grand rayon, et que l'aberration est $\lambda = 1,08\,e$.

Si l'on retourne cette lentille de manière à exposer moins courbe aux rayons incidents, l'aberration devie trois fois plus considérable ($\lambda = 3,5\,e$).

Dans la lentille à rayons égaux, $\lambda = 1,67\,e$.

Une lentille plan-sphérique, dont la face courbe est d la lumière incidente, a une aberration à peine supérieur mum ($\lambda = 1,17\,e$) : aussi, comme elle est d'une construc les opticiens l'emploient-ils fréquemment [1]. Mais il faud der de présenter la face plane aux rayons incidents, ca tion deviendrait énorme ($\lambda = 4,5\,e$).

L'aberration latérale ρ est très sensiblement égale à l' longitudinale λ multipliée par la *raison d'ouverture* $\frac{y}{f}$;

$$\rho = m\frac{y^3}{f^2}.$$

Mais il faut remarquer que le centre du cercle d'abe çoit beaucoup plus de lumière que les bords [2]. La causti autour de l'axe une véritable pointe ayant son somme Plus la pointe s'effile, plus se marque la *pénétration du* n'est autre chose pour une lentille que la propriété de d des plans différents des images suffisamment nettes d point : par suite, les images de points situés à des p différentes dans l'objet pourront se voir avec une égale

Combinaisons de lentilles. — S'il n'est généralement n

ues, on peut obtenir l'aplanétisme, relativement aux termes en par l'emploi de deux ou de plusieurs lentilles. Par exemple, avec

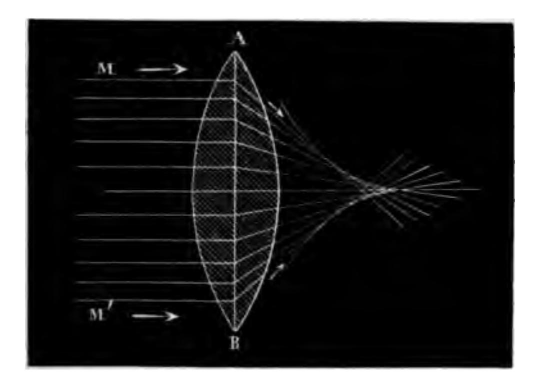


Fig. 305

lentilles d'indices déterminés, les courbures de trois des sur- étant données, on pourra toujours établir la courbure de la trième, de façon à annuler l'aberration de sphéricité pour les ertures modérées.

Projecteur Mangin. — De même on peut, en se bornant toujours

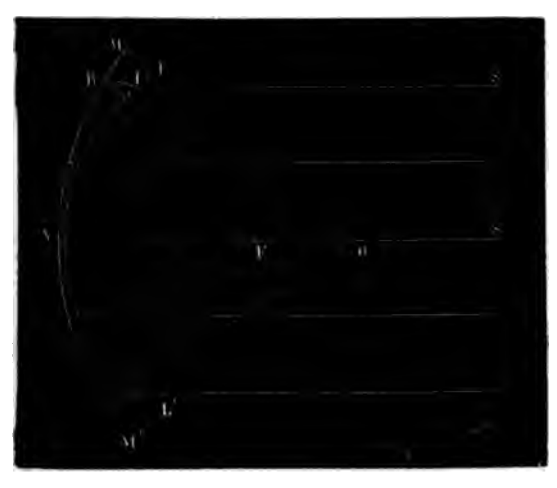


Fig. 305

x ouvertures modérées, compenser l'aberration d'un miroir par le d'une lentille. C'est ce qu'a fait le colonel Mangin dans son proteur, où il a réuni le miroir et la lentille sous la forme d'un mé-

point lumineux en F, les rayons incidents traverseront
ment la face LL', se réfléchiront sur la face argentée MM
fracteront à la sortie dans une direction parallèle à l'ax
vement le faisceau émis est presque exactement paral
l'opération grandiose effectuée en 1879, sous les ordres
raux Perrier et Ibañez, pour la jonction géodésique de
avec l'Espagne, on a pu observer les signaux envoyés pa
jecteur Mangin distant de 300 kilomètres.

Lentilles à échelons de Fresnel. — Les phares ont tou
clamé le moyen d'envoyer dans une direction détermin
grande quantité possible des rayons émanant de la sou
neuse. Les miroirs paraboliques semblent résoudre la qu
ils furent en effet employés dès qu'Argant, par l'inven
lampe à double courant d'air, eut réalisé un luminaire
tense et en même temps de volume assez réduit [2]. Ma
roirs avaient le grave inconvénient d'entraîner une per
de lumière (près de moitié). Augustin Fresnel apporta
phares un perfectionnement précieux en remplaçant
catoptrique par un système *dioptrique*, formé de len

[1] Avec du verre ordinaire $\left(n=\frac{3}{2}\right)$ ce rapport serait égal à $\frac{3}{2}$,
surfaces étaient en contact au sommet A.

[2] Le premier appareil de ce genre fut exécuté par Lenoir sous
de Borda et installé en 1791 au sommet du phare de Cordouan par
Teulère. « Ce renouvellement du phare de Cordouan fait époque dan
des côtes maritimes. D'une part, en effet, les grands réverbères pa

rbent pas un dixième de la lumière incidente. Pour re-
r cette lumière dans un large espace angulaire et la pro-
nsuite dans la direction voulue sans absorption et sans aber-
appréciables, Fresnel imagina la *lentille à échelons*, qui

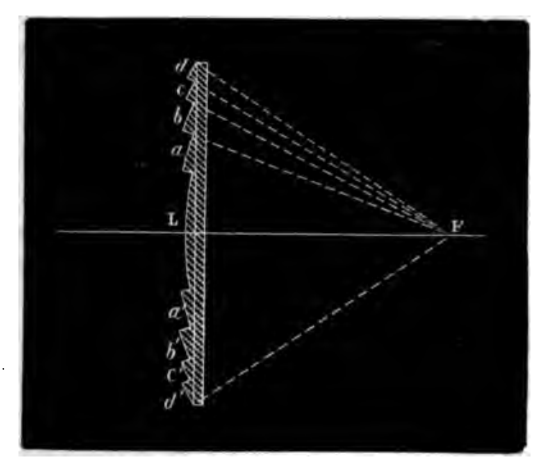


Fig. 307

ıstituée par une lentille plan-convexe de faible ouverture,
ée d'une série d'anneaux concentriques dont les surfaces
lculées de façon que le foyer de chacun d'eux coïncide avec
r de la pièce centrale ([1]). En ce point Fresnel plaçait le cen-
la flamme d'une lampe à mèches concentriques. On y met
l'hui avec grand avantage une lampe électrique, dont les
sont visibles à de très longues distances. La portée ac-
le nos phares de premier ordre sur la Méditerranée est de

mois d'août 1819, Fresnel soumettait à la commission des phares
d'une lentille polyzonale, plan-convexe, à profil échelonné; et, « le
. 1823, un appareil dioptrique, muni de huit grandes lentilles à éche-
installé au sommet du plus beau monument qui, depuis le temps des
, ait été consacré au salut des navigateurs; pour la seconde fois, la
Cordouan donnait le premier signal d'une heureuse révolution opérée
ience dans l'éclairage des côtes maritimes ». Plus tard, Fresnel com-
système par l'addition d'anneaux à réflexion totale, ou *catadioptriques*,
à recueillir et à renvoyer dans la direction voulue les rayons tombant
rs du cône limité par la lentille. On peut ainsi utiliser tous les rayons
dans la demi-sphère antérieure. Avec une lampe électrique, il n'y a pas
aller au delà, parce qu'une bonne taille des crayons entre lesquels jaillit
met d'avoir dans la demi-sphère antérieure les 0,90 de la lumière

32,7 milles marins (plus de 60 kilomètres) pendant les quatorze quinzièmes de l'année.

Défaut des grandes images. — Ce que nous avons dit de l'axe principal dans les lentilles convient évidemment à tout axe dont l'inclinaison sur l'axe principal est faible. Mais, dès que cette inclinaison devient un peu considérable, de nouvelles défectuosités apparaissent, comme pour les miroirs.

1° Courbure du champ. — Quand l'image d'un objet plan, perpendiculaire à l'axe, s'écarte notablement de l'axe principal, cette image ne reste pas plane. Par exemple, un objet situé à l'infini en regard de la face plane d'une lentille plan-convexe a son image étalée sur une sphère passant par le foyer principal et concentrique à la face courbe. Notons toutefois qu'un ménisque convergent, dont la face concave, suffisamment diaphragmée, regarde l'objet, peut avoir un champ d'une planéité complète sur une étendue de plus de 15°.

2° Distorsion des images. — Les lignes un peu longues cessent d'être droites : l'image d'un quadrillage ayant son centre sur l'axe et normal à l'axe se resserre par les coins (distorsion en dedans ou en barillet), ou se dilate (distorsion en dehors ou en croissant).

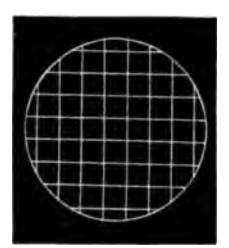
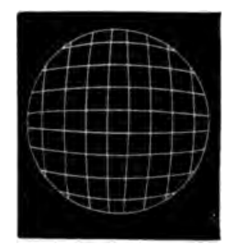
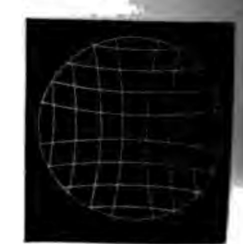




Fig. 308

On ne saurait plus en effet parler de points nodaux, ni de directrices : le conjugué d'un point un peu éloigné de l'axe principal ne peut plus se déterminer au moyen des considérations simples qui nous ont servi jusqu'ici. Toutefois on se rend compte assez facilement de l'espèce d'*aberration de forme* qui se produit alors.

Soit un objet placé en RS entre une lentille convergente, que nous supposerons réduite à un plan OL, et la caustique du

odal de l'œil P. D'après le principe du retour inverse des , les tangentes à la caustique passant par les différents s, b, c... de l'objet viennent aboutir en P; et l'image qui se ur la rétine est semblable à la figure que découpent sur de la lentille les *lignes de direction* Pa', Pb', Pc'... Or si l'on $ab=bc$, comme on a

$$\frac{a'b'-ab}{ab}=\frac{mm'}{Mm},$$

$$\frac{b'c'-bc}{bc}=\frac{nn'}{Nn},$$

que $b'c'$ sera plus grand que $a'b'$. L'image d'un quadrillage normalement sur l'axe prendra donc l'aspect en croissant.

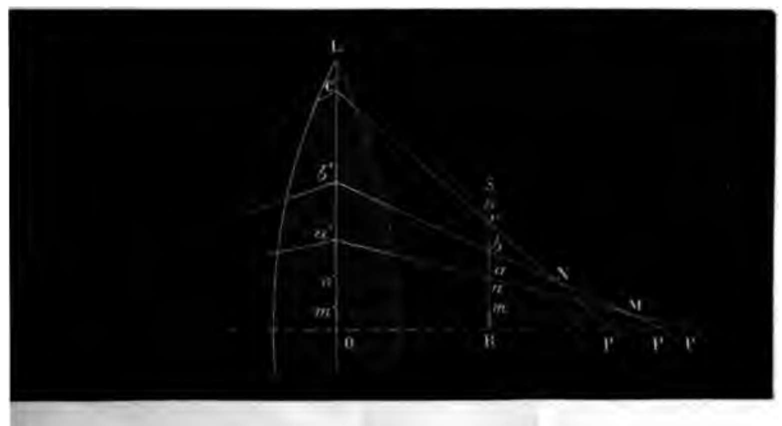


Fig. 309

drait au contraire l'aspect en barillet s'il se trouvait au delà ıustique. Les résultats seraient inverses si la caustique était e.

nême raisonnement s'appliquerait au cas où l'on recevrait sur un écran.

tigmatisme. — Enfin, pour des rayons très obliques, l'homoité disparaît : l'image d'un point situé sur un axe secondaire liné n'est plus un point; le faisceau réfracté s'étrangle suiux droites rectangulaires placées à des distances différentes. st la défectuosité connue sous le nom d'*astigmatisme*, dé-

fectuosité que nous avons déjà rencontrée à diverses reprises, et qui constitue en effet le cas général, comme nous allons le montrer.

431. Propriétés générales d'un faisceau lumineux. — *Théorème de Malus.* — Au milieu de toutes ces complications, les rayons lumineux obéissent en effet à un théorème énoncé pour la première fois par Malus ([1]) avec certaine restriction fautive, et établi par les efforts combinés de Dupin ([2]), de Quételet ([3]) et de Gergonne ([4]).

Ce théorème célèbre, qui porte tantôt le nom de Malus, tantôt celui de Gergonne, peut se formuler ainsi :

Après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, les rayons, initialement normaux à une même surface, sont encore normaux à une même surface, dite *anticaustique*.

Pour le démontrer ([5]), nous suivrons la méthode géométrique, indiquée par le professeur belge Timmermans ([6]).

Considérons d'abord un faisceau de rayons parallèles SI, S'I',...

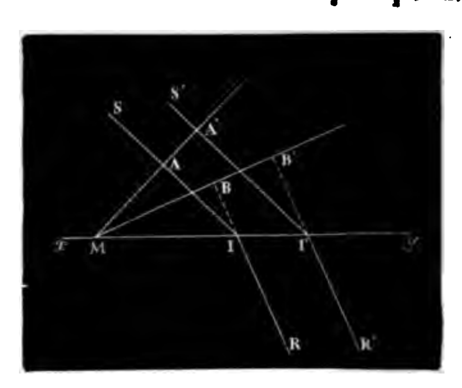


Fig. 310

tombant sur un plan réfringent xy, et appliquons leur la construc-

([1]) Malus, *loc. cit.*
([2]) Dupin, *loc. cit.*
([3]) Quételet, *loc. cit.*
([4]) Gergonne, *loc. cit.*
([5]) On trouvera la démonstration analytique dans le *Traité de calcul différentiel et intégral* de Bertrand (I, 685), ou dans la *Théorie générale des surfaces* de Darboux (II, 275), qui renferme une étude très complète de la question.
([6]) Timmermans, *loc. cit.*

l'Huygens (422) : ayant mené le plan MA perpendiculaire yons incidents, des différents points de xy comme centres tra- s sphères IA, I'A', tangentes en A,A'... à ce plan, puis rédui- es rayons de ces sphères dans le rapport de 1 à $\frac{1}{n}$ et con- s par la droite M, du même côté du plan xy, les plans tan- aux sphères ainsi réduites : ces plans se confondent en un unique MB, normal à tous les rayons réfractés.

e proposition convient à la réflexion regardée comme une tion suivant l'indice — 1, le plan normal aux rayons réfléchis alors de l'autre côté du plan xy.

nons-nous à la réfraction, et supposons maintenant que la e dirimante Σ soit quelconque et que les rayons incidents normaux à une même surface S. Si l'on prend les rayons

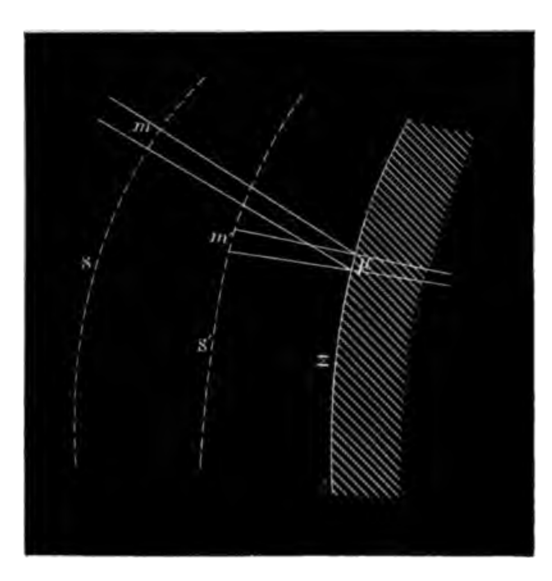


Fig. 311

ıus dans un faisceau infiniment étroit $m\mu$, on pourra uer à ces rayons la construction précédente : décrire autour oints de l'élément μ comme centres des sphères tangentes à ent m, et ensuite des sphères de rayon réduit dans le rapport ı $\frac{1}{n}$; les intersections successives de ces deuxièmes sphères,

du côté de S, formeront un élément plan m' normal aux rayons réfractés. En opérant de même pour tous les éléments de surface S, on obtiendra une surface S′ normale aux rayons réfractés.

On tracerait semblablement une surface normale aux rayons après une deuxième réfraction (ou réflexion); et ainsi de suite.

Il en résulte que l'on peut toujours remplacer un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions par une réflexion unique ou une seule réfraction avec indice donné. Car il existe toujours une surface Σ, telle que les deux sphères décrites de chacun de ses points comme centre tangentiellement aux surfaces S et S′ aient leurs rayons dans le rapport de 1 à $\frac{1}{n}$.

Les rayons issus d'un même point lumineux, étant normaux à une sphère quelconque décrite de ce point comme centre, rentrent dans la catégorie des rayons normaux initialement à une même surface. Par suite, les rayons émanés d'un point unique sont, après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, normaux à une même surface. On peut donc les assembler en deux familles de développables orthogonales. L'ensemble des arêtes de rebroussement de toutes les développables d'une même famille est une nappe de la *caustique*, laquelle est ainsi, en général, une surface à deux nappes. Quand toutes les surfaces dirimantes sont de révolution autour d'une même droite passant par le point lumineux, l'une des nappes de la caustique se confond avec l'axe, et l'autre nappe est elle-même une surface de révolution autour de cet axe.

Théorème de Sturm. — Les raisonnements précédents ont conduit Sturm à un théorème important sur la constitution d'un faisceau infiniment mince. Soit un élément MP de la surface S′ normale aux rayons réfractés : traçons sur cet élément les deux systèmes de lignes de courbure orthogonales. Les normales aux différents points d'une ligne MN du premier système se coupent (à un infiniment petit du deuxième ordre près) en un même point H; les points H,H′... forment une petite droite, qui est située sur la développable s'appuyant sur la ligne PQ du deuxième système car les normales à la surface aux différents points A,A′... de cette

ligne passent en H,H'... De même, les normales suivant les lignes du deuxième système rencontrent toutes une petite droite KK',

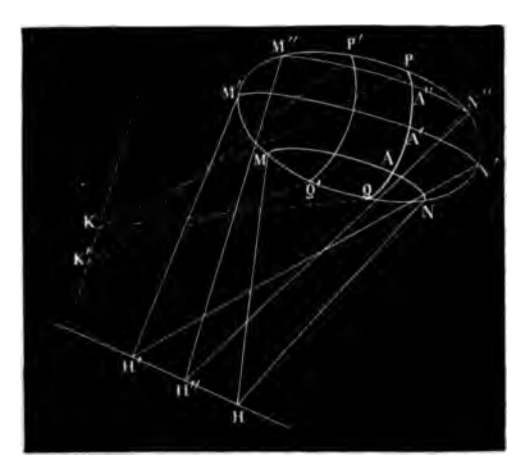


Fig. 312

ituée sur la développable MN, normale à la première.

Donc ***tous les rayons d'un faisceau infiniment mince rencontrent leux droites infiniment*** *petites qui sont situées dans deux plans rec-* ***'angulaires,*** et auxquelles Sturm a donné le nom de *droites focales.*

Ces deux droites, comme nous avons déjà eu l'occasion de le remarquer, ne se coupent pas en général : il n'y a donc pas alors de véritable foyer.

On vérifie aisément l'existence des droites focales en recevant très obliquement sur un miroir ou une lentille quelconque un faisceau étroit, et en déplaçant un écran dans la direction des rayons réfléchis ou réfractés.

432. Lentilles cylindriques. — On nomme lentilles cylindriques celles dont une face au moins a la forme d'un cylindre.

Les plus employées sont les lentilles *plan-cylindriques*, limitées d'un côté par la surface convexe ou concave d'un cylindre circulaire droit, de l'autre côté par un plan parallèle à l'axe du cylindre.

L'*axe optique* est une droite normale aux deux surfaces : il y a une infinité d'axes optiques, tous parallèles et situés dans la

section principale axiale. On nomme *section principale transverse* toute section droite du cylindre (¹).

Si nous figurons une lentille plan-cylindrique par ses projections sur ses deux plans principaux rectangulaires, nous voyons immédiatement qu'un pinceau de petite ouverture, émanant d'un point P, se présente, à la sortie de la lentille supposée infiniment mince :

En section axiale, comme s'il avait simplement traversé une lame infiniment mince à faces parallèles, c'est-à-dire comme si la lentille n'existait pas ;

En section transverse, comme s'il avait traversé une lentille plan-sphérique.

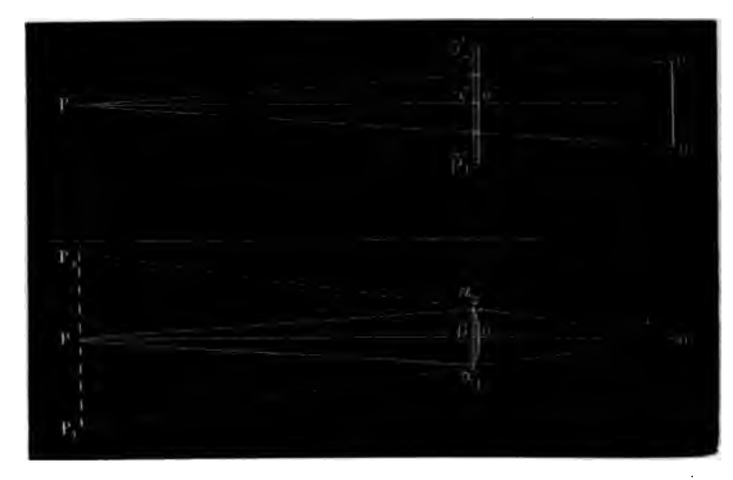


Fig. 313

Le faisceau s'étranglera donc suivant une droite $Q_1Q_1'Q_2'$, parallèle à l'axe du cylindre et dont la distance à la lentille est donnée par la relation

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},$$

f étant la distance focale de la lentille plan-sphérique de même section transverse : c'est l'une des droites focales. Mais les rayons, prolongés en sens inverse, vont tous rencontrer la droite P_1P_2P'.

(¹) On appelle aussi *maximale* cette section où la puissance de la lentille est maxima, tandis qu'elle est minima dans la section axiale.

menée par le point P perpendiculairement au plan axial : c'est l'autre droite focale.

L'action de la lentille dans un cas quelconque s'en déduit aisément. Soit, par exemple, en P, un système de droites perpendiculaires à l'axe optique et divergeant comme le rais d'une roue, tel que les oculistes l'emploient volontiers; en Q, le rais parallèle à la première droite focale aura seul pour image une droite, les autres se marqueront par des bandes dont la largeur ira en croissant d'une façon continue jusqu'à l'azimuth perpendiculaire.

Si nous superposons à la lentille cylindrique une lentille sphé-

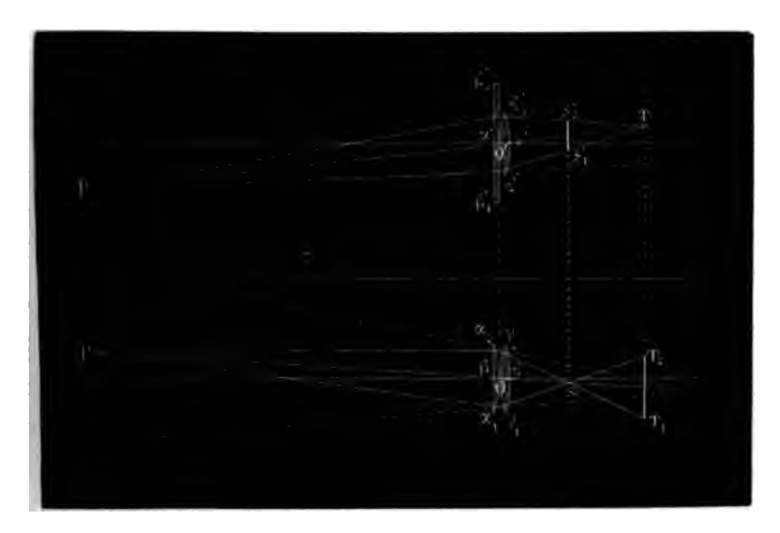


Fig. 314

rique, de façon à constituer ce que l'on appelle un *système astigmate*, les rayons émanant d'un point quelconque P formeront au sortir du système un faisceau qui s'étranglera successivement suivant les deux droites focales S et T, dont il est facile de déterminer la position, soit graphiquement, soit par le calcul; car la puissance d'un système composé de lentilles infiniment minces en contact étant égal à la somme des puissances respectives de ces lentilles, la puissance du système dans la section maximale est $\frac{1}{f}+\frac{1}{F}$, et dans la section axiale $\frac{1}{F}$, où F représente la distance focale principale de la lentille sphérique.

Quand on regarde un objet à travers un système astigmate, o n'observe en général qu'une image déformée. En imprimant un rotation au système dirigé sur une droite immobile, on voit celle- rester immobile, ou se balancer à la manière d'un pendule, o tourner d'un mouvement continu, suivant les conditions de l'exp rience. On se rend compte immédiatement de ces apparences, l'on considère, non l'image imprimée sur la rétine, mais la figu semblable que dessinent dans le plan de la lentille les lignes direction (430), s'appuyant à la fois sur la droite-objet et sur couple de lignes focales conjuguées du point nodal de l'œil ([1]).

([1]) Leroy, *Rev. gén. d'ophtal.*, VI, 145; 1887.

CHAPITRE IV

DISPERSION

I. — Hétérogénéité de la lumière blanche.

33. Expériences de Newton. — *Phénomène fondamental.* Toutes les fois qu'un pinceau de lumière blanche subit une ré-
tion sensible, on le voit en même temps s'élargir et se colorer.
a dispersion est donc aussi anciennement connue que la réfrac-
. Sénèque dit qu'une baguette de verre, cannelée ou bosselée,
evant transversalement les rayons solaires, présente les couleurs
mes de l'arc-en-ciel; et dans ces couleurs il distingue le rouge,
aune et le bleu, tout en remarquant que les diverses teintes se
cèdent par dégradation insensible ([1]).

Pour étudier ce qui se passe quand la lumière du soleil traverse
iquement un morceau de verre, Képler se servit d'un prisme de
re équilatéral ([2]). L'expérience se fait très simplement : le
me (que l'on n'a pas besoin de prendre équilatéral, si l'on ne
t que constater la dispersion) est placé sur le trajet d'un fais-
 solaire, qui pénètre dans la chambre obscure par un trou
it de forme quelconque, l'arête du prisme étant perpendicu-
 au plan moyen d'incidence; l'image reçue sur un écran

Virgula solet fieri vitrea, striata vel pluribus angulis in modum clavæ to-
 hæc, si ex transverso solem accipit, colorem talem qualis in arcu videri
 reddit. — Videmus in eo (arcu) aliquid flammei, aliquid lutei, aliquid
lei, et alia in picturæ modum subtilibus linæis ducta, ut ait poeta; ut an
miles colores sint scire non possis, nisi cum primis extrema contuleris.
QUE, *Questions naturelles*, liv. I, 7 et 3.)

KEPLER, *Dioptrice*, p. 6. Augusta Vindelicorum (Augsbourg); 1611.

apparaît dilatée perpendiculairement à l'arête du prisme et colorée des nuances les plus vives.



Fig. 315

Explication de Newton. — Complexité de la lumière blanche. — Newton le premier [1] fit connaître la vraie raison du phénomène en le rapportant à l'hétérogénéité de la lumière blanche, qu'il affirme être formée d'une infinité de lumières simples, caractérisées à la fois par leur réfrangibilité et par leur coloration.

Dans la théorie ondulatoire, une lumière, comme un son, est définie par sa période, immuable à travers tous les phénomènes (sauf certains cas très spéciaux) : la coloration et la réfrangibilité dépendent de cette période. La période étant donnée, la longueur d'onde dans un milieu où la propagation s'effectue avec une certaine vitesse est par là même connue. En optique, on définit ordinairement une lumière par sa longueur d'onde dans le vide : c'est à cette quantité par conséquent que l'on rattachera la réfrangibilité et la coloration.

Pour que l'allongement de l'image prouve réellement la complexité de la lumière, il est nécessaire que le prisme soit placé au minimum de déviation. En effet, dans l'hypothèse où tous les rayons du faisceau solaire auraient même indice, comme ils rencontrent le prisme sous des incidences différentes, ils éprouveraient

[1] Newton, *Optics*, London ; 1704.

énéralement des déviations inégales, qui amèneraient un allongement de l'image dans le plan de réfraction. Mais, au voisinage du minimum, la déviation, ne variant qu'infiniment peu avec l'incidence, sera la même pour tous les rayons du faisceau étroit considéré, bien qu'un seul de ces rayons soit rigoureusement à l'incidence voulue pour le minimum ; et l'effet du prisme sera de faire tourner le faisceau en bloc d'un certain angle. On peut alors affirmer que si les rayons composant le faisceau avaient même indice de réfraction, ils projetteraient sur un écran une image de mêmes dimensions que s'ils n'avaient pas traversé le prisme. Au contraire, si la lumière blanche est constituée par divers rayons ayant des réfrangibilités différentes, il y aura autant d'images que le rayons divers ; et la réunion de toutes ces images élémentaires roduira une tache allongée perpendiculairement à l'arête réfringente.

Relation entre la coloration et la réfrangibilité. — En même temps que l'image s'allonge, elle se colore des teintes de l'arc-en-el. La coloration est en effet le caractère physiologique (un peu gue) d'une lumière, comme la réfrangibilité en est le caractère ysique. C'est ce que Newton prouva par des expériences variées, stituées toutes en vue de montrer que les rayons qui diffèrent couleur diffèrent aussi de réfrangibilité :

1° Sur un papier noir, il traça l'un à côté de l'autre deux tangles qu'il recouvrit soigneusement l'un de couleur rouge, tre de couleur bleue. Regardant à travers un prisme le papier n éclairé, il trouva la partie bleue plus déviée que la rouge.

' Il prit avec une lentille successivement l'image de chaque ngle, contre lequel il appliqua un fil de soie noir et fin, de à pouvoir mettre l'écran exactement au point : l'image bleue rut plus près de la lentille que la rouge.

expériences faites à dessein d'abord avec des couleurs maté- se répéteront ensuite beaucoup plus exactement avec les rs mêmes du spectre.

tre solaire. — On nomme spectre solaire l'apparence colorée au delà du prisme par les rayons du soleil, lorsque toute blanche a disparu du milieu de l'image, résultat qui s'ob- ujours quand les rayons pénètrent dans la chambre obscure

par une ouverture assez étroite et que l'écran est situé à tance assez grande du prisme.

D'après Newton, on distingue dans le spectre sept coule cipales (¹) :

rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo, violet.

L'ouverture par laquelle entrent les rayons étant touj posée très étroite, la forme du spectre est celle d'un rectan par deux demi-cercles (ou plus généralement deux demi- Chaque faisceau de rayons différents donne en effet u circulaire ayant le diamètre apparent du soleil. Il résul de là que les couleurs manqueront de p suite de l'empiètement des diverses i unes sur les autres.



Fig. 316

Faits à l'appui de l'explication de N Par ce procédé imparfait Newton est c parvenu à vérifier l'exactitude de son h *les rayons différemment colorés sont in réfrangibles, mais ils sont caractérisés indice de réfraction, de telle sorte que d de même indice se comportent toujours*

Les expériences qui le prouvent sont no

a) *Polyprisme.* — Le polyprisme (426) permet d'étudier mène de la dispersion avec toutes les substances que l'on ve tous les angles possibles. Dans tous les cas le phénom essentiellement le même. La dispersion n'est donc pas priété spéciale, se manifestant dans certaines circonstan culières, mais bien le résultat d'une loi générale. La lumiè se compose d'un grand nombre de rayons distincts; et l qui ont des indices de réfraction différents dans une sub

(¹) Newton croyait à une répartition fixe des couleurs dans le spectre fût la matière du prisme (ce qui n'est pas). Il chercha donc la loi nu cette succession, et, croyant la trouver dans la gamme phrygienne, arbitrairement sept couleurs, dont les limites se partagèrent l'interva comme les sept notes *ut ré mi♭ fa sol la si♭ ut* divisent la corde du en parties respectivement égales à $\frac{8}{9}\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{5}\,\frac{9}{16}\,\frac{1}{2}$; le premier $1 : \frac{8}{9}$ correspondant au violet, le deuxième $\frac{8}{9} : \frac{5}{6}$ à l'indigo..., $\frac{9}{16} : \frac{1}{2}$ au rouge.

ont encore différents dans une autre, le signe de la différence restant habituellement le même.

b) *Réflexion totale.* — Le phénomène de la réflexion totale fournit à Newton un nouvel argument en faveur de ses idées. L'angle limite étant défini par la relation $\sin \lambda = \frac{1}{n}$ ne sera pas le même pour les divers rayons : telle incidence, sous laquelle le rayon rouge passera du verre dans l'air, amènera la réflexion totale du rayon violet à la surface de séparation des deux milieux. De là l'expérience suivante : un faisceau de lumière blanche frappant l'un des côtés d'un prisme isocèle ABC, poli sur ses trois faces, et donnant vers la base un spectre VR_1, on fait tourner le prisme autour de son axe jusqu'à ce que l'angle des rayons intérieurs avec la base atteigne la valeur limite relative à la lumière la plus réfrangible : le violet disparaît du spectre et va se réfléchir dans une situation $S'S'_1$,

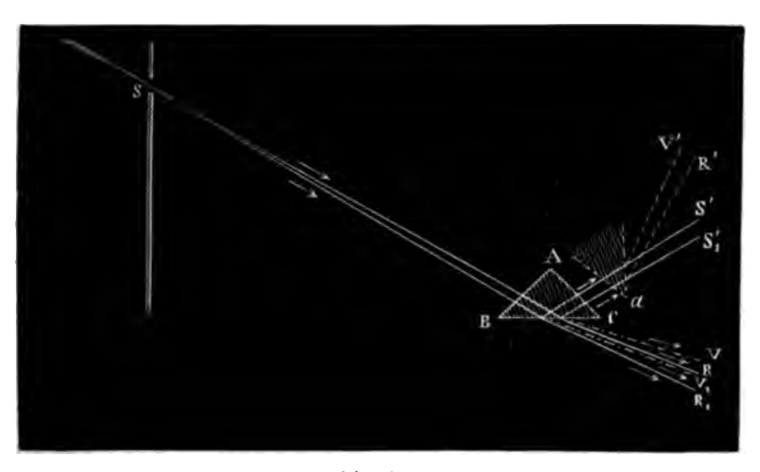


Fig. 317

symétrique des rayons incidents. Continuant à tourner le prisme dans le même sens, on verra l'indigo abandonner à son tour le spectre pour émerger parallèlement au violet, puisque chaque rayon réfléchi sur la base doit sortir en faisant avec le second côté le même angle qu'il fait à l'entrée avec le premier côté. Le faisceau indigo se superpose donc au faisceau violet et change la teinte de l'image réfléchie. Cette teinte se modifie ainsi graduellement à mesure que l'on tourne le prisme et finit par atteindre le blanc.

Mais avant que la réflexion soit totale pour aucune lumière, elle est partielle pour toutes, de sorte qu'il y a toujours un faisceau de lumière blanche réfléchie par la base. Ce faisceau se colorera en violet quand les rayons violets éprouveront la réflexion totale, et l'on observera ainsi la succession de couleurs indiquée plus haut, ces couleurs étant lavées de blanc qui leur enlève tout éclat. D'où la nécessité de modifier l'expérience par l'interposition d'un prisme *a* sur le trajet des rayons réfléchis. Ce prisme donne un deuxième spectre V'R', d'abord très pâle, dont les couleurs se renforcent vivement à mesure qu'elles disparaissent du premier.

On peut varier l'expérience, d'après Herschell et Wollaston, en recevant sur le prisme un large faisceau de lumière blanche, provenant d'une fenêtre par exemple. Si l'on dispose l'instrument dans une direction telle que pour tous les éléments d'un rayon blanc déterminé la réflexion soit totale, l'œil placé au-dessus verra la

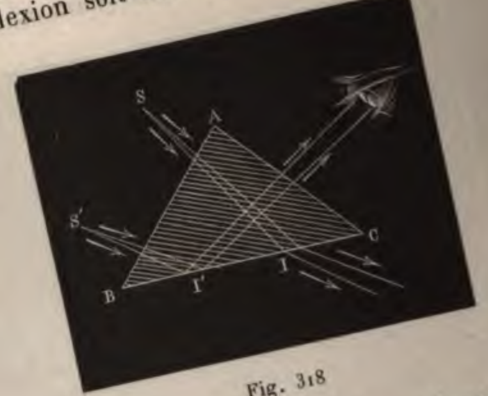


Fig. 318

base du prisme partagée en deux régions : l'une, très lumineuse où la réflexion est totale pour tous les rayons colorés, l'autre, pe[u] éclairée, où se réfléchit seulement la partie non réfractée d[e] chaque rayon, et entre les deux une bande colorée dans laquel[le] dominent les teintes violettes et bleues. Si l'œil est placé au-dessou[s] il distingue une région complètement obscure (par suite de l[a] réflexion totale), une région éclairée, et entre les deux une zon[e] où manquent d'abord les rayons violets, d'aspect rougeâtre par co[n]séquent dans sa partie la plus intense.

c) *Lentilles.* — Une autre preuve en faveur de l'hypothèse

Newton se trouve dans l'action des lentilles sur la lumière blanche. La distance focale d'une lentille convergente, dont les faces ont respectivement pour rayons R et R', est définie par la formule

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right);$$

cette distance f doit donc diminuer du rouge au violet à mesure que n augmente. En effet, quand la lumière solaire vient frapper une lentille convergente, les rayons violets convergent plus près de la lentille que les rayons rouges.

C'est ce que l'on peut montrer en coupant le faisceau avec un écran. Entre la lentille et le foyer des rayons violets, l'écran offre un cercle blanc bordé de rouge. Au delà du foyer des

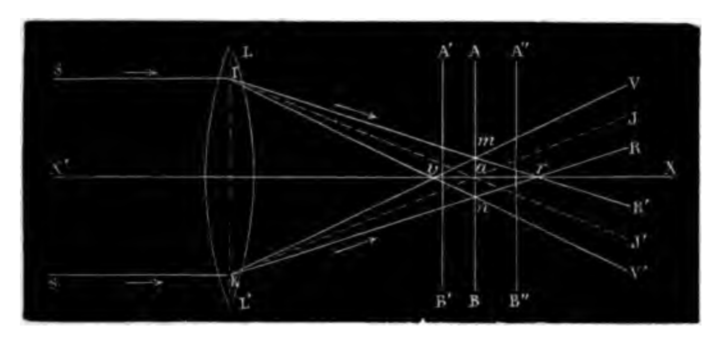


Fig. 319

rayons rouges, on voit au contraire une tache blanche entourée d'une bande violette. Entre les deux foyers extrêmes, le phénomène est plus complexe : si l'intersection du faisceau lumineux paraît sensiblement blanche en AB, cela tient simplement à ce que les divers rayons se croisent dans un espace très resserré ; mais en réalité ils ne donnent nulle part du blanc : on le reconnaît facilement en recevant la lumière sur une loupe.

Au lieu de couper le faisceau en différents points avec un écran, on peut le rendre visible au moyen de poussière de craie, et faire voir ainsi à une assemblée nombreuse qu'il est constitué comme nous venons de l'indiquer. Ainsi opérait Charles dans ses fameuses

convexe, de surface un peu grande, recevait la lumière
la page imprimée. Il cherchait la position que dev
une feuille de papier blanc, de l'autre côté de la le
qu'on y pût lire distinctement les caractères; il déter
très exactement la position de l'image formée par les
éclairaient alors le livre. Le soleil se déplaçant, la t
rayons changeait; et si elle passait du rouge au viol
rapprocher à mesure le papier de la lentille pour voi
l'image.

Simplicité des rayons séparés par le prisme. — Les
suivantes ajoutent un résultat important à celui que
de constater. Tous les phénomènes examinés jusqu'ici
si l'on admet que la lumière blanche se compose de ray
ment colorés, caractérisés par leur réfrangibilité. Il rest
si les rayons séparés par le prisme étaient des éléments

Malgré l'imperfection de ses procédés expérimenta
réussit à montrer qu'un faisceau de rayons, dont l'indic
tion est le même par rapport à un prisme, se comporte
les circonstances comme un système unique.

a) *Expérience des prismes croisés.* — L'expérience
croisés est une preuve très élégante de cette simplic
ments du spectre solaire. Derrière un premier pris
pour donner un spectre, on en met un autre de m
et de même angle, mais perpendiculaire au premi
qu'un plan normal aux arêtes du second prisme c

prisme a provoqué une séparation complète des éléments. En opérant ainsi que l'indique la figure ci-contre, on recueillera sur l'écran quatre images : l'image directe *s*, les deux spectres, *ru* et





Fig. 320

r″u″, produits isolément par les prismes P et P′, enfin un spectre incliné à 45°, *r′u′*, provenant des rayons réfractés par les deux prismes. Or la largeur de ce dernier spectre est égale à celle de chacun des spectres dus à une seule réfraction. Il est donc prouvé que tous les rayons qui dans le premier spectre rencontrent une même ligne verticale ont même indice de réfraction.

b) *Inaltérabilité d'un pinceau isolé.* — Semblablement, toutes les fois que l'on isole dans un spectre un pinceau assez étroit (au moyen d'un trou *m* percé dans l'écran MN) et qu'on le reçoit sur un nouveau prisme A′, on observe une déviation sans élargissement ni coloration du pinceau.

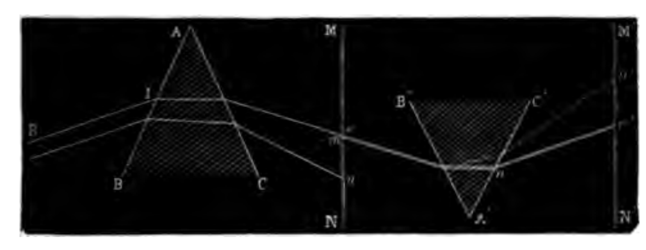


Fig. 321

A vrai dire, ces expériences trahissent toujours quelque imperfection; si elles ne laissent aucun doute sur cette proposition que les rayons du spectre sont simples, elles attestent la difficulté d'obtenir un spectre pur.

c) *Éclairement par une lumière simple.* — Dans le même ordre d'idées, on peut citer ce fait qu'une lumière colorée tombant sur

un corps n'éprouve pas les mêmes modifications que la lumière blanche. Tandis que celle-ci se colore par suite de l'inégale diffusion de ses éléments à la surface du corps, la lumière simple conserve toujours sa teinte, son intensité seule variant d'après la manière dont elle est diffusée par le corps ([1]). La couleur d'une lumière du spectre ne dépend donc nullement du corps sur lequel elle tombe, son éclat seul change.

Recomposition de la lumière blanche. — Newton a contrôlé cette analyse par une série d'expériences réciproques où, réunissant les rayons qu'un prisme a séparés, il reproduit de la lumière blanche :

a) *Recomposition par les sept miroirs.* — L'une des plus naturelles en principe, mais d'une exécution assez pénible, consiste à réfléchir vers un même point les divers rayons du spectre. En guise de réflecteur, Newton se contentait du mur sur lequel se dessinait le spectre : un papier tenu à la main paraissait blanc quand il était également éclairé par les différentes couleurs. On

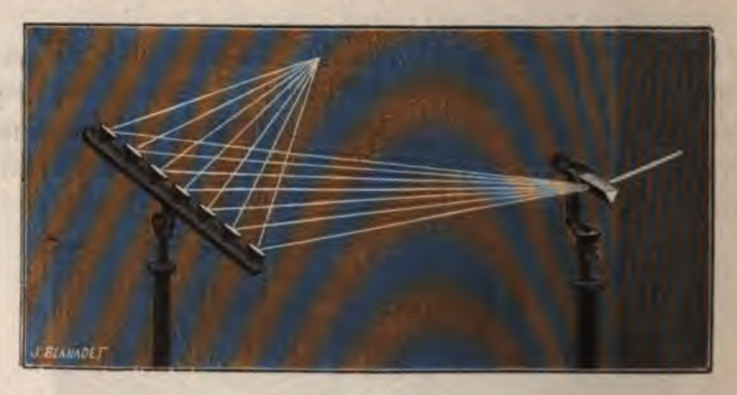


Fig. 322

s'aide maintenant de sept petits miroirs circulaires, montés sur une même règle le long de laquelle ils se déplacent à volonté. On reçoit le milieu de chacune des sept couleurs principales sur le centre de chacun des miroirs et, en inclinant convenablement ceux-ci, on rassemble toutes les couleurs en un point unique où elles donnent de

([1]) L'aspect de figures humaines, ou simplement d'images d'Épinal, éclairées par la lumière, sensiblement monochromatique, de l'alcool salé, est fantastique.

'e blanche. On peut même apprécier ainsi les résultats du des couleurs, mais sans précision, les couleurs isolées sur niroir n'étant rien moins qu'homogènes.

omposition par les prismes. — Un autre moyen est de l'effet du premier prisme par un deuxième. L'expérience plusieurs façons.

re un prisme P projetant un spectre bien pur on place un risme P', identique au premier, mais tourné en sens con-

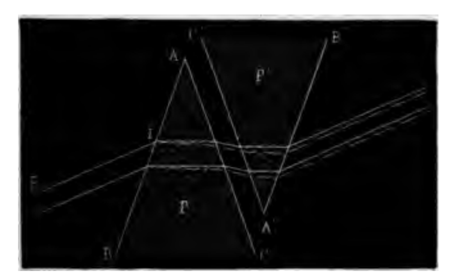


Fig. 323

i ce second prisme est assez rapproché du premier pour 'ayons sortant de celui-ci soient encore en grande partie és, ces rayons, ramenés au parallélisme, formeront un fais-umière blanche, sauf vers les limites qui seront irisées, l'une ;, l'autre en violet, comme le montre la figure ci-jointe. sert aussi d'une cuve quadrangulaire de verre, divisée prismes égaux par une lame transversale : si l'on verse dans l'un des compartiments, on a un spectre faible, quoi-ement visible; si l'on verse en outre de l'eau dans le compartiment, on voit émerger un faisceau de lumière et blanche.

recomposition par des réfractions égales et inverses se ncore avec un seul prisme, ainsi que l'a indiqué Charles ıne ancienne expérience de Képler. Un prisme équilatéral ı faisceau de lumière solaire sous l'incidence correspondant num de déviation ; et de chaque face du prisme émergent à la isceau de rayons dispersés et un faisceau de lumière blanche. ure 324, dans laquelle on a tracé la marche d'un rayon, rend immédiatement du phénomène. Une portion du rayon en I se réfléchit suivant IR ; l'autre portion pénètre dans

le prisme, émerge en partie et donne le spectre *ru*, se réfléchit en partie et vient rencontrer la troisième face BC : là, le pinceau I'I'I'₁I'' se partage encore en deux, l'un émergent I''R', l'autre réfléchi I''I'''. Or, d'après la symétrie de la figure, il est aisé de reconnaître que

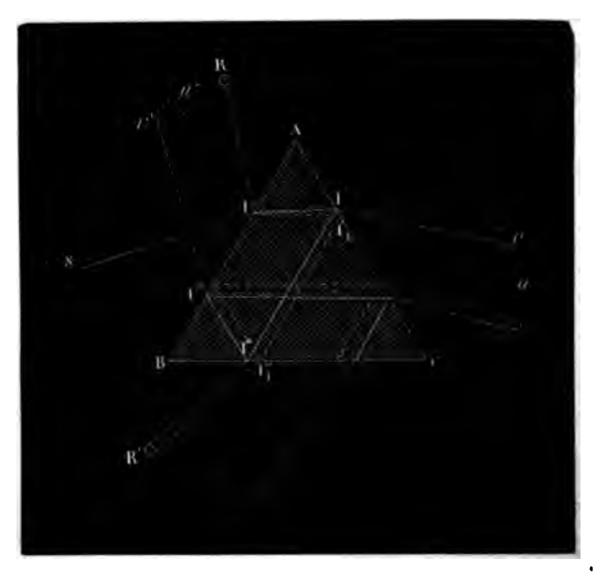


Fig. 324

pour chaque rayon simple l'angle d'incidence intérieure en I'' est égal à l'angle de réfraction intérieure en I. Tous ces rayons à leur sortie deviendront donc parallèles et formeront avec les autres rayons du faisceau une image blanche (excepté sur les bords). Quant au pinceau réfléchi I''I''₁I'''I'''₁, il est par rapport à la face BC exactement dans les mêmes conditions où se trouvait par rapport à la face AB le pinceau II'I'₁ après la première réfraction en I ; il produira donc à l'émergence en I''' un spectre *r'u'* dans lequel les couleurs seront distribuées comme à l'ordinaire, le rouge étant du côté de l'arête réfringente B. Finalement l'on aura en tout les six faisceaux indiqués sur la figure ([1]).

Parmi ces faisceaux d'intensités décroissantes, Képler avait seule-

([1]) Le faisceau de lumière blanche qui sort par la face AC ayant la direction des rayons jaunes moyens au minimum de déviation, on a toujours un trait de lumière blanche au milieu du spectre *ru* produit par un prisme équilatéral, à moins de noircir la face BC.

it signalé les trois premiers R, *ru* et R′, l'un blanc, l'autre ré et le troisième empruntant la teinte du verre qu'il a traé ([1]), sans expliquer le défaut de coloration en R′ autrement par une absence de réfraction en I″.

Recomposition par les lentilles. — Si l'on dispose une lentille vergente ([2]) à une assez grande distance au delà du prisme, les ons, déjà très notablement séparés à leur arrivée sur la lentille, ent un spectre bien net près du plan focal principal, chaque èce de rayons allant converger en son foyer respectif *f*, *f*′. Puis, ırsuivant leur marche, ils s'entrecroisent et vont se superposer *ab* dans le plan focal conjugué du prisme : en effet, les rayons diverses couleurs, partis d'un même point *m* du prisme, se réusent sensiblement au point *m*′, conjugué de *m* pour les rayons yens. Dans ce plan on aura donc une tache blanche *ab* (sauf sur bords extrêmes, dont on peut éliminer l'influence par l'emploi n diaphragme à l'exemple de Foucault). En avant de ce plan, la

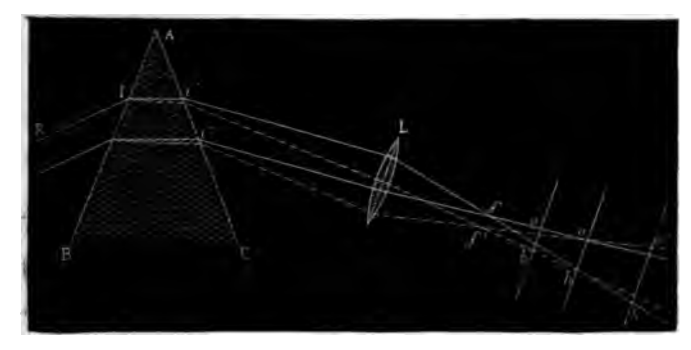


Fig. 325

omposition est incomplète; en arrière, elle l'est également, la ersion se prolongeant en sens inverse. Effectivement, si l'on e une lame de porcelaine dépolie dans le plan focal conjugué la face d'incidence, on voit une tache blanche; mais si l'on y un miroir poli, on voit un spectre coloré, parce que les divers ons réfléchis régulièrement se sépareront comme s'ils avaient inué leur route directe au delà de ce point.

Sole prisma irradiante tria genera radiorum resultant, sincerus, vitri colore dibus coloribus (KEPLER, *loc. cit.*).
Un miroir concave produirait le même effet.

déterminé [1]. Parmi les couleurs du spectre, sont c
taires, d'après M. von Helmholtz [2],

Rouge	et	*Bleu-verdâtre*
Orangé		*Bleu*
Jaune		*Bleu-indigo*
Jaune-verdâtre		*Violet.*

Le *Vert* du spectre n'a pas de couleur complémentair
a pour complément le *Pourpre*, couleur composée pr
mélange des couleurs simples (violet et rouge) qui se tr
deux extrémités du spectre.

Recomposition par la superposition des effets physiol
Il est encore un mode de recomposition de la lumière,
physiologique, qui consiste à superposer rapidement su
une série d'images teintes des diverses couleurs du sp
suite de la persistance des impressions sur la rétine,
couleurs s'ajoutent comme si elles étaient simultanées.

On obtient aisément ce phénomène en faisant tourne
autour de son axe : alors le spectre oscille sur l'écra
position correspondant au minimum de déviation et
lumière disparaît par réflexion totale; et si le mouvemen
rapide, l'œil perçoit du blanc, sauf aux deux limites
parcouru par le spectre.

(1) HELMHOLTZ, *Optique physiologique*, trad. Javal et Klein, p. 365.

L'expérience bien connue du disque de Newton (expérience due Musschenbroeck) est une autre forme du même procédé [1].



Fig. 326

Conclusion. — Toutes ces expériences s'éclairent réciproquement et démontrent à la fois la loi de Descartes et celle de Newton.

La démonstration acquerra une entière rigueur si l'on opère avec des lumières vraiment simples. Nous nous sommes contentés jusqu'ici de faire arriver sur un prisme un faisceau parallèle ou très peu divergent, d'une certaine largeur, et de recevoir la lumière sur un écran situé à quelque distance; mais sur cet écran les diverses taches lumineuses, produites par les innombrables rayons différemment réfrangibles qui constituent le faisceau incident, se recouvrent les unes les autres en grande partie: la séparation des couleurs est manifestement incomplète.

Procédé pour obtenir un spectre pur. — Pour obvier à cet inconvénient, Newton eut recours au procédé suivant, dont la portée n'a été bien comprise que de nos jours: la lumière, admise par une fente parallèle à l'arête du prisme placé au minimum de déviation pour les rayons moyens, tombe sur une lentille convergente qui donne dans le plan conjugué de la fente un spectre pur. Sans doute, le prisme n'est rigoureusement aplanétique que pour les seuls rayons dont la route est exactement symétrique (et à la condition encore qu'elle se tienne tout près de l'arête); mais il l'est encore très approximativement pour chacun des faisceaux simples primitivement superposés dans la lumière incidente et qu'il sépare en les déviant inégalement, de sorte qu'une lentille achromatique

[1] On la réalise très bien en projection avec un disque en gélatines colorées.



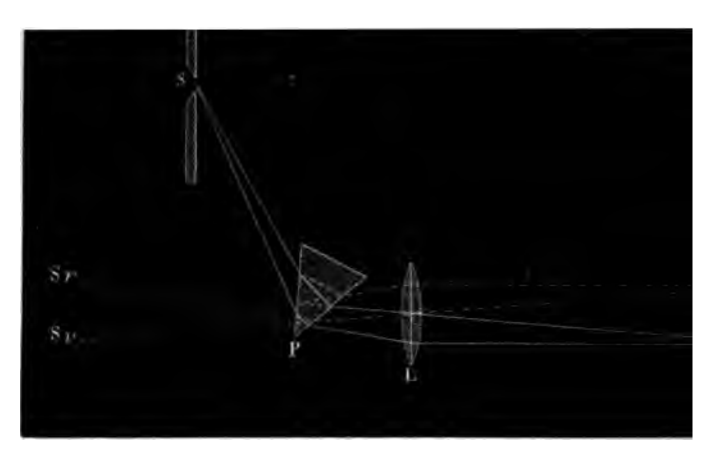


Fig. 327

lumière assez d'intensité, ce qui implique une certaine fente. Quand on diminue progressivement cette largeur un spectre dont un faisceau étroit, reçu sur un nouv n'éprouve plus d'élargissement appréciable (¹).

Raies de Fraunhofer. — Si donc les divers rayons forment pas une suite continue dans la lumière spectre devra présenter des espaces obscurs. On l

(¹) Newton opérait avec une fente ayant la forme d'un triangl allongé dont la base était parallèle à l'arête du prisme, de sorte bouts la largeur était extrêmement réduite. On emploie aujourd' à bords parallèles et mobiles. On n'aura d'ailleurs qu'à copier exact positif de Newton : on prendra un objectif de lunette astrono

ıent en répétant .ce de Newton, qui pas vus lui-même te à cause de la qualité des verres lisposait. Wollas- signala pour la pre- le Fraunhofer (²) avec soin et en que nous repro- contre, réduit à

les huit raies prin- sies par Fraun- r séparer à peu sept couleurs du

trême rouge;
e rouge;
le rouge et l'orangé;
l'orangé et le jaune;
le jaune et le vert;
le vert et le bleu;
l'indigo et le violet;
trême violet.

ɔit encore noter :

assez large dans le
xtrême ;
ɔle très apparente
vert.

ssus est figurée e des intensités lu- s relatives, telles

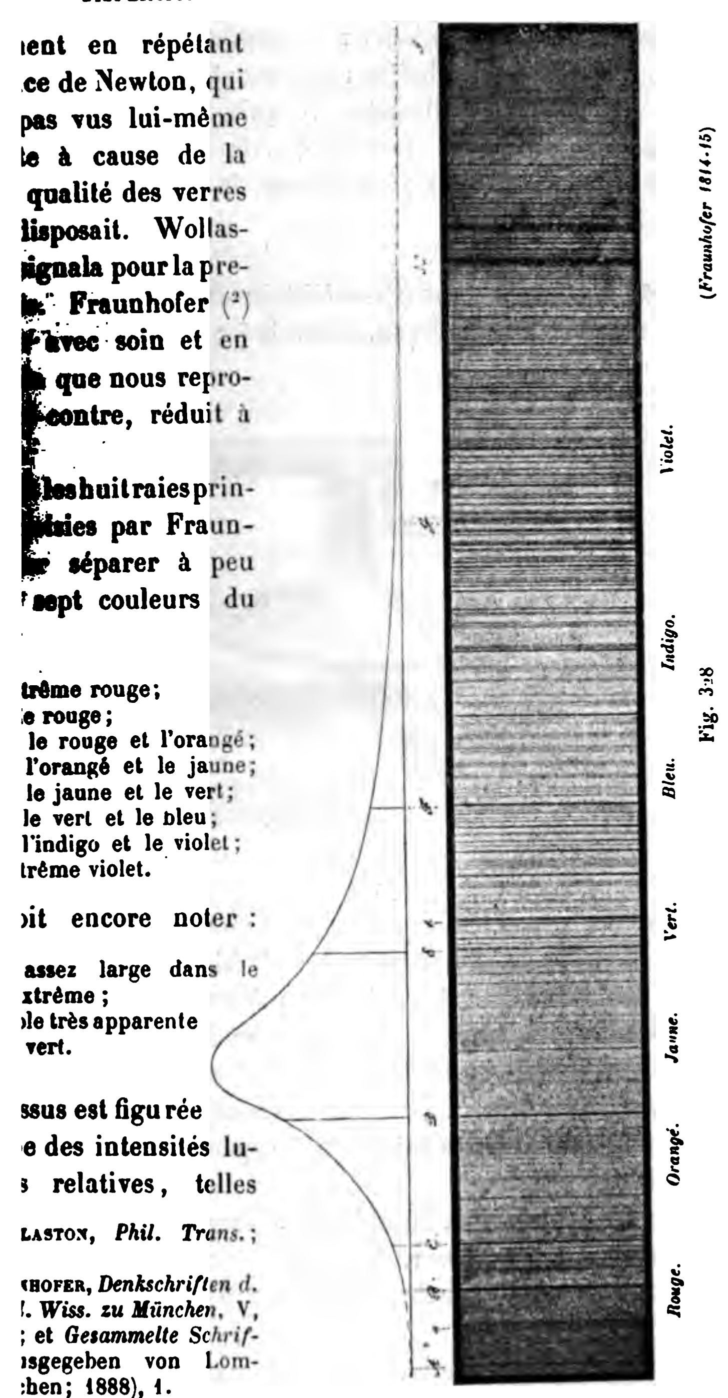


Fig. 328

LASTON, *Phil. Trans.*;

NHOFER, *Denkschriften d.* *l. Wiss. zu München*, V, ; et *Gesammelte Schrif-* ısgegeben von Lom- :hen; 1888), 1.

que les estimait Fraunhofer : le maximum se trouve dans le jaune, et la courbe s'abaisse rapidement du côté des rayons peu réfrangibles (on ne distingue A qu'à l'aide d'un verre rouge éliminant toute autre lumière); elle descend moins vite de l'autre côté, et certains yeux suivent le spectre très loin au delà du violet.

434. Spectroscope ([1]). — *Histoire du spectroscope.* — Au lieu de la recevoir sur un écran, Fraunhofer observait directement à

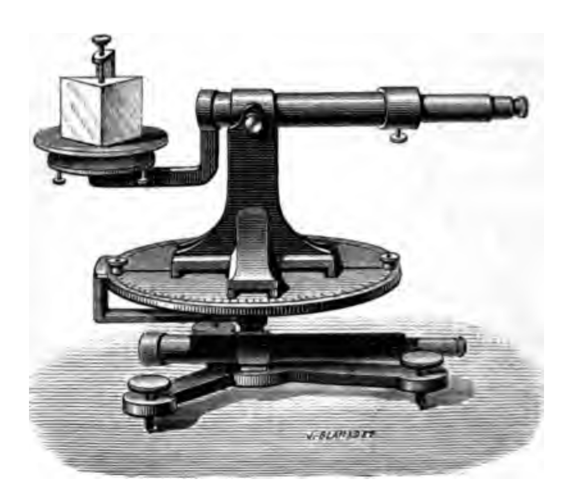


Fig. 329

l'aide d'une loupe l'image aérienne du spectre. Cette loupe formant avec la lentille de projection une véritable lunette, il monta sur le cercle horizontal d'un théodolite un prisme et une lunette astronomique à travers laquelle il visait une fente étroite, parallèle à l'arête réfringente et suffisamment éloignée. Il put ainsi mesurer les déviations correspondant aux différentes raies, et par suite fixer la position exacte de ces raies dans le spectre de réfraction que lui donnait son prisme.

Trente ans plus tard, Matthiessen ([2]) reprit l'étude du spectre au moyen de son *lentiprisme*, dans lequel une fente très étroite était examinée avec une simple lentille à laquelle s'accolait un prisme

([1]) Voir Salet, *Traité de spectroscopie*. Paris, Masson; 1888.
([2]) Matthiessen, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XL, 385; 1844.

recevant normalement les rayons et les projetant sous un angle assez ouvert; un petit prisme B les ramenait dans une direction voisine de l'axe, et un verre coloré venait au besoin s'inter-

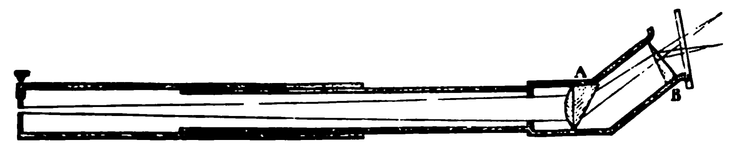


Fig. 330

ser. Les pertes de lumière étant faibles, l'éclat restait considérable; grâce à la finesse de la fente, la netteté était grande. Il importe effet de remarquer qu'avec une fente étroite, la netteté est à u près indépendante des angles d'incidence et d'émergence, car rs il y a toujours une véritable image parallèle à l'arête; et oique le minimum de déviation facilite la construction et le glage, cette condition n'est nullement nécessaire. D'après Broch (1), distingue bien les raies en regardant une fente étroite, un peu ignée, à travers un prisme placé contre l'œil et que l'on tourne manière à amener l'image de la fente à la distance minimum la vision distincte.

MM. Fizeau et Foucault (2) revinrent à la disposition de Fraunfer et, remplaçant la fente éloignée par un collimateur suivant xemple de Babinet, ils constituèrent l'appareil auquel Masson (3) nna la forme représentée figure 194, et que Kirchhoff et Bunn (4) employèrent quelques années plus tard avec tant de succès us le nom de spectroscope.

Spectroscope de Kirchhoff et Bunsen. — Les deux savants d'Heilberg ajoutèrent un deuxième collimateur portant au foyer de lentille une échelle divisée dont l'image, réfléchie sur la face prisme par laquelle sortait la lumière dispersée, s'observait dans lunette en même temps que le spectre et permettait d'en repérer s raies. Au premier collimateur, sur la moitié supérieure de la

(1) Broch, *Nyt. Magaz. f. Naturvidensk.*, IV; 1845.
(2) Fizeau et Foucault, d'après le Rapport de Babinet sur deux mémoires résentés en 1845 et 1846, *C.R.*, XXVI, 680; 1848.
(3) Masson, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XL, 385; 1854.
(4) Bunsen et Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, CX, 161; 1860.

fente, on plaça un petit prisme à réflexion totale pouvant recevoir la lumière d'une source latérale, tandis que le reste de la fente était directement éclairé par une autre source : on obtient ainsi exactement l'un au-dessus de l'autre les spectres des deux sources,

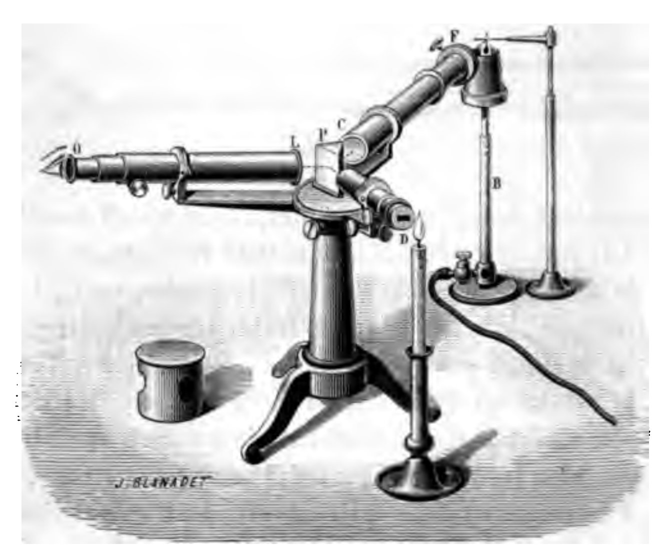


Fig. 331

ce qui facilite la comparaison. Enfin, le prisme, fixé dans la position correspondant à la déviation minimum des rayons jaunes, fut recouvert d'une sorte de chapeau cylindrique percé seulement de trois trous en face des trois lunettes.

Étude théorique de l'appareil. — La dispersion a pour mesure la variation de la déviation correspondant à une variation donnée de l'indice.

Si donc nous considérons un prisme d'angle A, recevant la lumière sous une incidence i, et la projetant par conséquent sous l'angle i' défini, d'après les formules (1) (426), par la relation

$$\sin i' = n \sin (A - r)$$

ou

$$\sin i' = \sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos A \sin i \qquad (3)$$

et si nous différencions cette équation en regardant A et i comme

constants, nous aurons la *dispersion élémentaire* ou le *pouvoir dispersif*

$$di' = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r} dn \ (^1). \qquad (4)$$

Si au contraire nous différencions l'équation (4) en regardant n comme constant et i comme variable, δi représentant la largeur angulaire de la fente vue du centre du collimateur, $\delta i'$ exprimera la largeur angulaire d'une raie, tandis que di' est la distance de deux raies d'indices très voisins

$$\delta i' = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \delta i : \qquad (7)$$

$\frac{\delta i'}{\delta i}$ est *le pouvoir amplifiant* du prisme ([2]). Le rapport entre la distance et la largeur de deux raies voisines, c'est-à-dire la *pureté* ou *le pouvoir de résolution* est donc

$$\frac{di'}{\delta i'} = -\frac{\sin A}{\cos i \cos r'} \frac{dn}{\delta i} \qquad (8)$$

Le pouvoir de résolution et le pouvoir dispersif (abstraction faite des phénomènes de diffraction) ne dépendent que des quantités $\cos i \cos r'$ et $\cos i' \cos r$, quantités symétriques qui varient en sens inverse entre les mêmes limites et passent par un maximum identique, que l'une atteint pour $r = n^2 r'$, l'autre pour $r' = n^2 r$, approximativement. Il y a donc de part et d'autre du minimum de déviation un minimum de dispersion et un minimum de résolution.

Si i varie depuis l'incidence rasante jusqu'à la valeur correspon-

([1]) Dans le cas du minimum de déviation déterminé par les formules (2), cette expression devient

$$di' = \frac{2 \operatorname{tg} i}{n} dn, \qquad (5)$$

ou

$$di' = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} dn. \qquad (6)$$

([2]) Quand la déviation est minimum, $\delta i' = \delta i$: le pouvoir amplifiant est alors égal à l'unité.

dant à l'émergence rasante, le pouvoir dispersif descend lentement au minimum, puis croît jusqu'à l'infini. Le pouvoir de résolution suit une marche inverse, décroissant depuis l'infini jusqu'à un minimum à partir duquel il ne croît que très peu.

Une expérience de Thollon (¹) montre bien ce double effet. Tandis qu'un prisme de flint, installé sur la platine d'un spectroscope, reçoit la lumière d'une lampe à chlorure de sodium (lumière qui, nous le verrons bientôt, se réduit à la double raie D), on règle la largeur de la fente de sorte que, pour la déviation minimum, les deux raies D soient juste au contact. Si alors on tourne le prisme de manière à augmenter l'incidence, les deux raies se séparent quoique leur distance diminue. Elles se confondent en une bande unique qui va s'élargissant quand on tourne en sens inverse.

Mais on ne peut pas accroître indéfiniment l'incidence : car, outre la diffraction qui s'oppose aux incidences rasantes, les imperfections des surfaces et les défauts d'homogénéité de la matière ne tardent pas à déformer les images, puis les pertes par réflexion augmentent, surtout avec les substances très dispersives, qui ont en même temps des indices élevés, telles que les flints lourds ou le sulfure de carbone (²).

Spectroscopes à plusieurs prismes. — On préfère donc multiplier les prismes, comme MM. Fizeau et Foucault l'ont fait les premiers. De là ces spectroscopes dans lesquels la lumière traverse successivement plusieurs prismes identiques, disposés suivant une ligne polygonale régulière. Ces prismes, étant tous placés au minimum pour un certain rayon (³), peuvent ne plus être suffisamment réglés pour des rayons un peu éloignés : le constructeur devra donc leur laisser de la

(¹) Thollon, *C. R.*, XCII, 128, 1881.

(²) Si la fente est un peu longue et la source d'un diamètre apparent tel que du haut de la fente partent des rayons venant frapper le bas du prisme, et inversement, ces rayons inclinés sur la section droite se réfracteront parallèlement à cette section comme s'ils avaient pour indice $\sqrt{n^2+(n^2-1)\operatorname{tg}^2\theta}$, ils seront donc plus déviés que ceux qui tombent normalement sur le prisme : les raies se courberont en tournant leur concavité vers le violet et s'estomperont à leurs extrémités.

(³) La déviation peut être minimum par rapport à un système de prismes sans l'être pour chacun d'eux séparément; si cette dernière condition est remplie, la déviation est minimum minimorum.

mobilité [1]. Dans quelques appareils les prismes sont très nombreux : tel celui de M. Gassiot [2] réunissant onze prismes à sulfure de carbone, et produisant entre les deux raies D un écart de 3′.



Fig. 332

On peut diminuer le nombre des prismes en ramenant le rayon sur lui-même par réflexion sur un miroir, qui parfois est constitué simplement par la face extrême argentée, comme dans le spectroscope vertical de Duboscq (fig. 333). Le plus souvent, on emploie deux miroirs convenablement inclinés ou un prisme à double réflexion totale, de façon à replier le rayon dans un plan parallèle, ainsi que le fait voir la figure 334.

Le premier système a été adopté par M. Cornu [3] dans un spectroscope où il a réussi à obtenir une très grande dispersion avec un seul prisme traversé quatre fois par le rayon et une lunette à long foyer, faisant office en même temps de collimateur et de viseur.

M. Young [4] a appliqué le deuxième système à son spectroscope

(1) Aux spectroscopes dits automatiques sont adaptés des dispositifs permettant de mettre à la fois tous les prismes à la déviation minimum pour une couleur donnée, par le seul jeu de la lunette visant sur cette couleur.
(2) Gassiot, *Proceed. of the R. S.*, XII, 536 ; 1863.
(3) Cornu, *Journal de physique*, (2), II, 53 ; 1883.
(4) Young, *Journal Franklin Institute*, LX ; 1872.

astronomique et M. Grubb (¹) à un appareil automatique où il avait réuni plusieurs de ces prismes composés qui servirent à

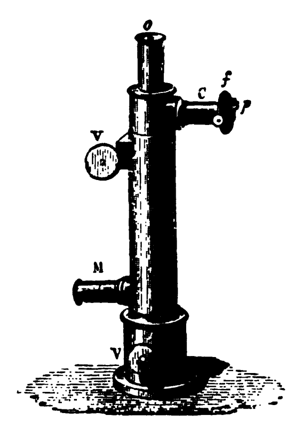




Fig. 333

M. Rutherfurd (²) pour ses travaux de photographie spectrale et que nous retrouverons dans l'instrument de Thollon.

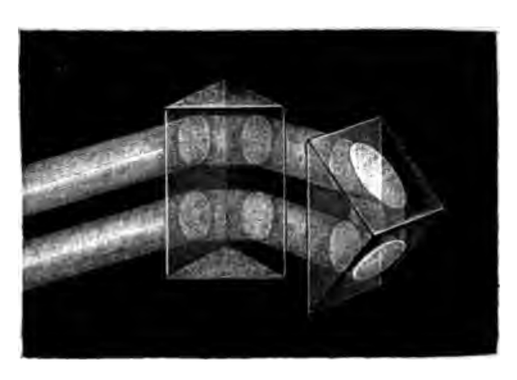


Fig. 334

Spectroscopes à vision directe. — Une classe intéressante est celle des spectroscopes à vision directe, avec lesquels, comme le nom l'indique, le spectre s'observe suivant la direction même des rayons incidents.

Profitant d'une combinaison imaginée par Amici, M. Janssen (³)

(¹) Grubb, *Monthly Notices of the R. Astron. Soc.*, XXX, 36 ; 1869-70.
(²) Rutherfurd, *Silliman's Journal*, XXXIX, 129 ; 1869
(³) Janssen, *C. R.*, LV, 576 ; 1862.

: premier construit un spectroscope à vision directe, au moyen cinq prismes : deux prismes en flint alternant avec trois prismes crown. La déviation imprimée à un rayon par l'ensemble est la 'érence des déviations produites séparément par les deux par- ; le flint et le crown dispersant inégalement, il est possible d'an- er la déviation pour une couleur, le jaune par exemple, sans la

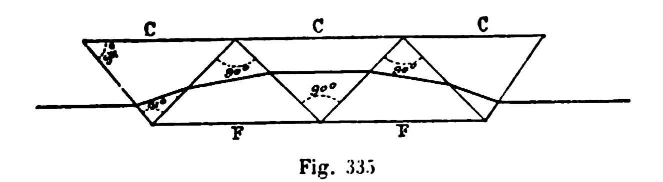


Fig. 335

'uire pour les autres. C'est l'effet inverse de l'achromatisme : umière sort de l'appareil sans déviation quant à sa direction 'enne, mais avec une dispersion de même sens que celle qui it due au flint seul.

: prisme compensé se place entre un collimateur et un viseur tés en ligne droite avec le prisme dans un seul tube, le viseur ant toutefois s'incliner légèrement de part et d'autre, de façon vre le spectre dans toute son étendue ([1]).

ec du flint très dispersif on peut n'employer que trois pris-

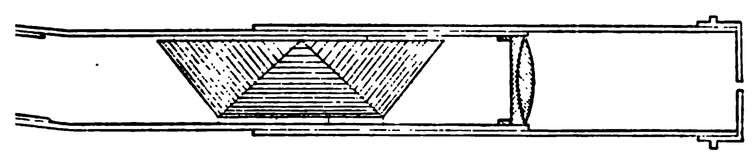


Fig. 336

: la figure 336 représente l'un de ces petits *spectroscopes de* *ie*, si répandus aujourd'hui : outre le prisme compensé, l'appa- comprend simplement une fente, qui s'ouvre plus ou moins à le d'un anneau fileté, et une seule lentille ([2]).

[1] Dans les appareils d'observation courante, Hoffmann remplace la lunette onomique par la lunette de Galilée, pour réduire la longueur de l'instrument.
[2] M. Mousson n'emploie qu'une fente et un prisme placé tout près de l'œil, ime dans l'expérience de Broch.

Si nous remarquons que le rayon moyen est nécessairement pe pendiculaire au plan bissecteur du prisme central, nous pourro même réduire le système à l'une des moitiés, d'après le procé adopté par M. Christie ([1]), dans son *demi-prisme amplifiant* représenté ci-contre. La dispersion est considérable ; mais, l'an d'émergence étant grand, les difficultés signalées plus haut re

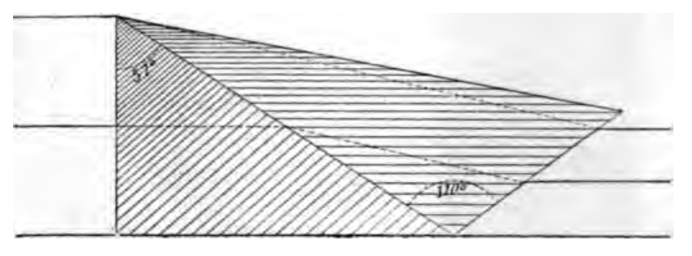


Fig. 337

raissent; et le flint très dispersif (densité 5), ne se trouvant p préservé du contact de l'air sur sa face d'entrée, s'altère vite.

M. Zenger ([3]) est revenu à la disposition la plus simple : de prismes, très aigus, l'un solide, l'autre liquide, d'indices moyen

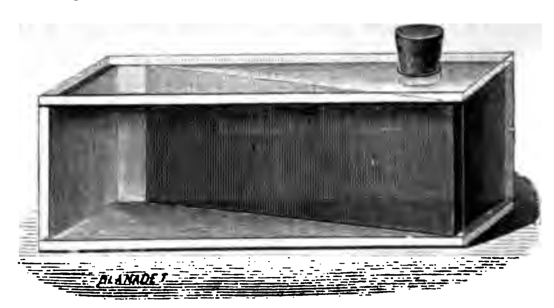


Fig. 338

voisins, mais de pouvoirs dispersifs très différents, par exemple crown et huile de cassia dissoute dans la benzine, sont réunis de façon à former un parallélipipède rectangle qui disperse énorme-

([1]) Christie, *Proceed. of the R. S.*, XXXI, 23; 1877.

([2]) En se reportant à l'expression du pouvoir amplifiant, formulée plus haut (équation 7), on voit aisément qu'il est égal au rapport de l'épaisseur du pinceau incident à l'épaisseur du pinceau émergent; le demi-prisme de M. Christie mérite donc bien le nom d'amplifiant qu'il lui a donné.

([3]) Zenger, *C. R.*, XCII, 1503, et XCIII, 429; 1881.

ment la lumière : la largeur angulaire du spectre atteint 24°.

Comme l'a indiqué M. Janssen, on peut encore mettre à profit la réflexion totale afin de ramener le rayon moyen dans la direction primitive tout en maintenant l'écartement des rayons extrêmes. La figure 339 montre un couple de prismes établis par M. A. Herschel [1] pour obtenir ainsi la vision directe.

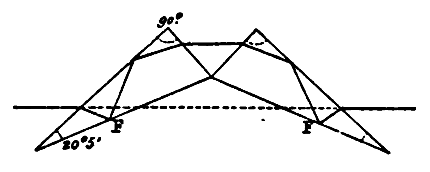


Fig. 339

Spectroscope Thollon [2]. — Thollon a réalisé avec un petit nombre de prismes un spectroscope à vision directe d'une puissance remarquable.

Considérons d'abord un *couple*, c'est-à-dire un système de deux prismes identiques, qui font entre eux un angle α. En conservant les notations précédentes et en affectant respectivement des indices 1 et 2 les angles relatifs au premier et au second prisme, nous avons

$$\alpha = i^1 + i_2.$$

La déviation qu'éprouve un rayon est exprimée par la relation

$$\begin{aligned} D &= i_1 + i'_1 + i_2 + i'_2 - 2A \\ &= i_1 + i'_2 - 2A + \alpha. \end{aligned}$$

On peut toujours attribuer à α une valeur telle qu'un rayon traversant le système soit normal au plan bissecteur de cet angle : le couple sera alors au minimum de déviation pour le rayon. En faisant varier α d'une manière continue, on amènera donc successivement au minimum de déviation chacun des rayons simples contenus dans un même rayon incident de lumière blanche.

La dispersion élémentaire du système

$$\frac{di'_2}{dn} = \frac{\sin A(\cos i'_1 \cos r_1 + \cos i_2 \cos r'_2)}{\cos i'_1 \cos r_1 \cos i'_2 \cos r_2}$$

[1] A. Herschel, *Chem. News*, XIX, 157; 1869.
[2] Thollon, *Journal de physique*, VII, 141, et VIII, 73; 1878-79.

est pour le minimum relatif au couple ($i'_1 = i_2$, $r'_2 = r_1$)

$$\frac{di_2}{dn} = \frac{2 \sin A}{\cos i'_2 \cos r_2} = \frac{2 \sin A}{\cos i_1 \cos r'_1};$$

et, dans le cas où en outre l'incidence et l'émergence sont normales ($i_1 = i'_2 = 0$, $r'_1 = r_2 = A$),

$$\frac{di'_2}{dn} = 2 \operatorname{tg} A;$$

le spectre est alors *normal par rapport à l'indice*.

Thollon réunit dans son spectroscope un certain nombre de ces couples rectangles formés chacun par les deux moitiés en regard de deux prismes consécutifs. Il emploie des prismes composés (crown et sulfure de carbone) ayant un pouvoir dispersif considérable. On a figuré ci-contre l'un de ces prismes ([1]), la marche d'un rayon ([2]), enfin la disposition générale de l'appareil tel que le construit Laurent. Il suffit d'agir sur la vis V pour faire défiler tout le spectre devant l'œil de l'observateur; cette vis entraîne avec elle

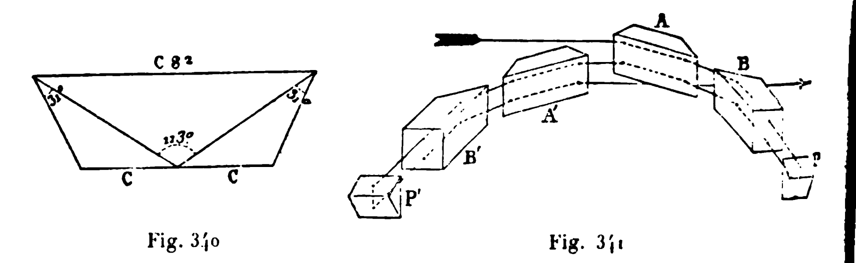


Fig. 340 Fig. 341

une bande de papier sur laquelle on enregistre les raies au moyen d'un crayon commandé par la manivelle M, placée sous la lunette O. Thollon a pu relever ainsi en quelques mois la position de près de 4 000 raies. Beaucoup de raies regardées jusqu'alors comme simples ont été dédoublées : (elles appartenaient toutes à deux substances; mais nombre de raies (F et C, par exemple) se sont seulement montrées plus larges, tandis que d'autres restaient d'une

([1]) Les indices moyens des deux substances différant peu, il est possible, sans perdre trop de lumière, d'employer des incidences considérables, à la condition toutefois d'une grande perfection dans le travail des surfaces.

([2]) Avec deux nouveaux prismes à réflexion, on obtiendrait rigoureusement la vision directe, mais on perdrait un peu de lumière.

finesse extrême, malgré l'énorme dispersion. La distance angulaire des raies D était 12′, leur distance apparente 15 millimètres, la longueur du spectre 15 mètres.

Il va de soi que dans tous ces appareils la lunette pourra être d'autant plus puissante que le spectre sera lui-même plus pur.

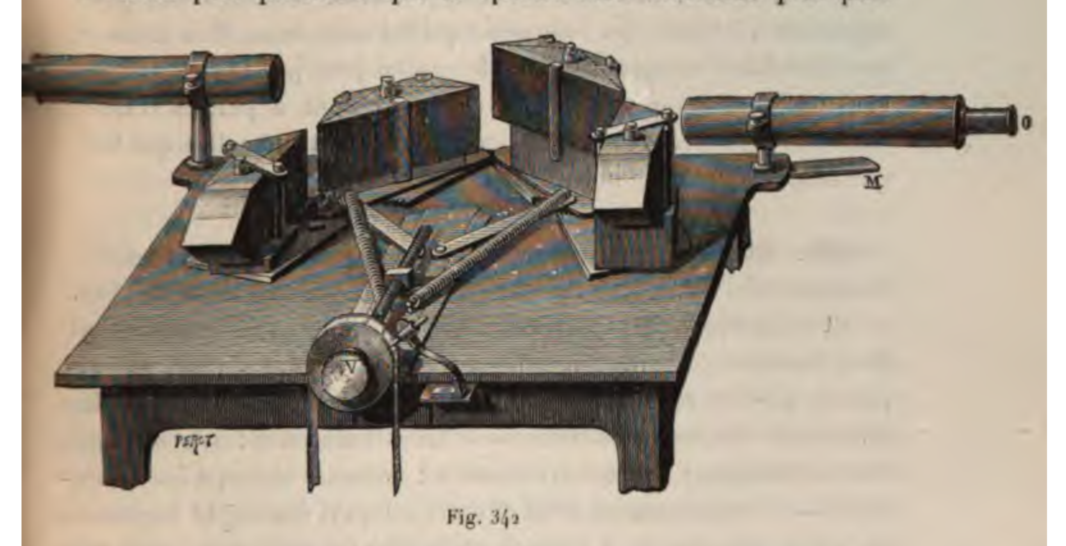


Fig. 342

M. Wolf [1] a construit tout récemment un spectroscope dans lequel une lunette à fort pouvoir optique permet de distinguer les détails les plus délicats du spectre.

Échelles spectroscopiques. — Dans le spectroscope de Bunsen, l'échelle était une division en parties égales de longueur arbitraire. On se contente encore ordinairement de ce dispositif; car les distances respectives des raies dépendant du système réfringent adopté, une conversion sera en général nécessaire pour ramener les mesures à un spectre type. On nomme *spectre normal,* celui dans lequel les déviations des différentes couleurs sont proportionnelles aux longueurs d'onde : c'est le spectre type.

Pour traduire les divisions de l'échelle d'un spectroscope en longueurs d'onde, on notera sur cette échelle la position d'un certain nombre de raies dont la longueur d'onde soit exactement connue, et l'on rattachera ces observations entre elles à l'aide d'une

(1) Wolf, *Bulletin des séances de la Société française de physique*; 1890.

formule empirique (1) ou d'une courbe sur laquelle on lira immédiatement la longueur d'onde correspondant à une division quelconque de l'échelle (comprise entre les points marqués directement).

Importance du spectroscope. — Avec le spectroscope est née une science nouvelle, merveilleusement féconde. Nous n'avons pas à rapporter ici toutes les conquêtes qui lui sont dues. Mais nous ne saurions faire comprendre le rôle capital joué par le spectroscope sans indiquer les questions que cet instrument a permis d'aborder et de résoudre. Nous insisterons seulement sur celles qui touchent spécialement à notre sujet.

435. Étude des différentes sources de lumière. — *Extension des recherches relatives à la décomposition de la lumière.* — Sous l'influence du spectroscope, la question de la décomposition de la lumière s'est singulièrement élargie. Newton n'avait expérimenté que les rayons solaires. On a soumis au spectroscope les différentes sources de lumière — sources naturelles : astres et météores lumineux ; sources artificielles : flammes et corps incandescents — le rayonnement étant observé tel qu'il émane de la source ou après son passage à travers un milieu retenant une partie des rayons. De là deux sortes de spectres, les *spectres d'émission* et les *spectres d'absorption.*

Spectres d'émission.

Deux espèces de spectres d'émission. — Ces spectres se partagent eux-mêmes en spectres continus et discontinus.

Spectres continus des liquides et des solides. — Les solides ou liquides incandescents émettent un spectre continu s'étendant de plus en plus du côté du violet à mesure que la température s'élève (2). Parmi les sources à spectre continu, nous citerons les charbons entre lesquels jaillit l'arc voltaïque (mais non l'arc), les lampes à incandescence et les flammes (becs de gaz, lampes à huile ou à pétrole, bougies), toutes sources dans lesquelles le corps incandescent est le carbone solide.

(1) GIBBS, *Silliman's Journal of science*; 1870. — CORNU, *Ann. de chim. et de phys.*, (6), VII, 57; 1886.
(2) DRAPER, *Phil. Mag.*, (3), XXX, 345; 1847.

pectres discontinus des vapeurs ou gaz. — Les vapeurs ou gaz ndescents donnent un spectre discontinu, formé de raies briles sur fond obscur. La température s'élevant, les raies s'élarent et s'estompent; de même, la densité de la vapeur croissant, ectre tend à devenir continu.

ifférents moyens de volatiliser les corps pour obtenir leur spectre. Les moyens employés pour porter le corps à l'incandescence nt ici une grande influence sur les résultats, nous devons énuer les plus importants qui se rattachent à deux catégories : mes et décharges.

) *Flammes.* — Les flammes non lumineuses de la lampe à alcool lville, Brewster, Herschel, Miller [1]) ou mieux du bec Bunsen chhoff et Bunsen) conviennent très bien pour étudier les specdes corps se volatilisant à température peu élevée. On voit sur gure 331 comment le corps (sel métallique) est porté dans la me au moyen d'un fil de platine préalablement plongé dans dissolution ou muni d'un fragment du corps : le fil doit être é plus bas que la fente, de façon à ne pas introduire le spectre tinu du platine incandescent [2]. Si une température plus haute nécessaire, on se servira de la flamme de l'hydrogène dans l'air Mitscherlich [3], Mascart [4]) ou de celle du gaz tonnant (Wolf Diacon [5])). Mais on préférera ordinairement recourir à l'élecité.

En 1752, Melville examina avec un prisme quelques flammes colorées et rqua que l'alcool salé ne présente qu'une couleur (MELVILLE, *Edimb. phys. litt. Essays*, II, 12 ; 1752). En 1822, Brewster confirma cette propriété de la e *monochromatique* (BREWSTER, *Trans. of the R. S. of Edimburgh*; 1822). La e année, Herschel étudia les spectres d'un grand nombre de flammes coloet particulièrement ceux relatifs au chlorure de strontium, au chlorure de e et à l'acide borique (John Herschel, *Trans. of the R. S. of Edimburgh*;). En 1845, Miller releva les spectres un peu confus émis par les sels alcaet alcalino-terreux dans la flamme de l'alcool (MILLER, *Report of the British ciation*; et *Phil. Mag.*, (3), XXVII, 81 ; 1845).

Pour obtenir une alimentation continue, on peut employer soit un tube sé comme ceux au moyen desquels on donne à boire aux oiseaux (A. Mitrlich), soit un pulvérisateur lançant dans la flamme la substance réduite en sière (Bunsen, Gouy). — GOUY, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), XVIII, 23;

A. MITSCHERLICH, *Pogg. Ann.*, CXVI ; 1862; et *Ann. de chim. et de phys.*, (3), , 169 ; 1863.

MASCART, *Annales de l'École normale*, IV ; 1866.

WOLF et DIACON, *Mémoires de l'Académie de Montpellier*; 1862.

b) *Décharges.* — Dès 1835, Wheatstone (¹) avait observé que l'étincelle éclatant entre deux boules d'un métal donne un spectre formé de raies brillantes, caractéristiques du métal et indépendantes du milieu ambiant (il opérait avec une étincelle grosse et courte). Mais les anciennes machines étaient fort incommodes ; et Masson (²) perfectionna singulièrement le procédé en tirant l'étincelle de la bobine d'induction et en la condensant à l'aide d'une jarre intercalée dans le circuit.

Quand il introduisit le métal dans l'arc électrique, Wheatstone obtint les mêmes raies que par l'étincelle. Foucault (³) fit également

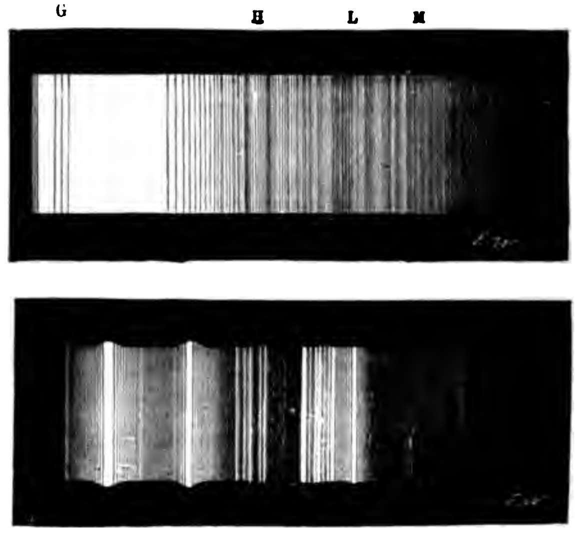


Fig. 343

usage de l'arc pour réduire les métaux en vapeurs incandescentes, et Robiquet (⁴) l'employa dans un travail remarquable auquel nous empruntons les photographies ci-jointes du spectre solaire et du spectre de l'argent (⁵). Avec ce métal, l'expérience est très belle

(¹) Wheatstone, *Report of the British Association in Dublin*; ou *Chemical News*, III, 198; 1835. Cf. Talbot, *Brewster's Journal of Science*, V; 1826; et *Phil. Mag.*, IV, 114; 1834.

(²) Masson, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXI, 295 et XLV, 385; 1851-55.

(³) Foucault, *Bulletin de la Société philomatique*, et *l'Institut*; 1849.

(⁴) Robiquet, *C. R.*, XLIX, 606; 1859.

(⁵) Ces photographies ne reproduisent que les parties bleues et violettes des spectres, mais en revanche elles s'étendent à une certaine distance au-delà du violet.

ontrer dans un cours. On met dans la lanterne de projec- une lampe électrique, munie en bas d'un gros charbon sé d'une coupelle où se place un fragment du métal. On fait r l'arc sur ce fragment pris comme pôle positif. La lumière, nt par la fente de la lanterne, rencontre une lentille à long · qui l'envoie sur un système de deux prismes équilatères au re de carbone et de là sur un écran suffisamment éloigné. Si

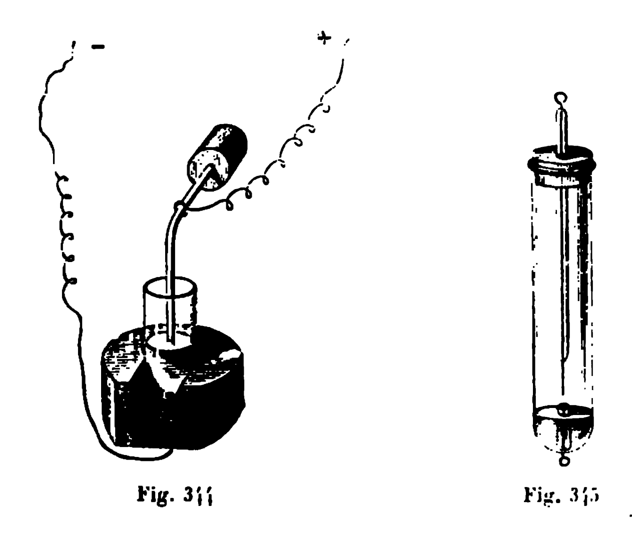


Fig. 344 Fig. 345

ajouté à la partie inférieure de la lampe un revolver portant lemi-douzaine de charbons sur chacun desquels a été mis un l différent, on pourra en quelques instants faire passer sous les de l'assistance les spectres les plus curieux : argent, zinc, cui- fer, sodium (en opérant de même que pour les autres, ou : servant d'un charbon préalablement imbibé de chlorure de ım), lithium (au moyen d'un charbon imbibé de chlorure de ım). Ce dernier procédé s'applique à tous les corps que l'on avoir à l'état liquide.

l'on préfère volatiliser le liquide par l'étincelle [1], on le mettra un tube bouché à la partie inférieure et traversé par un fil latine relié au pôle négatif de la bobine (la force d'arrache-

[1] Déjà en 1859, van der Willigen faisait éclater l'étincelle entre deux fils de e, mouillés de la dissolution saline à étudier (VAN DER WILLIGEN, *Pogg.* CVI, 610 et CVII, 473 ; 1859).

ment étant plus grande à ce pôle qu'à l'autre); un deuxième fil de platine, attaché au pôle positif, sera introduit par la partie supérieure et maintenu très près de la surface du liquide ([1]). La figure 344 représente le *tube à étincelles* de M. Lecoq de Boisbau-



Fig. 346



Fig. 347

dran ([2]) qui a effectué par cette méthode une intéressante série de recherches au cours desquelles il découvrit un métal nouveau, le gallium. MM. Delachanal et Mermet ([3]) ont construit, sous le nom

([1]) Seguin, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIX, 108; 1863.
([2]) Lecoq de Boisbaudran, *Spectres lumineux.* Paris, Gauthier-Villars; 1874.
([3]) Delachanal et Mermet, *Journal de physique*, V, 10; 1876.

ulgurateur (fig. 345), un petit appareil dans lequel l'électrode ative, constituée par un fil de platine coiffé d'un bout de tube rement conique, forme une sorte de mèche qui maintient capillarité le niveau du liquide à distance fixe de l'électrode tive.

vec les gaz et vapeurs, on emploie, suivant les cas, soit un ple *tube excitateur* (fig. 346), disposé pour obtenir une étincelle densée, grosse et courte (ordinairement sous la pression atmosrique), soit un *tube de Plücker* (fig. 347), ainsi nommé du sicien (1) à qui on en doit l'usage : c'est un tube de Geissler, nglé, où le gaz a été amené à l'état de raréfaction qui favorise iculièrement l'effluve (2).

nalyse spectrale. — Wheatstone avait signalé dans les spectres métaux volatilisés par l'étincelle ou par l'arc « un moyen de ctériser les éléments plus facile que l'examen chimique ». n (3) remarqua la fréquence de la raie du sodium et l'expliqua la sensibilité de la méthode et la diffusion des sels de soude. cault fit voir que cette raie coïncide avec la raie solaire obs- D de Fraunhofer et réussit à la produire elle-même en noir me dans le spectre solaire (fait capital sur lequel nous revienis bientôt). Ångström (4), par le procédé de Masson, étudia avec lus grand soin les spectres des métaux et ceux des gaz, et il ina nettement l'origine des spectres d'absorption. Mais l'applin de toutes ces idées et de tous ces résultats à l'investigation éléments est vraiment l'œuvre de Kirchhoff et de Bunsen (5). portant les sels métalliques dans la flamme du bec Bunsen et xaminant cette flamme avec le spectroscope à échelle latérale, endirent pratique l'observation des spectres; ils firent comdre l'importance de cette observation pour l'analyse chimique; r la constatation de l'existence des métaux terrestres dans

(1) Plücker, *Pogg. Ann.*, CVII, 497; 1859.

(2) En l'électrisant par des gaines extérieures on peut éliminer toute élec- (voir Salet, *loc. cit.*, p. 211).

(3) wan, *Trans. of the R. S. of Edinburgh*, XXI, 414; 1857.

(4) Ångström, *K. Vet. Akad. s. Handl.* Stockholm; 1853 (*Pogg. Ann.*, XCIV, 141; *l. Mag.*, (4), IX, 327; 1855).

(5) Kirchhoff et Bunsen, *Pogg. Ann.*, CX, 161; 1860 (*Ann. de chim. et de phys.*, XII, 452; 1861); et CXIII, 337; 1861 (*Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIV, 862).

l'atmosphère du soleil, aussi bien que par la découverte du cesium et du rubidium, ils prouvèrent l'excellence de la méthode. L'analyse spectrale, qui est à proprement parler un procédé pour étudier un rayonnement lumineux, devint dès lors un moyen de scruter la matière.

Spectres des métaux. — Les travaux de Kirchhoff et Bunsen sur les spectres des métaux alcalins et alcalino-terreux dans les flammes, ont été résumés par eux en deux planches, l'une coloriée qui montre assez bien ce que l'on voit dans le spectroscope, l'autre qui figure en noir, c'est-à-dire négativement, les raies brillantes des métaux: l'abscisse de chaque raie indique sa position sur l'échelle de leur instrument (échelle arbitraire, on le sait, et dont ils plaçaient la division 50 sur la raie D); l'ordonnée est proportionnelle à l'intensité. Nous donnons ici le *fac simile* de cette deuxième planche (1).

Quelques indications sont nécessaires relativement à ces raies qui servent couramment pour graduer les échelles des spectroscopes.

Le spectre des sels de soude dans la flamme se réduit à une raie jaune $Na\alpha = 589,2$ (2), correspondant à la raie D de Fraunhofer, et se dédoublant, comme elle, par une dispersion un peu forte, en deux raies $D_1 = 589,5$ et $D_2 = 588,9$. Elle se manifeste nettement, d'après Kirchhoff et Bunsen, dès que la flamme contient un demi-millionième de milligramme de sodium. Aussi est-il très difficile de l'éviter : les poussières suspendues dans l'air suffisent à la produire. Avec une quantité de soude un peu forte on aperçoit à droite et à gauche un spectre continu. Si l'on emploie une température plus haute, à l'aide du chalumeau (Wolf et Diacon, Mascart), ou au moyen de l'étincelle électrique (Kirchoff, Lecoq de Boisbaudran, Salet), on voit apparaître de nouvelles raies.

Les sels de lithine sont caractérisés par une belle raie rouge $Li\alpha = 670,7$, accompagnée, si la température est assez élevée, d'une faible raie orangée $Li\beta = 610,2$ et d'une très faible raie bleue $Li\gamma = 460,4$, qui domine au contraire dans le spectre obtenu avec l'étincelle électrique.

Le potassium émet un spectre continu, allongé, aux deux extrémités duquel se distinguent deux raies caractéristiques, l'une dans

(1) Ce *fac simile*, comme la plupart des figures de ce chapitre, est emprunté au *Traité de spectroscopie* de M. Salet.

(2) Longueur d'onde, en millioniėmes de millimètre.

l'extrême rouge $K\alpha = 768$ (se dédoublant aisément en 769,7 et 766,3), l'autre, plus faible, dans l'extrême violet $K\beta = 404{,}5$. Le spectre est beaucoup plus beau sous l'action de l'étincelle électrique qui fait surgir, surtout dans le vert, de nombreuses raies, visibles également à la flamme avec le chlorate.

Le cesium (*cæsius*, pers) présente deux raies bleues $Cs\alpha = 456{,}0$ et $Cs\beta = 459{.}7$, plus, dans l'orangé, une raie double $Cs\gamma$, faible dans

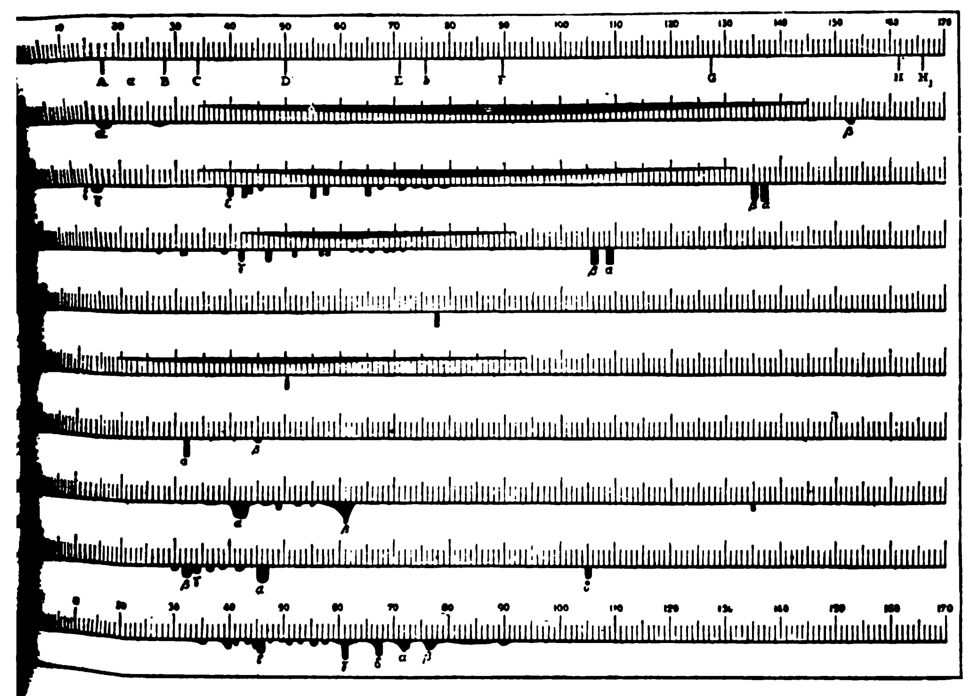


Fig. 348

les conditions ordinaires, mais acquérant de l'éclat aux températures élevées en même temps que de nouvelles raies apparaissent dans le jaune et dans le vert.

Le rubidium (*rubidus*, rouge) offre deux belles raies violettes $Rb\alpha = 420{,}2$, $Rb\beta = 421{,}6$, et deux raies rouges $Rb\gamma = 780$, $Rb\delta = 795{,}1$, toutes les deux moins réfrangibles que A du soleil, avec d'autres raies de moindre importance.

Au nombre des conquêtes du spectroscope, nous citerons encore ici le thallium (θάλλω, verdir), trouvé par Crookes, et caractérisé par une

raie simple, très brillante, dans le vert $Tl\alpha = 534,9$; et l'indium (*indicum*, indigo), découvert par MM. Reich et Richter, qui donne une belle raie bleue $In\alpha = 451,0$ et tout près de *h* une pâle raie violette $In\beta = 410,1$, devenant vigoureuse dans l'étincelle.

Le chlorure de strontium manifeste : dans le rouge, six bandes [1] très belles mais un peu vagues (la moins vague est $Sr\beta = 669,4$), dans l'orangé une bande double assez nette $Sr\alpha$ centrée sur 605 environ, et dans le bleu une raie caractéristique $Sr\delta = 460,7$. C'est la seule raie qui appartienne au métal, comme nous le verrons.

Le chlorure de calcium montre deux belles bandes, l'une dans le rouge $Ca\alpha$ correspondant à environ 622 (elle se partage en trois, $Ca\alpha_1 = 626,5$ nuageuse, $Ca\alpha_2 = 620,2$ nette, $Ca\alpha_3 = 618,1$ nette), l'autre dans le vert $Ca\beta = 554$ (on y distingue facilement deux raies, l'une forte mais nuageuse 554,3, l'autre plus faible 551,7), auxquelles s'ajoute dans le bleu une raie très peu intense 422,6 due au métal.

Avec le chlorure de baryum on a un spectre très compliqué dans lequel se détachent surtout les belles bandes vertes $Ba\delta = 531,3$, $Ba\alpha = 524,2$, $Ba\beta = 513,6$, dues au chlorure et la raie $Ba\gamma = 553,6$ due au métal.

Chaque métal leur ayant paru présenter un spectre indépendant de la nature du sel et de la température de la flamme, Kirchhoff et Bunsen admirent que les atomes se révélaient par leurs raies propres, quel que fût l'état de combinaison où ils pouvaient se trouver : si dans le spectre d'un sel on ne voyait que les raies du métal, cela tenait à ce que le métal, dense et opaque, rayonnait incomparablement plus que les corps légers et transparents auxquels il était uni [2].

Les expériences d'A. Mitscherlich [3] et de Diacon [4] ont établi que les composés donnent des raies spéciales et caractéris-

[1] Une bande, dégradée d'un seul côté et résoluble en raies fines, ne doit pas être confondue avec une raie large, estompée, qu'une dispersion plus forte ne fait que rendre diffuse.

[2] Déjà toutefois, dans leur second mémoire, Kirchhoff et Bunsen trouvaient probable qu'un composé chimique donnât d'autres raies que les éléments qui le constituent.

[3] A. MITSCHERLICH, *loc. cit.*; et *Pogg. Ann.*, CXXI; 1864.

[4] DIACON, *Thèse inaugurale*. Montpellier, Bœhm et fils; 1864; et *Ann. de chim. et de phys.*, (4), VI, 5; 1865.

s, pourvu qu'ils existent à la température où se fait l'expé-
e; en d'autres termes, les molécules ont leurs spectres indi-
ls. C'est ainsi que les spectres des chlorures alcalino-terreux,
ués par Kirchhoff et Bunsen aux métaux seuls, ne renfer-
en réalité que quelques raies du métal, auxquelles viennent
ndre des bandes du chlorure et le spectre de l'oxyde. Le chlo-
le bromure, l'iodure, le fluorure de baryum ont des spectres
ents (A. Mitscherlich). Le chlorure de sodium, volatilisé dans
mme d'un chalumeau à hydrogène et chlore, n'offre sensible-
aucun spectre (Diacon).

chimiste dont les recherches portent sur des composés mé-
ues devra être en garde contre toutes ces difficultés.

ant au physicien, la décharge électrique lui procurera d'or-
re le moyen d'obtenir le spectre d'un corps simple.

rtaines précautions dans l'emploi de l'étincelle condensée jail-
t entre deux pôles métalliques appellent cependant l'attention.
tincelle est longue, son milieu présente presque exclusivement
ies du gaz dans lequel on expérimente, et les quelques raies mé-
ues que l'on peut y observer sont nuageuses et diffuses; ses
mités fournissent spécialement les raies du métal. En rappro-
t assez les électrodes, on fait disparaître ou tout au moins on
ue les raies de l'air; elles se réduisent alors aux raies de l'azote
la raie β de l'hydrogène. Kirchhoff [1], Ångström et Thalén [2],
gins [3] ont étudié par ce procédé les raies brillantes des métaux
ont comparées aux lignes sombres du spectre solaire.

rmi ces raies, quelques-unes sont à signaler :

magnésium, dont les sels n'émettent aucun spectre à la
ne du bec Bunsen, montre, sous l'action de l'étincelle, dans
rt, une belle raie triple [4] coïncidant avec la raie solaire b
518,3, $b_2 = 517,2$, $b_4 = 516,6$) [5].

luminium, qui ne manifeste de spectre à aucune flamme,

[1] KIRCHHOFF, *Abhandl. d. K. Acad. d. Wiss. zu Berlin*; 1861-63.
[2] THALÉN, *Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsal*, (3), VI; 1868; et *Ann. de chim. et de* (4), XVIII, 202; 1869.
[3] HUGGINS, *Proceed. of the R. S.*; 1862-85, passim.
[4] Cette même raie apparaît au chalumeau à gaz tonnant avec la magnésie hlorure de magnésium.
[5] b_4 appartient aussi au fer, ainsi que $b_3 = 516,8$.

offre, avec l'étincelle, quatre bandes vertes diffuses 572,2 569,5 505,6 466,2.

Le zinc produit de très belles raies, parmi lesquelles brillent dans le bleu 481,2 472,1 468,1 et dans l'orangé 636,1.

Le cadmium (¹) a un spectre éclatant où se remarquent principalement dans l'orangé (près de C) 643,8, dans le vert 508,5, dans le bleu 479,9 467,7.

Outre les raies visibles, ces quatre métaux présentent de plus, dans la région ultraviolette, des lignes constituant des repères précieux pour l'étude de cette région (Mascart (²), Cornu (³)).

Le cuivre (⁴) se décèle par un spectre compliqué, au milieu duquel on distingue trois raies vertes 521,8 515,3 510,6, deux raies jaunes 578,1 570,0 et enfin deux raies rouges 616,8 606,1.

Dans le spectre de l'argent se détachent surtout deux magnifiques raies vertes, situées de part et d'autre de E, 546,4 520,8.

Spectres des métalloïdes. — Pour terminer cette rapide esquisse des spectres d'émission, dans leur partie visible, il nous reste à dire quelques mots sur les spectres des principaux métalloïdes qui procurent aussi d'excellents repères et qui sont en outre le siège de phénomènes très curieux.

Plücker a trouvé que, dans ses tubes, les gaz simples émettaient suivant les cas, deux spectres différents : 1° un spectre de bandes (*spectre primaire*) avec la décharge à faible tension ; 2° un spectre de lignes (*spectre secondaire*) avec la décharge à haute tension.

L'hydrogène donne très facilement dans un tube de Plücker un spectre de lignes, comprenant quatre raies, dont l'éclat et la netteté vont en diminuant du rouge au violet, savoir :

dans le rouge,	$H\alpha = 656,18$	coïncidant avec	la raie solaire	C,
— vert,	$H\beta = 486,06$	—	—	F,
— bleu,	$H\gamma = 433,95$	—	—	G',
— violet,	$H\delta = 410,12$	—	—	*h*,

(¹) Les sels de cadmium montrent (faiblement) ces raies dans la flamme.

(²) MASCART, *Ann. de l'École normale*, (1), IV, 7 ; 1866.

(³) CORNU, *Ann. de l'École normale*, (2), III, 421 ; 1874 ; et *Journal de physique*, (1), X, 425 ; 1881.

(⁴) Avec un sel de cuivre, la flamme se colore en vert et offre au spectroscope des bandes qui s'étendent depuis C jusqu'au delà de F et qui sont particulièrement intenses dans le voisinage de E.

plus toute une série de raies ultraviolettes sur lesquelles nous aurons à revenir. Ces raies s'élargissent quand la pression augmente (¹) et quand la température s'élève, lorsque l'étincelle

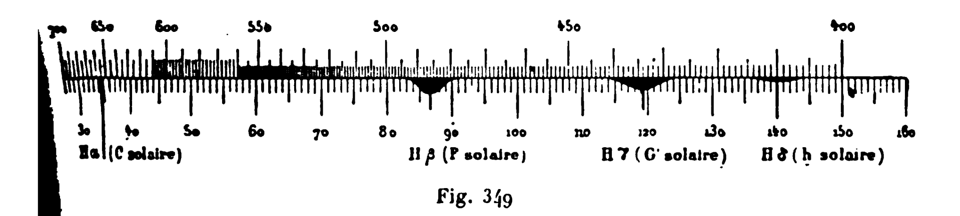


Fig. 349

devient plus forte ou le tube plus étroit. Il n'y a vraisemblablement que ce spectre de lignes; les autres spectres attribués à l'hydrogène, en particulier par M. Wüllner (²), seraient dus à des impuretés (³).

Des nombreuses recherches effectuées sur l'azote, il paraît au contraire résulter que ce gaz a réellement deux spectres distincts (⁴).

Un tube de Plücker à azote, traversé par l'effluve, montre un très beau spectre de bandes, qui forment deux séries différentes

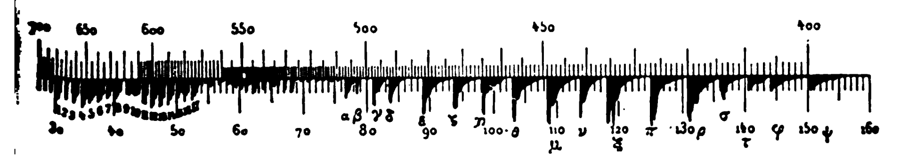


Fig. 350

et naissent les unes dans le rouge et le jaune, les autres dans le bleu et le violet (ces dernières sont naturellement plus développées dans les tubes étroits où la température est plus élevée). Nous

(¹) La flamme de l'hydrogène, lumineuse sous 20 atmosphères de pression (Frankland), donne alors un spectre continu dans la partie visible.

(²) M. Wüllner a décrit cinq spectres de l'hydrogène. Son deuxième spectre, spectre primaire de Plücker, relevé avec soin par Hasselberg, doit être attribué à l'acétylène (Berthelot et Richard, *C. R.*, LXVIII, 1546; 1869).

(³) Voir plus loin, p. 530.

(⁴) Ångström, *Pogg. Ann.*, XCIV, 158; 1855. — Huggins, *Phil. Trans.*, CLIV, 144; 1864. — Plücker et Hittorf, *Phil. Trans.*, CLV, 1; 1865.

reproduisons ici, d'après M. Hasselberg [1], à une très forte dispersion, deux bandes de la première série et une de la deuxième

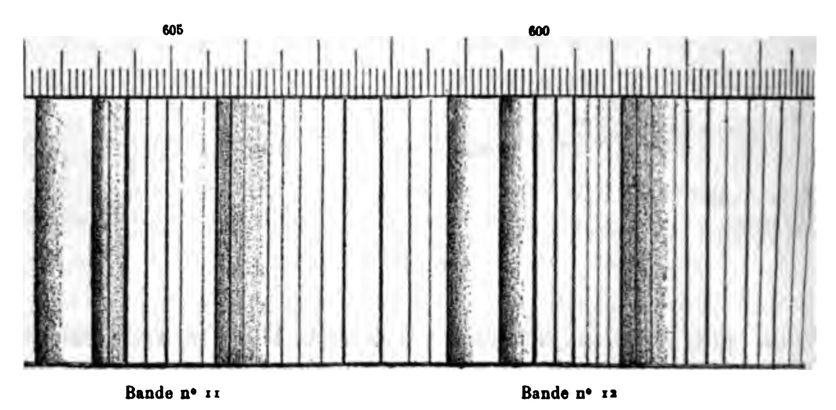


Fig. 351

Si le tube devient très résistant, soit par un amoindrissement considérable de la pression, soit par un rétrécissement extrême, ou si l'on emploie la décharge disruptive, le spectre de bandes dispa-

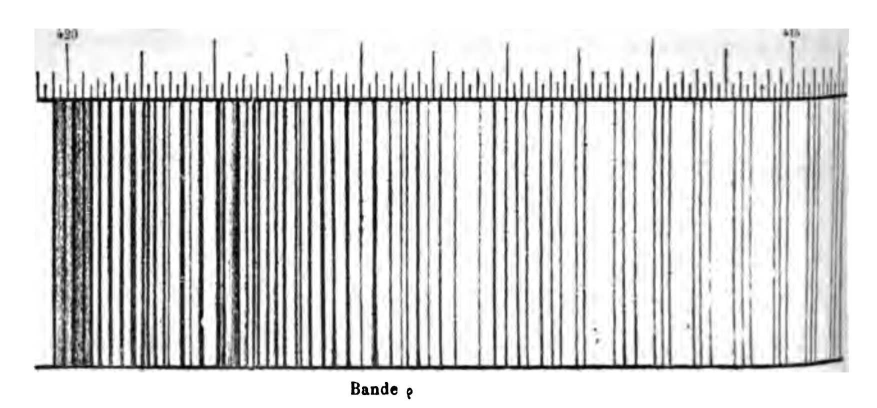


Fig. 352

raît et un spectre de lignes (fig. 353) surgit sur fond sombre. On obtient très facilement ce spectre de lignes avec l'étincelle condensée jaillissant à travers de l'azote contenu dans un tube excitateur comme celui de la figure 346.

(1) Hasselberg, *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, XXXII; 1885. Voir aussi Piazzi Smyth, *Trans. of Edinburgh*, XXXII ; 1883.

Plücker et Hittorff (1) expliquaient l'existence de deux spectres par deux états allotropiques de l'azote. Ångström et Thalén (2) attribuèrent le spectre de bandes à un composé oxygéné de l'azote. Une expérience de M. A. Schuster (3) semble confirmer cette dernière manière de voir : en volatilisant du sodium dans un tube de

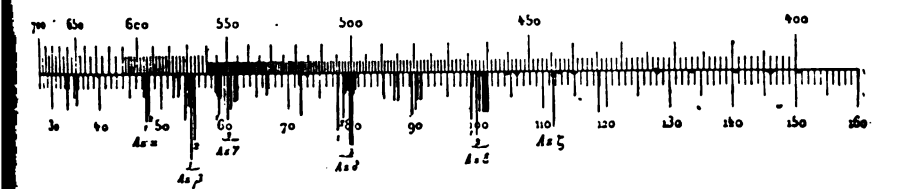


Fig. 353

Plücker à azote, M. A. Schuster vit disparaître le spectre de bandes. Mais M. Salet a reconnu que le sodium se combine avec l'azote sous l'influence de l'effluve, de sorte que le vide est tel que le tube ne donne plus aucun spectre, ni de bandes, ni de lignes. Si l'on volatilise le sodium dans une partie du tube située en dehors de l'effluve, bien que vraisemblablement tout l'oxygène soit absorbé, les bandes persistent (4).

M. Salet les regarde comme le spectre de la molécule (formée de deux atomes), tandis que les lignes seraient le spectre de l'atome. Il attribue à un azote allotropique, plus condensé et plus actif que l'azote ordinaire, un troisième spectre (à bandes cannelées) fourni par la gaîne bleue recouvrant l'électrode négative d'une bobine dont l'étincelle éclate dans l'air, ou par la lueur bleue entourant la même électrode à l'intérieur d'un tube de Plücker à azote (5).

Selon M. Wüllner (6), le spectre varierait simplement d'une façon continue avec la température, de même que le spectre d'un solide

(1) Plücker et Hittorff, *Phil. Trans.*, CLV, 1 ; 1865.
(2) Ångström et Thalén, *Nova acta Reg. Soc. Sc. Upsal*, (3), IX ; 1875.
(3) Schuster, *Proceed. of the R. S.*, XX, 482 ; 1872.
(4) Ce résultat a été confirmé par M. Deslandres (*Ann. de chim. et de phys.*, (6), XV, 5 ; 1888). La présence de l'hydrogène reste seule à craindre.
(5) Salet, *loc. cit.*, p. 224. Voir aussi Deslandres, *loc. cit.*
(6) Wüllner, *Pogg. Ann.*, CXXXVII, 337 ; et *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XVIII, 483 ; 1869.

reproduisons ici, d'après M. Hasselberg ([1]), à une très forte ‹ sion, deux bandes de la première série et une de la deu

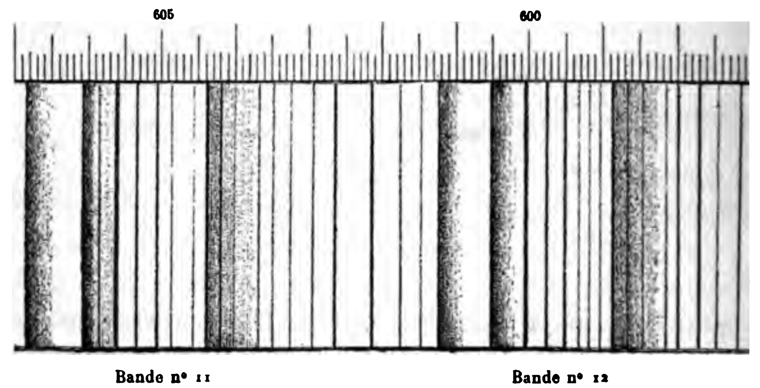


Fig. 351

Si le tube devient très résistant, soit par un amoindris considérable de la pression, soit par un rétrécissement extrê si l'on emploie la décharge disruptive, le spectre de bandes

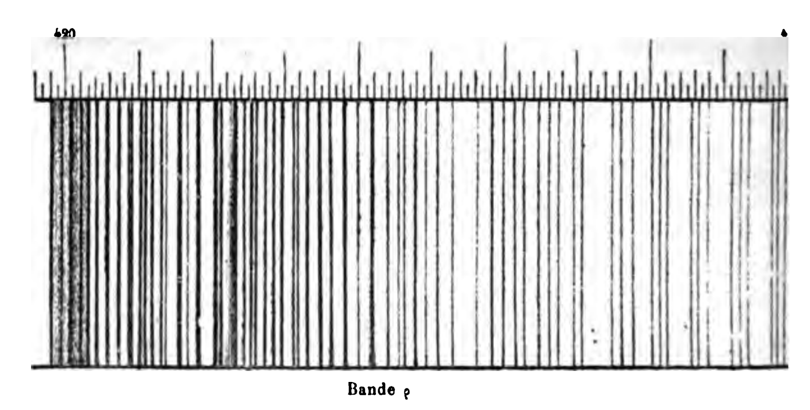


Fig. 352

raît et un spectre de lignes (fig. 353) surgit sur fond sombr obtient très facilement ce spectre de lignes avec l'étincelle densée jaillissant à travers de l'azote contenu dans un tube e teur comme celui de la figure 346.

([1]) Hasselberg, *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, XXXII; 18 aussi Piazzi Smyth, *Trans. of Edinburgh*, XXXII; 1883.

Plücker et Hittorff (1) expliquaient l'existence de deux spectres par deux états allotropiques de l'azote. Ångström et Thalén (2) attribuèrent le spectre de bandes à un composé oxygéné de l'azote. Une expérience de M. A. Schuster (3) semble confirmer cette dernière manière de voir : en volatilisant du sodium dans un tube de

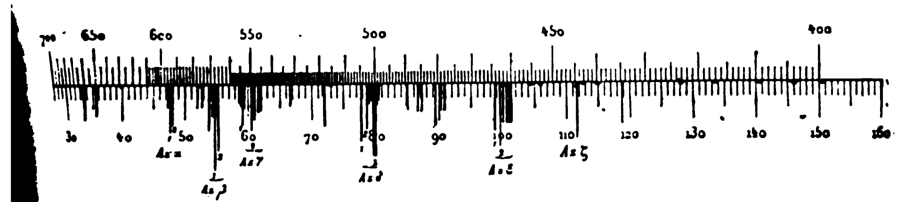


Fig. 353

Plücker à azote, M. A. Schuster vit disparaître le spectre de bandes. Mais M. Salet a reconnu que le sodium se combine avec l'azote sous l'influence de l'effluve, de sorte que le vide est tel que le tube ne donne plus aucun spectre, ni de bandes, ni de lignes. Si l'on volatilise le sodium dans une partie du tube située en dehors de l'effluve, bien que vraisemblablement tout l'oxygène soit absorbé, les bandes persistent (4).

M. Salet les regarde comme le spectre de la molécule (formée de deux atomes), tandis que les lignes seraient le spectre de l'atome. Il attribue à un azote allotropique, plus condensé et plus actif que l'azote ordinaire, un troisième spectre (à bandes cannelées) fourni par la gaîne bleue recouvrant l'électrode négative d'une bobine dont l'étincelle éclate dans l'air, ou par la lueur bleue entourant la même électrode à l'intérieur d'un tube de Plücker à azote (5).

Selon M. Wüllner (6), le spectre varierait simplement d'une façon continue avec la température, de même que le spectre d'un solide

(1) Plücker et Hittorff, *Phil. Trans.*, CLV, 1 ; 1865.
(2) Ångström et Thalén, *Nova acta Reg. Soc. Sc. Upsal*, (3), IX ; 1875.
(3) Schuster, *Proceed. of the R. S.*, XX, 482 ; 1872.
(4) Ce résultat a été confirmé par M. Deslandres (*Ann. de chim. et de phys.*, (6), XV, 5 ; 1888). La présence de l'hydrogène reste seule à craindre.
(5) Salet, *loc. cit.*, p. 224. Voir aussi Deslandres, *loc. cit.*
(6) Wüllner, *Pogg. Ann.*, CXXXVII, 337 ; et *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XVIII, 483 ; 1869.

ou d'un liquide. Par une diminution graduelle de la pr
l'intérieur du tube de Plücker à azote, le spectre de bandes s
cit et s'efface inégalement dans ses diverses parties, tandi
spectre de lignes apparaît progressivement sur le fond aff
premier spectre [1].

D'après M. Schuster, l'oxygène présente dans l'étincelle co

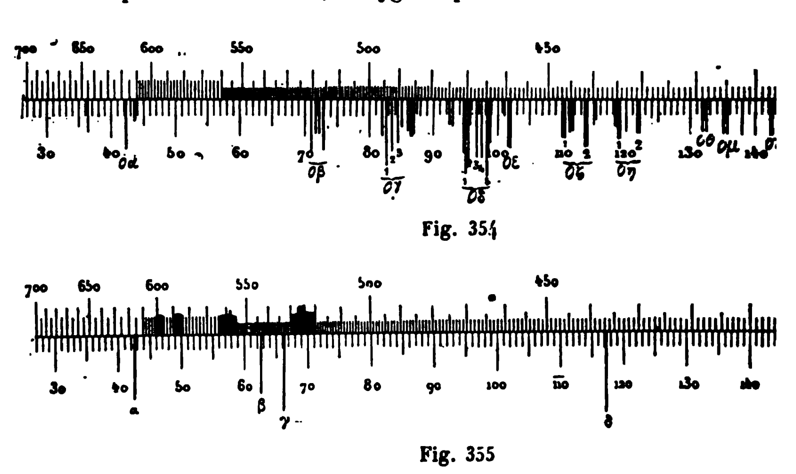


Fig. 354

Fig. 355

un spectre de lignes, qu'il appelle *spectre élémentaire* pour le
guer d'un autre spectre de lignes, qu'il nomme *composé* en
buant à un édifice atomique plus compliqué que celui de l'
ordinaire : ce deuxième spectre, que l'on observe avec l'efflu
un tube de Plücker, comprend quatre raies, dont la moins

(1) Le fait a été vérifié par M. Crookes dont les expériences sont r
dans le tableau ci-dessous :

Pression.	Spectre.
55mm	Le spectre de bandes commence à se montrer dans le roug le jaune.
20	Les bandes bleues et violettes se dessinent nettement.
1 ,14	Le spectre de bandes est dans toute sa magnificence.
1	Quelques lignes paraissent.
0 ,812	Les deux spectres ont le même éclat.
0 ,450	Les lignes seules persistent.
0 ,188	Les lignes des extrémités (au-delà de 610 et de 400) disparai
0 ,003	On voit encore certaines lignes vertes et bleues, entre autres
0 ,002	Il n'y a plus que quelques traces de raies, à peine visibles phosphorescence verte du tube.

(Crookes, *Phil. Trans.*, part II, 414; 1881.)

ole semble seule coïncider avec l'une des raies du premier spectre. y a également au pôle négatif un spectre de bandes, décrit d'a-ord par M. Wüllner.

Le spectre de l'air est essentiellement celui de l'azote, mais l'hydrogène et la vapeur d'eau s'y révèlent aussi, comme M. Kundt l'a constaté sur le spectre de l'éclair : ici encore l'étincelle (éclair en zigzag) fait surgir le spectre de lignes, et l'effluve (éclair de chaleur) le spectre de bandes.

Le soufre donne très aisément, suivant les cas, un spectre de lignes ou un spectre de bandes (Plücker et Hittorff). La figure 353

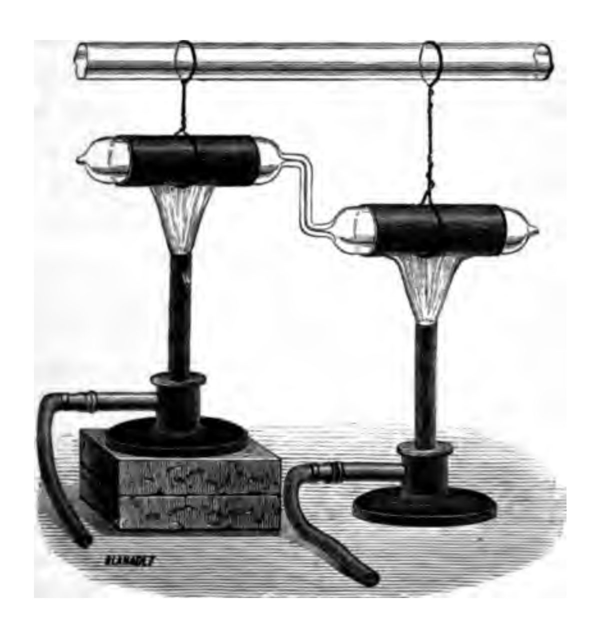


Fig. 356

montre comment M. Salet dispose l'expérience, les gaînes au moyen desquelles on illumine le tube étant utilisées en même temps pour l'échauffer. « Si l'on chauffe modérément le soufre de façon à élever fort peu la pression dans l'appareil, et si l'on se sert de la bobine seule, on voit paraître une lumière bleu tendre dont le spectre, véritable type des spectres de bandes, se compose de brillantes cannelures généralement doubles, paraissant régulièrement dégradées du côté

du rouge, mais dans lesquelles une forte dispersion permet ‹ distinguer une foule de lignes élémentaires, séparées par des inte valles obscurs. » Ces bandes, objet des patientes recherches ‹ Plücker et Hittorff, offrent un mode d'arrangement signalé to d'abord par M. Mascart [1] dans les spectres du sodium et du m gnésium (considérés jusque dans la région ultra violette) : l maxima lumineux, qui, au premier aspect, semblent distribu d'une façon irrégulière, peuvent se partager en plusieurs séri dans chacune desquelles les distances sont presque égales (ell augmentent lentement et régulièrement vers le violet). « Lorsqu'c illumine le tube à soufre au moyen de la machine de Holtz ou ‹ la bouteille de Leyde avec interruption, la température étant ass élevée pour que la tension de la vapeur de soufre soit sensibl l'étincelle devient grêle et donne un beau spectre de lignes › obtenu pour la première fois par Seguin (il faisait passer l'étincell dans de l'hydrogène chargé de vapeurs de soufre), décrit et mesur par Plücker et Hittorff, et étudié avec beaucoup de soin pa M. Salet à qui nous avons emprunté les détails précédents.

De même, l'iode fournit, selon la température, un spectre can nelé qui est l'épreuve négative exacte du spectre d'absorption d l'iode, ou un spectre de lignes qui n'ont rien de commun avec le bandes du premier spectre [2].

Une puissante étincelle condensée éclatant dans l'oxyde de ca bone ou l'acide carbonique produit, outre les raies de l'oxygèn un petit nombre de raies, indiquées par Ångström, et qui sont tr probablement dues au carbone. On les retrouve dans le spect des hydrocarbures et dans celui du cyanogène. Avec les tubes ‹ Plücker, les différents composés carbonés présentent des spect très variés, parmi lesquels on revoit les bandes observées par Sw dans la flamme des hydrocarbures.

Nous ne multiplierons pas les exemples; ceux que nous av cités suffisent à mettre en relief les points acquis et les difficul restantes.

(1) Mascart, *C. R.*, LXIX, 337; 1869.
(2) Wüllner, *Pogg. Ann.*, CXX, 158; 1863.

Spectres d'absorption.

Absorption par les gaz. — En 1832, Brewster [1] fit une observation essentielle. Sur le trajet des rayons projetant le spectre continu d'une lampe, il interposa un vase de verre (ballon à orifice étroit) dans lequel il introduisit des vapeurs nitreuses, et il vit le spectre se couvrir, surtout dans le violet et dans le bleu, d'un très grand nombre de raies obscures, semblables aux raies de Fraunhofer [2].

Toutes les vapeurs colorées se comportent ainsi [3]. Même la vapeur d'eau, qui semble absolument incolore et transparente, a donné à M. Janssen un spectre d'absorption caractérisé par de nombreuses raies dans le rouge et l'orangé.

Du moment que l'on avait prouvé que certaines vapeurs absorbent certains rayons, on pouvait concevoir que l'origine des raies du spectre solaire fût en effet l'absorption de la lumière par un milieu agissant comme ces vapeurs.

Brewster, puis Forbes, ont donc cherché la cause de ces raies dans l'action de l'atmosphère terrestre sur les rayons solaires, en examinant le spectre à diverses heures de la journée et en différentes saisons. Mais ils n'arrivèrent pas à une conclusion décisive. Si l'influence de l'atmosphère est incontestable, elle s'exerce très inégalement. Tandis que les bandes sombres, découvertes par Brewster dans le spectre du soleil couchant, s'effaçaient vers midi, la plupart des raies décrites par Fraunhofer ne paraissaient pas varier avec l'épaisseur de la couche d'air traversée par les rayons.

Raies telluriques. — Il y a dans le spectre des *raies telluriques*, comme les a nommées M. Janssen [4], dont les travaux ont plus que

[1] Brewster, *Phil. Trans. of Edinburgh*; 1833; et *Phil. Mag.*, (3), VIII, 384; 1836.

[2] Elles s'étalent de plus en plus à mesure que la densité du gaz augmente et finissent par faire disparaître entièrement le violet. Elles augmentent en nombre et en intensité si l'on chauffe le gaz, et à une certaine température le spectre s'assombrit complètement.

[3] Il faudrait toutefois excepter, d'après Miller, le chlorure de tungstène et le chlore; mais Morren, de Marseille, a obtenu le spectre d'absorption du chlore avec une couche épaisse (2 mètres) de ce gaz.

[4] Janssen, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXIII, 274; 1871 (dans ce mémoire est reproduite la carte publiée, en 1860, par Brewster et Gladstone, dans les *Phil. Trans.*).

tous les autres contribué à démontrer l'origine terrestre des bandes de Brewster. Il a résolu les plus importantes de ces bandes et il a reconnu qu'elles étaient dues à la vapeur d'eau. Ångström [1] a confirmé cette opinion en constatant la disparition complète des raies voisines de D (et en particulier de la *bande de la pluie*, δ de Brewster, longueur d'onde 578), des raies voisines de C et de la bande *a*, à Upsal, au mois de janvier 1864, par un froid de — 27°. Peu de temps après, dans l'usine à gaz de la Villette, M. Janssen [2] réussit à obtenir le spectre d'absorption de la vapeur d'eau à l'aide de vapeur surchauffée remplissant un long tube de 37 mètres; et il annonça que ce spectre était identique aux bandes qu'il avait étudiées dans le spectre solaire. Cette identité a été vérifiée indirectement par les météorologistes, qui ont même fait du spectroscope un instrument de prévision du temps : la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'air peut en effet s'estimer avec une certaine précision par la noirceur des raies qu'elle détermine comparée à celle des raies métalliques voisines, ainsi que l'a établi M. Cornu [3] à

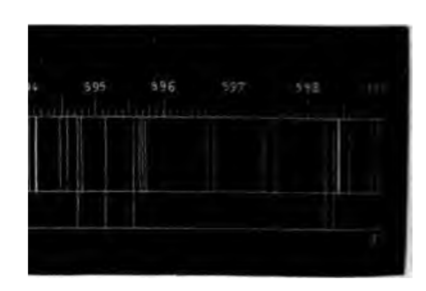


Fig. 357

qui nous empruntons le croquis ci-joint des groupes voisins de D. Dans l'observation précitée, Ångström a vu que les autres groupes telluriques, A et B de Fraunhofer et α d'Ångström, persistaient par les plus grands froids; ils doivent donc être attribués à quelqu'un des gaz permanents de notre atmosphère (à moins qu'ils

[1] Ångström, *Recherches sur le spectre solaire. I. Spectre normal du soleil.* Upsal; 1868.
[2] Janssen, *C. R.*, LXIII, 289; 1866.
[3] Cornu, *C. R.*, XCV, 801; 1882; ou *Journal de physique*, (2), II, 58; 1883; et *Journal de l'Éc. Polyt.*, LIIIe cahier, 175.

ne proviennent d'un milieu existant entre le soleil et la terre ([1])) : après avoir examiné directement les spectres d'absorption de ces gaz, M. Égoroff ([2]) pense que les groupes A et B, dont M. Langley ([3]) avait déjà signalé l'analogie de structure, sont dus à l'oxygène ([4]); le même gaz produirait aussi α, d'après Thollon ([5]), qui a constaté la similitude complète des trois groupes.

Dans un travail remarquable dont nous nous bornons pour le moment à résumer les conclusions, M. Cornu ([6]) a prouvé que chacun des groupes A, B et α renferme trois espèces de raies, telles que les représente la figure 358 relative au groupe α ([7]) : des raies

([1]) ABNEY, *Nature* du 12 octobre 1882.

([2]) ÉGOROFF, *C. R.*, XCVII, 555; 1883.

([3]) LANGLEY, *Proceed. of the Americ. Acad.*; 1878.

([4]) Le spectre d'absorption de l'oxygène n'est visible que sous des épaisseurs ou des pressions considérables. M. Égoroff l'a obtenu du gaz comprimé à 6 atmosphères dans un tube long de 60 mètres. M. Janssen a opéré avec des tubes dont les longueurs variaient de $0^m,42$ à 120 mètres et sous des pressions croissant jusqu'à 200 atmosphères. Il a trouvé que l'oxygène présentait deux systèmes spectraux distincts : un premier système, constitué par des raies fines, se montrait, suivant la loi ordinaire, dès que le produit de l'épaisseur par la densité atteignait une certaine valeur; un second système, formé par des bandes estompées, difficilement résolubles, obéissait à la loi du produit de l'épaisseur par le carré de la densité. La plus forte de ces bandes (580-572) apparaît dans un tube de 60 mètres sous la pression de 6 atmosphères. Elle doit donc manquer dans le spectre du soleil examiné au zénith, car l'oxygène traversé équivaut alors à une colonne de 172 mètres à 1 atmosphère de pression, tandis qu'il en faudrait $60 \times 36 = 2160$ pour faire voir nettement la bande du jaune. A l'horizon, cette bande s'observe, l'épaisseur étant alors quatre fois plus grande qu'il n'est nécessaire; et la faible hauteur pour laquelle elle disparaît satisfait assez bien à la loi énoncée (JANSSEN, *C. R.*, CI, 649, et CVI, 1118; 1885-88. Cf. LIVEING et DEWAR, *Phil. Mag.*, (5), XXVI, 286; 1888). D'autre part, M. OLZEWSKI (*Sitzb. d. K. K. österr. Acad. d. Wissensch. in Wien*, XCV, 2 Abth; 1887), a retrouvé les bandes d'absorption, que le soleil donne près de l'horizon, avec une couche de 7^{mm} d'oxygène liquéfié : l'épaisseur voulue pour rendre perceptible la bande la plus forte serait, d'après M. Janssen, $4^{mm},5$.

L'ozone offre un spectre d'absorption caractéristique, le même pour le liquide et pour le gaz. Ce spectre a été étudié par M. J. CHAPPUIS (*C. R.*, XCI, 985; 1880; et *Journal de physique* (2), I, 494; 1882), qui a conclu à la présence des principales bandes de l'ozone dans le spectre du soleil vu à l'horizon, conclusions confirmées par M. HARTLEY, (*Journal of the chem. Soc.*, n° CCXX, 111; 1881).

([5]) THOLLON, *Journal de physique*, (2), III, 421; 1884.

([6]) CORNU, *Ann. de chim. et de phys.*, (6), VII, 1; 1886.

([7]) On a figuré au milieu le spectre complet (le soleil étant à quelques degrés de l'horizon), en haut les raies d'absorption de l'atmosphère sèche, en bas les raies d'origine solaire; les raies attribuées à la vapeur aqueuse sont celles que l'on n'a prolongées ni vers le haut, ni vers le bas.

Fig. 358

venant de la vapeur d'eau ; enfin des raies solaires, p
ment dans α.

Raies solaires. — Le plus grand nombre des raies, pre
celles que décrivit Fraunhofer, ont en effet leur origi
soleil même. C'est encore d'une absorption que résulte
solaires.

La masse incandescente de l'astre, qui offrirait par
un spectre continu, est entourée d'une atmosphère de
vapeurs à haute température que traversent les rayons
photosphère : il y a absorption, et des raies sombres se
inverses des raies lumineuses qui formeraient le spectre
de ces gaz et vapeurs.

Cette théorie est l'œuvre puissante de Kirchhoff : en
raies solaires les témoins des éléments contenus dans l'
du soleil, il a dévoilé la composition chimique de ce
phère, et il a ouvert à l'astronomie des voies inespér
connaissance de la nature intime de l'étoile la plus él
l'examen spectroscopique d'un seul de ses rayons. La gr
pas accompli par Kirchhoff ne doit pas néanmoins nou

difficulté pour la chaleur, elle ne sembla pas s'appliquer aussi aisément à la lumière. Cependant, Foucault fit en 1849 une expérience qui aurait pu déceler l'origine des raies solaires. Une raie très brillante lui ayant paru occuper dans le spectre de l'arc voltaïque la même position que la raie sombre D dans le spectre du soleil, il voulut s'assurer si les deux raies coïncidaient réellement. A cet effet, il fit arriver les rayons solaires sur la moitié inférieure de la fente qui couvrait l'arc et il vit : 1° que la raie brillante du spectre voltaïque est la continuation exacte de la raie D du spectre solaire; 2° que cette raie D est infiniment plus obscure dans le spectre solaire fourni par des rayons ayant traversé l'arc que dans le spectre ordinaire. Ainsi Foucault avait constaté non seulement la *coïncidence* de la raie D de Fraunhofer avec la raie jaune du sodium (car telle était, comme le montra Swan, la raie brillante qu'il observait d'une manière presque constante dans le spectre de l'arc), mais encore le *renversement* de cette raie qui de brillante devenait obscure quand la vapeur incandescente, au lieu d'agir à l'état de source, intervenait à titre d'absorbant. Il ne comprit pas toutefois le sens profond de son expérience.

D'autres expérimentateurs avaient noté de nouvelles coïncidences et des renversements sans en démêler la vraie cause, lorsque Kirchhoff [1], en 1860, établit la loi suivante par le calcul et l'expérience ainsi qu'il sera expliqué plus loin :

Le rapport entre le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant, relatifs à une même radiation quelconque, est le même pour tous les corps à la même température.

Et comme conséquence il formula le renversement des raies.

Stokes [2] a fait remarquer qu'un système de vibrations lumineuses rencontrant un gaz est dans le même cas qu'un système de vibrations sonores pénétrant dans un espace rempli de cordes tendues. On sait qu'alors les cordes qui peuvent rendre quelqu'un des sons du système se mettent en mouvement, aux dépens de la force vive des vibrations incidentes synchrones (force vive qu'elles

[1] KIRCHHOFF, *Pogg. Ann.*, CIX, 245; et *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 124, et LXII, 160.

[2] STOKES, *Phil. Mag.*, (4), XIX, 196; 1860; et *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 505; 1860.

absorbent pour la dissiper en tous sens), tandis que les autres vibrations traversent cet espace sans affaiblissement.

De même, dans le gaz, les lumières simples qu'il est capable d'émettre sont seules excitées et conséquemment seules absorbées parmi les vibrations incidentes.

Mais cette absorption sera en général incomplète : une partie de la radiation incidente sera transmise et viendra s'ajouter à la radiation de même espèce émise par le gaz. Quel sera l'effet de cette superposition?

Théorie de Kirchhoff (¹). — Nous supposerons que la source de la lumière est un corps parfaitement noir, analogue au noir de fumée. Soient θ' la température et $\varepsilon_{\theta'}$ le pouvoir émissif (absolu) de ce corps, à la température θ', pour une radiation déterminée. Imaginons un tube cylindrique, de section droite égale à l'unité, partant de ce corps et traversant normalement une couche d'épaisseur connue d'un gaz donné. La quantité de force vive relative à la radiation considérée, que la source lance dans ce tube pendant l'unité de temps, est $\varepsilon_{\theta'}$. Le gaz à la température θ absorbe et retient, sous forme de chaleur, une fraction a_θ de la radiation reçue, et si l'on désigne par e_θ le pouvoir émissif du gaz à la même température, ε_θ désignant le pouvoir émissif (absolu) et $\alpha_\theta = 1$ le pouvoir absorbant (absolu) du noir de fumée à la même température, la loi de Kirchhoff s'exprime par la relation

$$\frac{e_\theta}{a_\theta} = \varepsilon_\theta.$$

Admettons que le gaz soit incolore, c'est-à-dire qu'il ne réfléchisse ni ne diffuse sensiblement aucune lumière. Le pouvoir absorbant a_θ est alors égal à la différence des quantités de radiation reçue et transmise t_θ

$$a_\theta = 1 - t_\theta,$$

et l'on a

$$e_\theta = \varepsilon_\theta(1 - t_\theta).$$

L'observateur placé au delà du gaz reçoit cette quantité e_θ émise

(¹) Nous mettons ici à profit le commentaire des idées de Kirchhoff par M. Duhem (*Journal de physique*, (2), IV, 221; 1885).

ar le gaz, plus la portion $\varepsilon_{\theta'} t_\theta$ venant de la source et transmise ar le gaz, soit en tout

$$\varepsilon_\theta(1 - t_\theta) + \varepsilon_{\theta'} t_\theta.$$

En l'absence du gaz il recevrait

$$\varepsilon_{\theta'}.$$

La différence

$$(\varepsilon_{\theta'} - \varepsilon_\theta)(1 - t_\theta)$$

eprésente la diminution d'intensité due au gaz.

Si à la température θ le gaz n'émet pas la radiation considérée, $\varepsilon_\theta = 0$, par suite $1 - t_\theta = 0$: le gaz est sans action.

Si $1 - t_\theta > 0$, le signe de la différence est le même que celui de $\varepsilon_{\theta'} - \varepsilon_\theta$. Or l'expérience montre que le pouvoir émissif ε croît d'une façon continue avec la température. Donc l'interposition d'un gaz plus froid que la source diminue la radiation, l'interposition d'un gaz plus chaud l'augmente. Mais dans le spectre continu de la source, les plages qui sont situées de part et d'autre du rayon proposé et qui possèdent sensiblement même intensité sont transmises par le gaz sans altération; ce rayon va donc se projeter en une aie sombre dans le premier cas, lumineuse dans le deuxième. En d'autres termes, la raie du gaz reste brillante s'il est plus haud que la source, elle est renversée s'il est plus froid (¹).

Quand le gaz est coloré, si la radiation examinée n'est pas parmi elles qu'il diffuse, il agit comme un gaz incolore. Mais s'il diffuse ne quantité d_θ de la radiation incidente, on a

$$a_{\theta'} = 1 - t_{\theta'} - d_\theta.$$

(¹) Si le pouvoir émissif de la source $e_{\theta'}$ est inférieur à celui du noir de fumée ε_θ, n poura poser

$$e = \varepsilon_{\theta'}(1 - m_{\theta'}),$$

t la différence entre les intensités de la radiation avant et après interposition e gaz sera

$$(\varepsilon_{\theta'} - \varepsilon_\theta)(1 - t_\theta) - \varepsilon_{\theta'} m_{\theta'},$$

noindre qu'avec une source douée du pouvoir émissif absolu. Le renversement de la raie exigera une plus grande différence entre les températures θ' et θ.

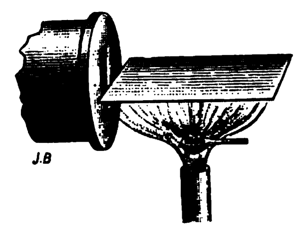
La diminution d'intensité produite par le gaz devient

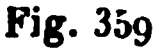
$$(\varepsilon_{\theta'} - \varepsilon_\theta)(1 - t_\theta) + \varepsilon_\theta d_\theta :$$

toutes choses égales d'ailleurs, elle est plus grande qu'avec un gaz ne diffusant pas la radiation.

On peut donc observer des lignes sombres correspondant à des radiations non émises, mais diffusées par le gaz.

Renversement des raies. — Nous avons déjà dit comment Foucault le premier constata ce renversement pour la raie jaune du




Fig. 359

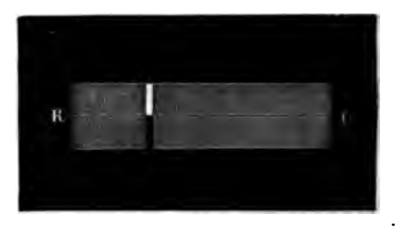


Fig. 360

sodium. Voici la manière d'opérer, d'après Frankland. L'expérience étant disposée ainsi que nous l'avons indiqué pour obtenir dans le spectre voltaïque la raie brillante du sodium (à l'aide d'un charbon légèrement imprégné de sel marin), on place devant la fente de la lanterne un bec Bunsen dont on limite la flamme à la moitié inférieure de la fente au moyen d'une lame de platine (ou de tôle) ; on porte dans la flamme une petite cuiller de platine contenant un fragment de sel fondu, on voit aussitôt s'assombrir entièrement la moitié inférieure de la raie ([1]). Quelques opérateurs préfèrent dresser devant la fente un tube préparé à l'avance, dans lequel, après y avoir fait le vide, on a introduit un morceau de sodium qu'il suffit de chauffer un peu pour le volatiliser ([2]).

Mais la forme la plus instructive de l'expérience consiste à poser un fragment de sodium sur le charbon inférieur de la lampe : la

([1]) On peut employer la lumière Drummond, avec une lampe à alcool salé ou plus généralement chargé d'un sel alcalin.

([2]) Bunsen disposait l'une devant l'autre deux flammes d'alcool salé, de grandeurs très inégales, la plus petite en avant : cette dernière paraissait alors sombre, comme fumeuse (surtout vers les bords) sur le fond brillant de la grande flamme beaucoup plus chaude.

e D se montre d'abord en noir, la vapeur épaisse, dont le noyau tral est enveloppé, amenant le renversement de la raie brillante, apparaît quand l'atmosphère absorbante s'est dissipée, pour oscurcir de nouveau si une vaporisation plus active a lieu. On rouve ainsi les phénomènes que M. Fizeau (1) a signalés pour la emière fois dans la combustion du sodium et qui caractérisent raies spontanément renversables. « Une vapeur incandescente, is faible densité et à basse température, émet une certaine radian qui correspond, dans l'observation spectrale, à une certaine e brillante, mais très fine ; si l'on augmente progressivement la npérature et la densité de la vapeur, la raie croît en intensité et largeur et devient une véritable bande lumineuse à bords tompés : bientôt on voit, sur cette bande, naître une ligne some à la place de la raie fixe primitive ; finalement, la bande lumiuse s'étale d'une manière en quelque sorte indéfinie, offrant ujours la ligne sombre qui s'élargit aussi d'une manière à peu rès proportionnelle. Sur le fond lumineux produit par l'épanouisment de la bande, les raies brillantes non renversables s'évaouissent complètement (2). »

Raies spontanément renversables. — Toutes les raies ne sont pas effet spontanément renversables; celles qui le sont affectent, après M. Cornu, une distribution régulière : « Elles vont en se sserrant vers le côté le plus réfrangible et en diminuant d'intentié. Ce caractère est d'autant plus frappant que le nombre des raies nversées est plus considérable et que le champ sur lequel elles se étachent est plus uniforme ; il semble qu'avec l'élévation de tempéture le spectre tende vers un aspect limite, celui d'un fond brillant ntinu, dépouillé de toute raie autre que celle de la série régulière s raies spontanément renversées. » Parmi les spectres métallies pouvant donner une série régulière de raies spontanément nversées, M. Cornu cite surtout l'aluminium et le thallium qui ésentent chacun une série de doublets obéissant très sensiblement x mêmes lois de répartition et d'intensité que les raies de l'hydrone (tant dans le spectre ultraviolet que dans le spectre visible).

(1) Fizeau, *C. R.*, LIV, 393 ; 1862.
(2) Cornu, *C. R.*, LXXIII, 332, et C, 1181 ; 1871-85; et *Journal de physique*, V, ; 1886.

Type hydrogène. — Les raies de l'hydrogène marquées s figure ci-contre sont (outre C et F) les seules qui appartienn ce gaz, comme l'a démontré M. Cornu. Par des précautions n

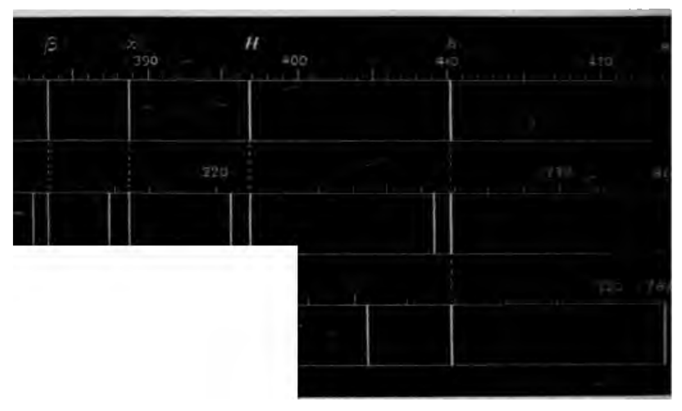


Fig. 361

tieuses, et spécialement par un lavage répété avec de l'ozone réussi à obtenir des tubes ne contenant plus que des traces d'ii retés, où tout autre spectre s'efface devant les véritables raie l'hydrogène, celles-là mêmes que M. Huggins a reconnues dan étoiles blanches. Ces raies obéissent exactement à la relation posée par M. Balmer

$$\lambda = \lambda_0 \frac{m^2}{m^2 - 4},$$

ainsi qu'on en peut juger d'après le tableau suivant que M. Vo a établi en prenant $\lambda_0 = 364,542$.

Lignes	m	λ calculé	λ observé
C	3	656,18	656,18
F	4	486,06	486,06
G'	5	433,98	433,95
h	6	410,11	410,12
H'	7	396,95	396,92
α	8	388,84	388,81
β	9	383,48	383,49
γ	10	379,73	379,73
δ	11	377,00	376,99
ε	12	374,96	375,02
ζ	13	373,38	373,41
η	14	372,14	372,11
θ	15	371,14	371,12

Raies courtes, raies longues. — Quand on provoque électriquement les raies d'un métal, on constate que certaines raies persistent dans les régions les plus froides de l'arc, tandis que d'autres ne se manifestent qu'au centre de l'espace incandescent et au voisinage des charbons : on ne les aperçoit donc pas sur toute la longueur de la fente comme les premières. M. Lockyer s'est beaucoup occupé des *raies courtes* et des *raies longues* (¹) ; selon M. Cornu, ces dernières ne seraient autres que les raies spontanément renversables.

Cartes du spectre solaire. — Pour édifier sa théorie des raies solaires, Kirchhoff (²) entreprit d'exécuter, avec son spectroscope à quatre prismes, un dessin fidèle du spectre comprenant toutes les raies solaires et en regard les raies métalliques que le prisme à réflexion totale lui permettait de voir juxtaposées.

Il dessina lui-même une bande de plus d'un mètre représentant la région qui s'étend depuis D jusqu'au delà de F ; son élève Hoffmann fit le reste. Toutes les raies du fer (plus de 60 dans la partie relevée par Kirchhoff et 13 dans les morceaux étudiés par Hoffmann), du calcium et du magnésium coïncidèrent strictement avec des raies solaires. Les plus brillantes seulement (sans doute les seules spontanément renversables) du baryum, du zinc et du cuivre trouvèrent leurs correspondantes dans le spectre solaire. Le lithium, le strontium, l'aluminium, l'étain (³), le mercure, le plomb, l'argent n'offrirent aucune concordance.

Ångström (⁴) reprit ce travail, en se servant non plus de prismes mais de réseaux qui donnent le spectre normal ; et, avec le concours de Thalén, il dressa une carte admirable (la figure 362 en montre une portion), sur laquelle deux raies dont les longueurs d'onde diffèrent de 1 millionième de millimètre sont distantes de 1 centi-

(¹) Dans les expériences faites à la Monnaie de Londres, avec M. Chandler Roberts, il a pu déterminer la richesse d'un alliage en un certain métal par l'aspect des raies longues de ce métal.

(²) KIRCHHOFF, *Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente* dans les *Abhand. d. Berlin. Akad.* ; et, en tirage à part, Berlin ; 1861-63. Son spectre est rapporté à une échelle spéciale, dans laquelle A occupe la division 404,1, B 529,6, C 694,1, D_1 1002,8, D_2 1006,8, E 1522,7, b_1 1648,8, F 2080,0, G 2854,4.

(³) La portion ultraviolette du spectre solaire a des raies appartenant à l'aluminium et à l'étain.

(⁴) ÅNGSTRÖM, *Spectre normal du soleil* (Atlas). Upsal ; 1868.

mètre. Confirmant et étendant les observations de Kirchhoff, il nota

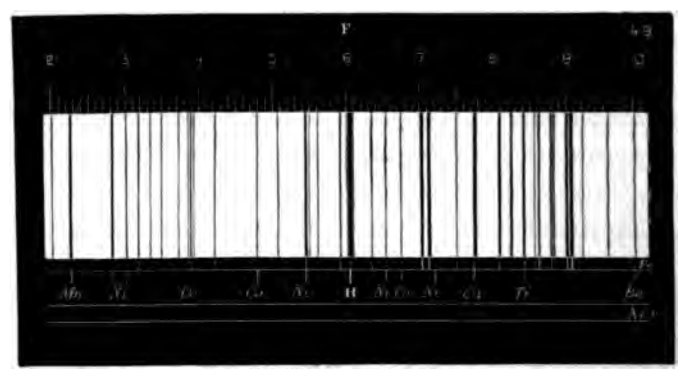


Fig. 362

les nombres suivants de coïncidences entre raies solaires et raies métalliques :

Substances	Nombre de lignes	Substances	Nombre de lignes
fer	450	baryum	11
titane	118	sodium	9
calcium	57	cuivre	7
manganèse	57	magnésium	4
nickel	33	hydrogène	4
cobalt	19	zinc	2
chrome	18	aluminium	2

En présence de tels chiffres, l'existence de ces métaux à l'état de

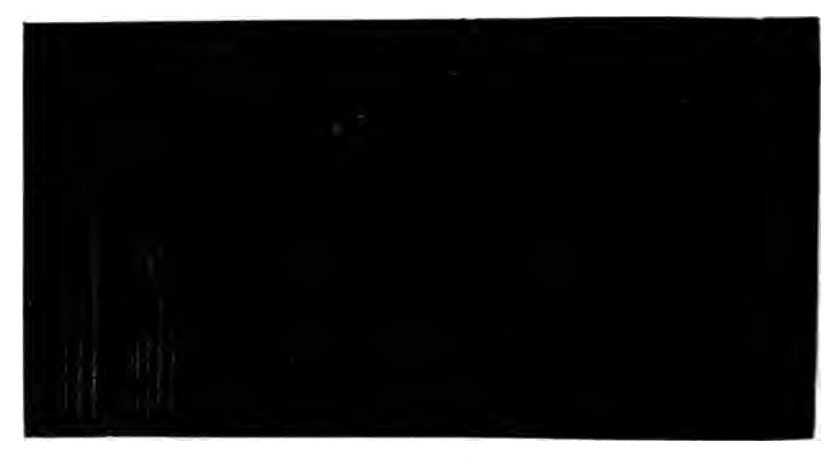


Fig. 363

vapeurs dans l'atmosphère solaire ne saurait être douteuse, d'autant

ue les nombres précédents seraient encore accrus si nous teions compte des coïncidences rencontrées dans la partie ultraiolette, pour laquelle M. Mascart, puis M. Cornu ont continué la arte d'Ångström jusqu'à $\lambda = 295$.

Nous reproduisons ici (fig. 363) une partie des spectres du soleil t du fer, vers $\lambda = 400$, photographiés sur la même glace par I. Lockyer (¹).

Depuis le travail d'Ångström, l'étude du spectre solaire (²) ne

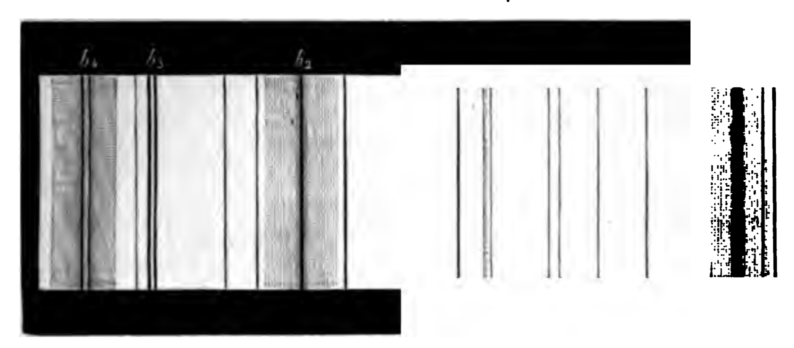


Fig. 364

est pas ralentie. Les beaux dessins de Thollon (³), auxquels nous npruntons le groupe *b*; le grand atlas de M. Fiévez (⁴), d'où nous

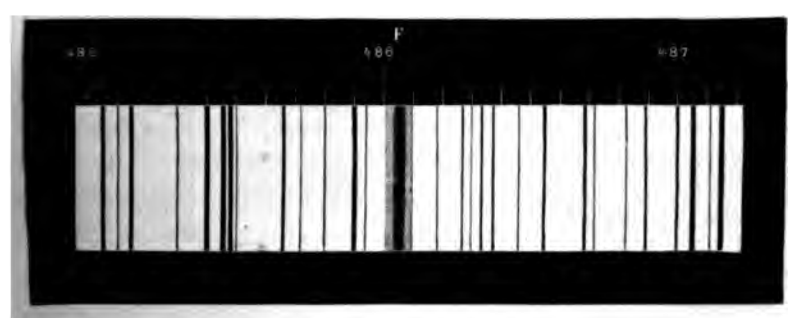


Fig. 365

[illegible]achons la partie afférente à la raie F; et surtout les photograhies magistrales de M. Rowland en ont fait connaître les moindres

(¹) LOCKYER, *Studies in spectrum analysis*. London; 1878.
(²) Il n'est toujours question ici que de la partie visible.
(³) THOLLON, *Journal de physique*, VIII, 73; 1879.
(⁴) FIÉVEZ, *Spectre solaire*. Bruxelles; 1882.

détails. D'un autre côté, les recherches de M. Janssen (1), à Meudon, en Algérie et au sommet du Mont-Blanc (2), l'ont amené à conclure que l'oxygène manque dans l'atmosphère solaire. Cette absence de l'un des éléments de l'eau contraste singulièrement avec l'abondance de l'autre élément qui constitue presque seul les couches élevées de l'atmosphère du soleil.

Tableau des principales raies. — Pour terminer ce rapide résumé des travaux consacrés à la portion visible du spectre solaire, nous réunirons dans le tableau ci-joint les résultats relatifs aux principales raies :

	Désignation.	Longueur d'onde en millionièmes de millimètre.	Remarques.	Origine.
Rouge extrême.	A A_0	762,02	Isolée.	Tellurique (O).
	A	759,81	Double.	
Rouge	a	718,45	Principale.	Tellurique (HO).
	B B_0	688,28	Isolée.	Tellurique (O).
	B	686,87	Principale (double).	
	C	656,18		H.
Orangé	α_0	628,66	Isolée.	Tellurique (O).
		627,69	Principale.	
Jaune	D D_1	589,50		Na.
	D	589,20		Ni.
	D_2	588,90		Na.
	E	526,95	Double.	Fe et Ca.
	E	526,85		Fe.
Vert	b_1	518,30		Mg.
	b_2	517,20		Mg.
	b_3	516,86	Double.	Ni et Fe.
	b_4	516,67	Double.	Mg et Fe.
Bleu	F	486,06		H.
Indigo	G'	433,95		H.
Violet	G	430,72		Fe.
	h	410,12		H.
Ultraviolet	H H_1	396,80		Ca.
	H_2 ou K	393,30		Ca.

Résultats de l'analyse spectrale relativement à la constitution des astres. — Kirchhoff avait deviné l'atmosphère de vapeurs métalliques qui enveloppe le soleil d'après les raies d'absorption dont ces vapeurs sillonnent le spectre. Lors de l'éclipse totale de 1870.

(1) Janssen, *C. R.*, CVII, 672; CVIII, 1035 et CXI, 442; 1888-90.

(2) Au sommet du Mont-Blanc, la diminution d'intensité du groupe B a été particulièrement frappante.

moment où le soleil allait sortir de l'ombre, M. Young vit leur ctre direct sous l'aspect de nombreuses raies brillantes, qui parurent presque aussitôt, voilées par le spectre de l'astre avec raies sombres habituelles.

La photosphère est donc entourée d'une *atmosphère* très mince de eurs métalliques à basse tension. Ces vapeurs se précipitent sans se. Ainsi s'amassent des nuages brillants qui constituent essenlement la surface rayonnante, et dont les déchirures se manifest à nous avec l'apparence de *taches* sombres. Si l'image de l'une ces taches passe sur la fente du spectroscope, la plupart des raies argissent (particulièrement la raie D qui souvent devient dif-e), attestant une absorption plus énergique. Au contraire, les es de l'hydrogène s'effacent, parfois même elles se mettent à ller. Par toutes les déchirures s'échappent en effet des torrents nenses d'hydrogène, formant les *protubérances* qui présentent einte de l'hydrogène dans les tubes de Geissler (¹). Quelquefois bles à l'œil nu, tant elles sont gigantesques, les protubérances été très anciennement signalées; mais, comme elles restent sque toujours masquées par l'éclat du soleil, elles semblaient ne voir être étudiées que pendant les éclipses, quand M. Janssen (²), untoor (Inde), et M. Lockyer (³), à Londres, montrèrent que l'on it les observer en tout temps au moyen du spectroscope, qui ne une image monochromatique (rouge C) de la portion de la tubérance projetée sur la fente. En déplaçant la fente devant te image, on pourra donc en relever successivement toutes les ties. Il est même possible d'élargir beaucoup la fente de façon à r une fraction notable de la protubérance, sans que l'image se d'être nette.

Le soleil est encore environné d'une région lumineuse channte, qui s'étend à une distance presque égale au diamètre de tre et que l'on nomme la *couronne* : elle émet à la fois un spectre aies brillantes (principalement les raies de l'hydrogène et la

(¹) Outre l'hydrogène, on a signalé dans les protubérances le magnésium et une stance inconnue, que M. Lockyer nomme hélium (ἥλιος, soleil), produisant une jaune, près de D.

(²) JANSSEN, *C. R.*, LXVII; oct. 1868; et *Annuaire du Bureau des longitudes* pour 9, p. 584.

(³) LOCKYER, *Proceed. R. S.*; oct. 1868.

fameuse raie 1474 de Kirchhoff, 531,59 d'Ångström, due probablement au fer) et un spectre continu (¹), surtout intense dans le violet, ce qui a permis à M. Huggins d'en prendre des photographies à la lumière monoactinique que laisse passer une dissolution concentrée de permanganate de potasse.

La lune, éclairée par le soleil, offre le même spectre sans aucun indice d'absorption décelant une atmosphère autour de notre satellite. Les spectres des planètes (²) y révèlent au contraire une atmosphère d'autant plus développée qu'elles sont plus éloignées du soleil (Vogel). La figure ci-contre représente, d'après

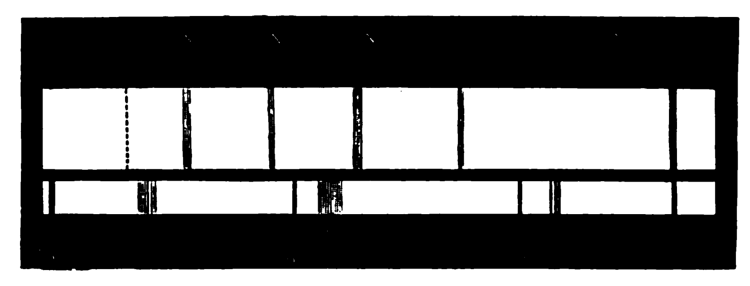


Fig. 366

M. Huggins, le spectre d'Uranus, auquel on a joint en haut les raies de l'azote N, en bas les principaux groupes telluriques du spectre solaire, avec les raies de Fraunhofer voisines et une échelle en longueurs d'onde.

Les spectres des étoiles ont été spécialement étudiés par le P. Secchi, M. Vogel, M. Huggins. Toutes ont, comme le Soleil, un spectre lumineux sillonné de raies obscures, correspondant à quelqu'un des éléments reconnus dans le Soleil (³) : ainsi, d'après M. Huggins, Sirius contient de l'hydrogène, du sodium, du magnésium, du fer.

(¹) Ce spectre continu, sur lequel on distingue quelques raies obscures, entre autres D (Janssen), paraît dû à la réflexion des rayons solaires, la lumière de la couronne étant polarisée.

(²) Un astre de diamètre apparent insensible donnerait un spectre linéaire difficile à étudier. Pour l'élargir, Fraunhofer plaçait devant l'oculaire de la lunette astronomique une lentille cylindrique, de façon à obtenir une image linéaire réelle qu'il examinait à travers un prisme. La même disposition peut être conservée avec un spectroscope, la fente du collimateur étant amenée sur l'image. Dans certains appareils, le système de prismes est disposé entre l'objectif et l'oculaire, dont le verre collecteur est alors remplacé par une lentille cylindrique.

(³) Le spectre d'Arcturus montre plus de 30 des raies solaires.

On remarque toutefois des différences assez grandes qui ont conduit le P. Secchi, puis M. Vogel, à classer les étoiles en trois groupes :

1° Les étoiles blanches, c'est-à-dire la moitié environ des étoiles, et entre autres α de la Lyre (Véga), α du Grand Chien (Sirius), α de l'Aigle (Altaïr), α du Lion (Régulus), α du Petit Chien (Procyon), α des Gémeaux (Castor), caractérisées par un spectre intense dans le violet et à raies sombres peu abondantes (parmi lesquelles dominent les raies de l'hydrogène (1), larges et estompées), ce qui annonce une température très élevée.

2° Les étoiles jaunes, dont le type est notre Soleil et parmi lesquelles on peut citer α du Cocher (Chèvre), α du Taureau (Aldébaran), α du Bouvier (Arcturus), α de la Petite Ourse (Polaire), β des Gémeaux (Pollux), où une absorption plus énergique et accusée par de nombreuses raies obscures dans le rouge et dans le bleu, dénote une température moins haute.

3° Les étoiles rouges, telles que α d'Hercule, α d'Orion (Bételgeuse), α du Scorpion (Antarès), β de Pégase, parvenues à un degré encore plus avancé de refroidissement, de larges bandes d'absorption indiquant une décomposition incomplète (2).

Le spectre des nébuleuses résolubles est analogue à celui des étoiles. Les nébuleuses non résolubles donnent un spectre très dissemblable, qui témoigne d'une constitution toute différente : il est formé de quatre raies brillantes, dont la moins réfrangible, toujours présente, est Az; deux autres appartiennent à l'hydrogène (F et G′), la quatrième semble coïncider avec la raie 495,67 du fer (Huggins) (3). Il y a donc des nébuleuses qui ne sont point des amas d'étoiles, mais de simples masses gazeuses incandescentes, et dont la distance à la terre n'est pas nécessairement supérieure à celle des étoiles, tandis que les nébuleuses résolubles, composant des systèmes analogues à celui dont notre soleil fait partie, doivent être supposées beaucoup plus éloignées.

(1) γ de Cassiopée présente ces raies brillantes.

(2) Le P. Secchi distinguait un quatrième groupe, peu nombreux, composé de petites étoiles, de couleur rouge sang, dont le spectre trahit deux larges interruptions, et qui paraissent à un état de condensation peu avancé, nébuleux.

(3) Voir Maurat, *Journal de physique*, I, 403 ; 1872.

Le noyau des comètes émet un spectre consistant en trois bandes lumineuses, que M. Huggins attribue à la vapeur de carbone; la chevelure produit un spectre continu dans lequel on distingue nettement plusieurs des raies sombres de Fraunhofer et qui semble dû par conséquent à de la lumière solaire réfléchie par des particules solides.

Le spectre de l'aurore boréale (¹) ne rappelle aucun des spectres connus (²) : Zöllner croit qu'il provient de décharges électriques dans de l'air beaucoup plus froid qu'à l'intérieur des tubes de Geissler; ce serait le spectre de l'azote très froid et très rare.

Résultats de l'analyse spectrale relativement au mouvement des astres (³). — Ce n'est pas seulement la constitution des astres, c'est aussi leur marche que la spectroscopie peut nous dévoiler.

Le mouvement du centre d'ébranlement influe en effet sur la couleur d'une lumière exactement comme sur la hauteur d'un son (399). Si le centre se rapproche, la raie caractéristique de cette lumière avance vers le violet; s'il s'éloigne, elle recule vers le rouge; et la grandeur du déplacement est liée à la vitesse du centre, de telle sorte que la mesure de cette grandeur conduit à détermination de la vitesse.

Ce principe, formulé pour la première fois par M. Fizeau (⁴), a été appliqué à quelques étoiles fixes par le P. Secchi mais avec des appareils insuffisants. Des instruments plus délicats ont permis à M. Huggins de constater dans le spectre de Sirius un déplacement de F vers le rouge (relativement à la même raie donnée par un tube à hydrogène), égal à peu près au $\frac{1}{8}$ de la distance des deux raies D. Or $D_1 - D_2 = 0{,}60$ millionièmes de millimètre, la vitesse de la lumière est 300,000 kilomètres. On a donc pour la vitesse de Sirius, en kilomètres,

$$u = 300\,000 \frac{0{,}075}{486{,}06} = 46^{\text{km}} \text{ environ.}$$

(¹) Voir Ångström, *Journal de physique*, III, 210; 1874. L'historique des premiers travaux relatifs à ce spectre a été donné par Bertin, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXVI, 269; 1872.

(²) La raie principale est 556 dans le jaune.

(³) Voir Cornu, *Sur la méthode Doppler-Fizeau* dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* pour 1891.

(⁴) Fizeau, *Bulletin de la Société philomatique*, déc. 1848; et *C. R.*, LXIX, 743; LXX, 1062; 1869-70.

Pour évaluer ces faibles déplacements, Zöllner ([1]) a construit un spectroscope à réversion, dans lequel deux systèmes prismatiques, semblables mais opposés, projettent deux spectres aux couleurs étalées en sens inverse. Ces deux spectres sont observés avec une lunette dont l'objectif, aménagé comme un héliomètre, présente deux images de chacun des spectres. A cet effet, il est coupé en deux moitiés qu'une vis micrométrique permet de rapprocher ou d'éloigner. On agit sur la vis de façon à faire coïncider dans deux spectres inverses une même raie, F, fournie par une source fixe. Puis on dirige l'appareil sur la source en mouvement. Les deux moitiés de la raie, déplacées en sens contraires, se séparent d'une quantité qui est double du déplacement réel et que l'on mesure en rétablissant la coïncidence à l'aide de la vis micrométrique. L'appareil est très sensible, mais peu sûr : les deux faisceaux à comparer ne traversant pas les mêmes surfaces, il y a toujours un certain dédoublement avec une source fixe. On a pu toutefois s'en servir utilement pour démontrer la rotation du soleil : la coïncidence étant effectuée pour la raie F quand l'image de l'une des extrémités du diamètre équatorial tombe sur la fente, on amène ensuite sur la fente l'image de l'autre extrémité de ce diamètre : le déplacement n'est pas douteux. Contrairement, une raie tellurique, B, ne devrait pas changer, si l'appareil n'était entaché d'aucune erreur propre ([2]).

Laissons de côté la réversion qui complique le phénomène, et faisons tomber successivement les images des deux bords de l'équateur solaire sur la fente d'un spectroscope, les raies telluriques resteront fixes, tandis que le déplacement des raies solaires par rapport à ces dernières sera très appréciable. On pourra donc distinguer ainsi les deux sortes de raies. Ce procédé a été employé par Thollon ([3]); mais la pratique en est fort délicate, le déplacement étant très petit ([4]) et relatif.

([1]) Zöllner, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XVIII, 475 et XXVI, 274; 1870-72.

([2]) La précision des mesures avec le réseau est devenue si grande que l'on réussit aujourd'hui à mesurer la rotation solaire non seulement sur l'équateur, mais sur chaque parallèle.

([3]) Thollon, *C. R.*, XCI, 369; 1883.

([4]) La différence des vitesses aux deux bords étant de 4^{km}, le déplacement n'est que $\frac{1}{75}$ de l'intervalle des deux raies D.

M. Cornu [1] est arrivé à des résultats très précis en produisant la substitution rapide et alternative de l'un des bords à l'autre, le spectroscope étant réglé aplanétiquement. Les raies telluriques éprouvent alors un balancement qui permet de les distinguer à coup sûr des raies solaires. C'est par ce moyen que M. Cornu a pu débrouiller les groupes A, α, B.

Absorption par les liquides et les solides. — Nous avons déjà indiqué que l'oxygène liquide offre les bandes de l'oxygène gazeux. De même l'acide hypoazotique liquide montre les bandes les plus importantes de la vapeur [2].

Si l'on vise une lumière suffisamment intense à travers un tube d'au moins 2 mètres, plein d'eau filtrée, on voit les bandes d'absorption qui révèlent dans l'atmosphère la présence de la vapeur d'eau [3]. On retrouve facilement ces mêmes bandes en observant à travers une eau limpide un fond clair illuminé par le soleil. M. Vogel [4] dit que l'eau de la grotte de Capri éteint le rouge jusqu'à la raie D (comme une solution de sulfate de cuivre ammoniacal), tout en donnant nettement la bande d'absorption sur *b*E; les substances étrangères modifient en effet profondément le spectre ainsi que la couleur de l'eau [5].

Le sang, en solution étendue, présente entre D et E deux bandes d'absorption qui se réunissent en une seule par l'addition de quelques gouttes de sulfhydrate d'ammoniaque ou d'acétate de fer ammoniacal [6].

La chlorophylle a des bandes non moins caractéristiques, signalées par M. Stokes. M. Hagenbach en compte sept très nettes sur les dissolutions alcooliques ou éthérées; les plus notables sont une première bande qui commence à la raie B et s'allonge vers C, une deuxième entre C et D, une troisième un

(1) Cornu, *loc. cit.*

(2) Kundt, *Pogg. Ann.*, CXLI, 157; 1870. — Gernez, *C. R.*, LXXIV, 465; 1872.

(3) Schönn, *Pogg. Ann.*, *Erg.* 8, 670; 1878.

(4) Vogel, *Practische Spectralanalyse.* Berlin, Oppenheim; 1889; p. 320.

(5) Le spectre d'émission de l'eau apparaît dans la flamme de l'hydrogène. L'œil n'y voit qu'une lueur verte continue; mais la photographie y décèle plusieurs raies brillantes dans l'ultraviolet.

(6) Le spectre n'éprouve aucun changement sous l'action des réducteurs si le sang contient de l'oxyde de carbone. Dans ce cas d'ailleurs les raies sont plus pâles, plus effacées, et un peu déplacées du côté du vert.

peu plus loin que D, une quatrième dans le vert immédiatement avant E.

Les verres colorés agissent par absorption. On s'en sert couramment dans les laboratoires pour obtenir des rayons d'une certaine couleur. Le meilleur est le verre rouge, à l'oxydule de cuivre, qui procure une lumière presque monochromatique, voisine de C. On a encore, mais beaucoup plus difficilement, de bons verres violets et verts.

Brewster employait plus volontiers des lames de gélatine colorée, qui ont en effet des teintes très variées, dont certaines sont assez simples (on le reconnaît aisément avec un petit spectroscope de poche). La dissolution de sulfate de cuivre ammoniacal est souvent utilisée pour isoler le bleu. Un mélange de perchlorure de fer et de chlorure de nickel permet d'isoler le jaune ([1]).

Les sels de lanthane et de didyme manifestent de remarquables spectres d'absorption, qu'on les examine en dissolution, en cristaux, ou même par réflexion.

Aux spectres d'absorption appartiennent effectivement ceux qui proviennent de la lumière réfléchie à la surface des corps ; car la couleur superficielle d'un corps se compose des éléments non absorbés de la lumière incidente. On étudie très bien la couleur d'un papier peint en projetant un spectre sur un écran qui porte l'une au-dessus de l'autre une bande de papier peint et une bande de papier blanc.

II. — Mesure des indices de réfraction.

436. Mesure des indices à l'aide du prisme. — *Méthode générale.* — Le prisme fournit le moyen le plus ordinairement usité pour la mesure des indices.

Quand des rayons lumineux traversent un prisme d'angle A au minimum de déviation, l'indice n du prisme pour les rayons considérés est lié à l'angle A et à la déviation minimum δ par la re-

([1]) En dissolvant dans l'eau $22^{gr},321$ de perchlorure de fer et $27^{gr},191$ de chlorure de nickel, on obtient un liquide qui ne laisse passer que la lumière de longueur d'onde 582, d'après M. Crova (*Comptes rendus du Congrès des électriciens tenu à Paris en* 1889, p. 211).

lation suivante, qui résulte immédiatement des équations (2) éta blies plus haut (426),

$$n = \frac{\sin\frac{A+\delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Nous avons déjà vu (414) comment s'évalue l'angle A d prisme. Les mêmes appareils et toutes les dispositions prises pou l'ajustement serviront à mesurer ensuite δ. Après s'être assuré qu les rayons traversent le prisme au minimum de déviation, on aura directement δ en relevant l'angle formé par les rayons déviés et par les prolongements des rayons incidents, si certains rayons se prolongent effectivement au dehors du prisme jusqu'à la lunette. Sinon, en faisant tourner sur elle-même la plate-forme qui supporte le prisme de manière à produire la déviation minimum de l'autre côté, on mesurera l'angle compris entre les deux positions de la lunette recevant successivement les rayons déviés dans deux directions symétriques par rapport au rayon incident : cet angle sera égal à 2δ.

Ces mesures n'auront d'ailleurs de signification précise que si l'on opère sur une lumière simple et à une température détermi-

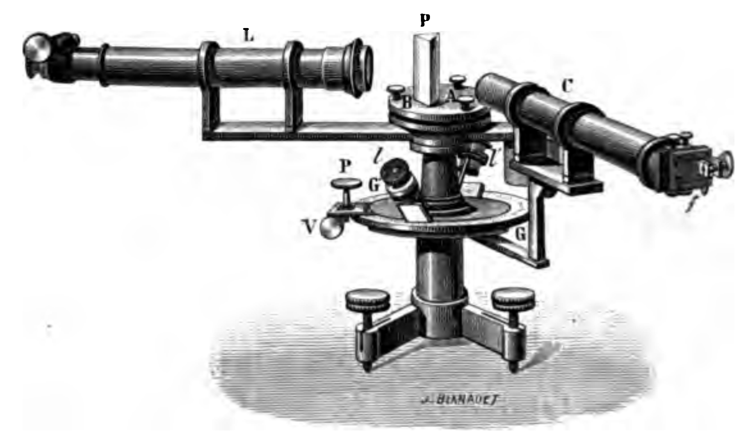


Fig. 367

née. Quand on fait usage de la lumière blanche, le résultat se rapporte grossièrement à la partie la plus éclairée du spectre voi-

ine de D. Mais pour avoir des mesures définies il faut recourir à une lumière monochromatique, soit que l'on éclaire la fente avec la flamme du sodium, du lithium, du thallium, avec un tube de Plücker à hydrogène, ou toute autre source donnant des raies brillantes, soit que l'on utilise comme repères les raies obscures du spectre solaire.

La figure 367 représente un goniomètre de Fraunhofer, construit par Brünner. Cet instrument, muni d'un collimateur, permet d'effectuer de très bonnes mesures : chaque angle se lisant (sur un cercle de Gambey) à 5″ près, on peut avoir l'indice avec 4 décimales exactes ([1]).

Vérification de la loi de Descartes. — Au moyen d'un appareil de ce genre il est aisé de vérifier la loi de Descartes (422).

On a, en général, entre l'indice n, l'angle A du prisme, l'angle d'incidence i et la déviation D, les relations (1).

L'indice pour la raie considérée et l'angle du prisme étant

([1]) On a, en effet,

$$dn = -\frac{\sin\frac{\partial}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\frac{dA}{2} + \frac{\cos\frac{A+\partial}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\frac{d\partial}{2}.$$

Or l'erreur probable est la même sur la mesure de ∂ que sur la mesure de A; et comme l'on doit supposer que les deux erreurs, que nous désignerons l'une et l'autre par $\delta\alpha$, s'ajoutent arithmétiquement, on a pour l'erreur probable de n

$$\delta n = \left(\frac{\sin\frac{\partial}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} + \cos\frac{\frac{A+\partial}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right)\frac{\delta\alpha}{2}.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, δn est d'autant plus petit que A est plus grand. Mais A doit être inférieur au double de l'angle limite (426). Pour la plupart des corps, n est plus petit que 2 ; on pourra prendre $A = 60°$. Admettons cette valeur de A et supposons $n = 1{,}5$, l'erreur probable sera

$$\delta n = \frac{4}{3}\delta\alpha.$$

L'arc de 5″ ayant pour longueur 0,000024 dans le cercle de rayon 1, $\delta n = 0{,}000032$.

Pour avoir l'indice à une unité près de la 5e décimale, il faudrait que les erreurs de lecture n'atteignissent pas 2″, ce qui sera très difficile, moins encore à cause des imperfections de l'appareil et du réglage que par suite du manque de planéité des faces.

connus, on mesure l'angle d'incidence (en fait l'angle (180-2i) que le rayon réfléchi par la face d'entrée fait avec le prolongement du rayon incident) ainsi que la déviation ; et l'on reconnaît que dans tous les cas les observations sont absolument d'accord avec les formules. La loi de Descartes est donc démontrée d'une façon péremptoire.

Mesure des indices des solides et des liquides. — La méthode du prisme s'applique immédiatement aux corps solides. Un liquide sera introduit dans un prisme creux dont on aura préalablement déterminé l'action à vide, les glaces qui forment les parois n'étant pas à faces exactement parallèles (¹). On prendra toujours soin de noter la température du corps soumis à l'expérience.

Indices des gaz. — La réfraction d'un gaz s'étudiera de même à l'aide d'un prisme creux ; mais, comme cette réfraction est très faible, qu'elle dépend essentiellement de la densité qui varie elle-même dans des proportions considérables avec la température et la pression, il faut nécessairement tenir compte de toutes ces circonstances.

A la fin du dix-huitième siècle, Hawksbee, sur l'invitation de Newton, essaya d'évaluer la réfraction atmosphérique en regardant un objet éloigné à travers un prisme (de petit angle) successivement vide et rempli d'air ; les moyens dont il disposait étaient trop imparfaits pour conduire à un nombre quelque peu précis. Borda reprit la question, mais il mourut avant d'avoir terminé ses expériences et l'on n'a pas même pu retrouver un seul de ses résultats.

Déterminations de Biot et Arago (²). — Biot entreprit de mener ce travail à bonne fin avec le concours d'Arago qui sortait à peine de l'École polytechnique. Ils se servirent du prisme même de Borda ; c'était un gros tube, dont les extrémités, taillées en biseau et fermées par des glaces à faces parallèles, comprenaient entre elles un angle de 143°7′28″. Ce prisme, muni à la partie supérieure d'un

(¹) Pour atténuer cette imperfection, on prend les deux glaces dans une même lame bien travaillée, que l'on coupe suivant une direction autant que possible parallèle à l'arête du petit angle qui reste encore, et l'on oppose les deux morceaux l'un à l'autre, de sorte que leurs effets s'entredétruisent mutuellement.

(²) BIOT et ARAGO, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VII, 301 ; 1806.

et à la partie inférieure d'une tubulure à robinet, fut
ın axe vertical ; et on l'installa dans une salle du palais
ourg en même temps qu'un
titeur de Borda, destiné à la
angles. Un paratonnerre de
re, situé à 1400 mètres de dis-
lieu de mire. Pour mesurer la
n visait le signal à travers le
lisait la position de la lunette sur
uis on faisait tourner le prisme
our de son axe; on amenait de
lunette sur le signal, et pour
it la déplacer d'un angle 2D,
la déviation cherchée, l'action
tant égale et contraire dans les
ons successives (1).

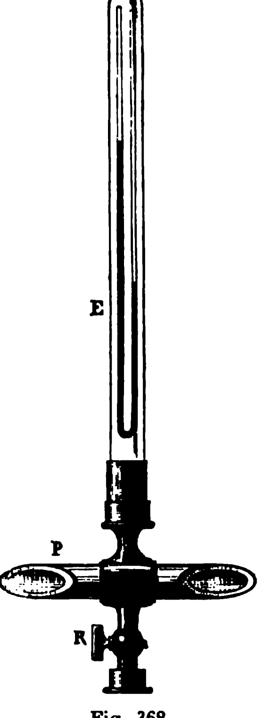


Fig. 368

contentait pas d'une seule me-
ttant le prisme dans sa position
ramenait la lunette sur la mire,
rant, non la lunette fixée mo-
nt au cercle, mais le cercle lui-
is, retournant à nouveau le
rejoignait l'image en faisant
lunette sur le cercle, comme la
is : elle décrivait une seconde fois l'arc 2D qui se por-
ercle à la suite du premier; et en recommençant de la
ière, on pouvait multiplier indéfiniment les observa-

, laissant le prisme librement ouvert dans l'atmosphère
tre enlevé), on détermina d'abord la déviation due au
raison du défaut de parallélisme entre les deux faces
glace. Elle se trouva être de 16",6 (du côté de la base du

rquera que le rayon qui se meut suivant l'axe du tube traverse le
nimum de déviation, de sorte que si le retournement n'est pas
e 180°, le déplacement n'en sera pas affecté d'une quantité sen-
fort important pour la sûreté des observations.
confondre cette méthode de multiplication avec la méthode de
16).

prisme), quantité très petite quand on la compare à la dév totale, qui, avec le prisme vide, dépassait 6′ en sens contraire

On faisait en effet le vide dans le prisme ; et si l'on avs enlever tout l'air, la déviation (qui se produisait vers le somm prisme), augmentée de 16″,6, eût fait connaître l'indice $\frac{1}{n}$ du relativement à l'air extérieur, et par suite l'indice n de ce Mais il restait toujours une certaine quantité d'air dans le pri ce que l'on mesurait, c'était donc l'indice $\frac{1}{k}$ de l'air intérieu lativement à l'air extérieur,

$$\frac{1}{k}=\frac{n_i}{n_e}.$$

Or, d'après Newton, la *puissance réfractive* n^2-1 est proport nelle à la densité d, ou, en d'autres termes, le *pouvoir réfrin* $\frac{n^2-1}{d}$ est constant.

Si donc on appelle :

n_0 l'indice de l'air sec sous la pression 76^{cm} et à $0°$,

n_i l'indice de l'air intérieur sous la pression résiduelle h et température t (marquée par deux thermomètres en contact ave faces extérieures du prisme),

n_e l'indice de l'air extérieur sous la pression H [1] et à la tem rature t,

on aura

$$\frac{n_i^2-1}{n_0^2-1}=\frac{h}{76(1+\alpha t)},$$

et

$$\frac{n_e^2-1}{n_0^2-1}=\frac{\mathrm{H}}{76(1+\alpha t)},$$

d'où

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1+\dfrac{(n_0^2-1)h}{76(1+\alpha t)}}{1+\dfrac{(n_0^2-1)\mathrm{H}}{76(1+\alpha t)}},$$

[1] L'état hygrométrique de l'air ne joue aucun rôle, la vapeur d'eau ay à peu près le même pouvoir réfringent que l'air atmosphérique à pression ég (voir Biot, *Traité de physique*, III, 317. Paris, Deterville ; 1816).

ès approximativement, les deux termes de la fraction différant le 1,

$$(n_0^2 - 1)(H - h) = (k^2 - 1)76(1 + \alpha t).$$

ot et Arago trouvèrent ainsi (nous transcrivons toutes leurs nales)

$$n_0^2 - 1 = 0,0005891712\ (^1),$$

$$n_0 = 1,000294.$$

introduisirent ensuite dans le prisme sous la pression atmorique successivement divers gaz et ils mesurèrent les dévia correspondantes. Avec un gaz, dont l'indice serait n'_0 dans les itions normales de température et de pression, l'expérience iait le rapport $\frac{1}{k'}$ de l'indice de ce gaz sous la pression H' à ice de l'air sous la pression H, et l'on avait

$$(n_0^2 - 1)H - (n_0'^2 - 1)H' = (k'^2 - 1)76(1 + \alpha t),$$

l'on tirait

$$n_0'^2 - 1.$$

urs mesures portèrent sur l'oxygène, l'azote, l'hydrogène, noniaque et le gaz des marais.

ur plusieurs de ces gaz, et en particulier pour l'air, ils vériit que le pouvoir réfringent est de fait constant, quand la ion varie de quelques millimètres à 76 centimètres, et la érature de $-1°,5$ à $25°$.

reconnurent en outre que la puissance réfractive d'un mélange ıx est égale à la somme des puissances réfractives des gaz ituants sous la pression qui leur appartient dans le mélange. ısi, pour l'air atmosphérique, en appelant N l'indice de l'air, ıi de l'oxygène et n' celui de l'azote, on aura

$$N^2 - 1 = 0,21(n^2 - 1) + 0,79(n'^2 - 1),$$

Le pouvoir réfringent $\frac{n_0^2 - 1}{d}$ est par suite, à un facteur constant près, Newton avait déduit de la réfraction atmosphérique 5208. En combinant grand nombre d'observations avec la formule de Laplace, Delambre ra 4525.

ou, N, n et n' étant très peu différents de 1 [1],

$$N = 0{,}21\,n + 0{,}79\,n'.$$

Si l'on substitue à n et n' leurs valeurs, 1,000272 et 1,000300, vient en effet $N = 1{,}000294$.

Mesures de Dulong [2]. — La constance du pouvoir réfringent d'un gaz étant admise, Dulong détermina les indices relatifs à l'air d'une manière très simple.

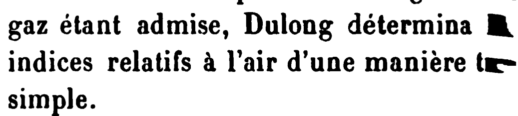




Fig. 369

Le prisme étant d'abord rempli d'air à la pression atmosphérique H, on amène sous le fil du réticule de la lunette l'image de la mire vue à travers le prisme, on immobilise la lunette. On remplace dans le prisme l'air par le gaz à étudier, que nous supposerons plus réfringent que l'air; on diminue graduellement la pression du gaz jusqu'à ce que la mire paraisse de nouveau sous le réticule [3]. Soit alors h la pression du gaz, la température étant restée constante pendant la durée de l'observation, on a tout uniment

$$\frac{n_0'^2 - 1}{h} = \frac{n_0^2 - 1}{H}.$$

Avant chaque expérience, le prisme était lavé à plusieurs reprises avec le gaz soigneusement préparé. Quand il s'agissait d'opérer sur une vapeur, on produisait cette vapeur dans l'appareil même en laissant arriver par le petit tube quelques gouttes de liquide.

Expériences de M. Le Roux [4]. — M. Le Roux a repris et étendu

(1) Posant $n = 1 + \varepsilon$, on a $n^2 - 1 = 2\varepsilon + \varepsilon^2$, ou, en négligeant ε^2 (ce qui est permis au degré d'exactitude des expériences), $n^2 - 1 = 2\,(n - 1)$.

(2) Dulong, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXI, 154; 1826.

(3) Si le gaz était moins réfringent que l'air, la manœuvre se faisait en sens inverse. Pour le chlore, qui attaque le mercure, le prisme fut d'abord rempli de chlore directement sous la pression atmosphérique, puis de cyanogène dont on réduisit la pression jusqu'à ce que sa puissance réfractive devînt égale à celle du chlore.

(4) Le Roux, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXI, 385; 1861.

les mesures relatives aux vapeurs à l'aide d'un appareil tout semblable à celui de Biot et Arago, sauf que le prisme était enfermé dans une enceinte pouvant être chauffée jusqu'à 500°. Le prisme, était formé par un tube en fer, que terminaient deux glaces inclinées de 125°, et qui se prolongeait de chaque côté par un tube en fer étroit,

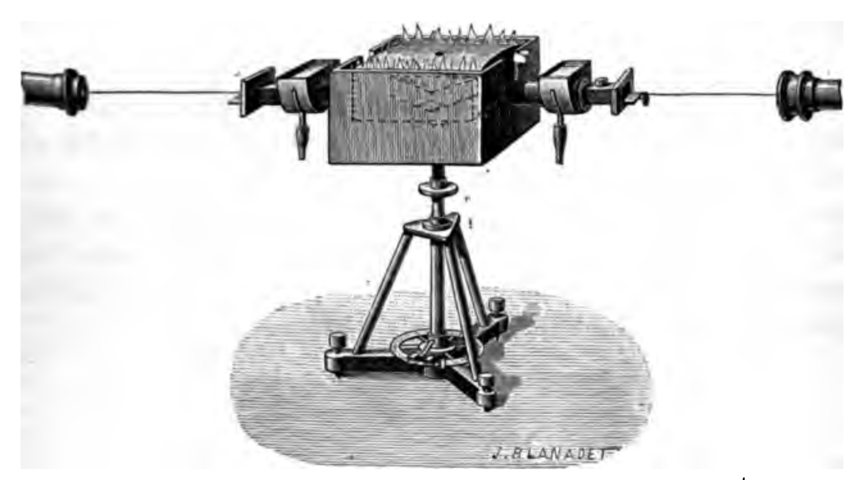


Fig. 370

sortant de l'enceinte et refroidi à sa partie extérieure : les deux faces du prisme se trouvaient ainsi en contact avec deux colonnes d'air qui, l'équilibre établi, se composaient respectivement d'une série de tranches à température constante (la température variant d'une tranche à l'autre depuis la température de l'enceinte jusqu'à celle de l'air extérieur), de sorte que la déviation observée était due uniquement (on l'admettait du moins) à la différence des indices de la vapeur et de l'air considérés tous les deux à la température de l'enceinte. Le prisme, mobile autour d'un axe vertical, était installé entre un collimateur fixe et une lunette également immobile, mais pourvue d'un micromètre oculaire que l'on pouvait déplacer de façon à mesurer le déplacement angulaire de l'image (¹) quand on faisait tourner le prisme de 180° autour de son axe.

Ces expériences ont montré que les vapeurs lourdes sont en général très réfringentes (la vapeur de soufre bouillant, dont la den-

(¹) La tangente de cet angle est égale au déplacement du micromètre divisé par la distance focale de la lunette, qui était d'environ 2 mètres.

sité est 6,6, a pour indice 1,001629); que certaines d'entre elles ont un pouvoir dispersif considérable (avec la vapeur de phosphore le spectre avait une étendue de 1′20″ : toutes les couleurs y étaient bien visibles); que la vapeur d'iode réfracte plus énergiquement le rouge que le violet. C'était le premier exemple de *dispersion anomale*, phénomène qui a été relevé depuis sur un assez grand nombre de substances [1].

437. Mesure des indices par la réflexion totale. — *Procédé de Wollaston* [2]. — Wollaston appliqua le phénomène de la réflexion totale (433) à la mesure des indices. Un prisme rectangle étant mis en contact avec une face plane du corps à étudier, si l'indice n du corps est plus petit que celui N de la matière du prisme, la réflexion totale se produira à la surface de séparation des deux milieux à partir d'un angle λ tel que

$$\sin\lambda = \frac{n}{N}.$$

Mais, d'après la loi de Descartes, l'angle φ du rayon émergent avec l'horizon est lié à l'angle λ par la relation

$$\sin\varphi = N\cos\lambda.$$

On a donc

$$n^2 = N^2 - \sin^2\varphi.$$

Ainsi, il suffira de mesurer φ pour avoir n, N étant connu; et avec un prisme donné on pourra déterminer tous les indices compris entre N et $\sqrt{N^2-1}$.

L'appareil étant disposé comme l'indique la figure ci-jointe, on déplace le cercle sur la tige et la lunette sur le cercle jusqu'à ce que la substance examinée, de sombre qu'elle paraissait, devienne

[1] M. Le Roux signala en outre des coïncidences remarquables entre les valeurs du pouvoir réfringent de corps chimiquement analogues :

	Pouvoir réfringent.		Pouvoir réfringent.
Oxygène	4924	Azote	6187
Soufre	4923	Phosphore	6264

Mais le pouvoir réfringent de l'arsenic (2110) ne concorde pas avec celui de l'azote ou du phosphore.

[2] Wollaston, *Phil. Trans.*, XCII, part II, 365; 1802.

tement brillante : la lunette fait alors avec l'horizon l'angle ché ([1]).

a méthode a l'avantage capital de n'exiger qu'une très petite



Fig. 371

ntité de matière, une goutte de liquide ou un fragment de le présentant une face plane. Dans ce dernier cas, pour établir ntact avec le prisme on se sert d'un liquide dont l'indice $\mathfrak{N}$ soit



Fig. 372

rieur à n ([2]). Ce liquide forme entre le prisme et le corps

WOLLASTON substitua ensuite à la lunette un œilleton porté par un sys- articulé : une graduation tracée sur l'une des tiges indiquait sans calcul la r de l'indice cherché ; mais la mesure ainsi simplifiée perdait toute précision.

Les liquides les plus employés sont : les essences d'anis (1,5573 à 15°,1), ssia (1,6065 à 16°,2), de cannelle (1,6188 à 23°,5) ; le sulfure de carbone 74 à 20°) ; la naphtaline monobromée (1,6585 à 16°,1) ; la liqueur de

...ame à faces parallèles dont on n'a pas à tenir compte. Si en[illegible]
ω est l'angle limite au passage du liquide $\mathfrak{N}$ dans le solide n [illegible],

$$\sin\omega = \frac{n}{\mathfrak{N}}.$$

Or, à l'angle ω dans le milieu $\mathfrak{N}$ correspond un angle φ dans [illegible] le milieu N tel que

$$\sin\varphi = \frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{N}}\sin\omega.$$

On a donc

$$\sin\varphi = \frac{n}{\mathrm{N}},$$

c'est-à-dire que φ est l'angle limite relatif aux milieux N et n.

Généralisation de ce procédé. — Au prisme rectangle, rarem[illegible]ent exact, on substituera avantageusement un prisme quelconque[illegible]e, à



Fig. 373

l'exemple de Malus [1]. Les équations précédentes s'écriront alors, l'angle λ étant égal à $r+\mathrm{A}$,

$$\sin(r+\mathrm{A}) = \frac{n}{\mathrm{N}},$$

$$\sin i = \mathrm{N}\sin r,$$

d'où

$$n = \cos\mathrm{A}\sin i + \sin\mathrm{A}\sqrt{\mathrm{N}^2 - \sin^2 i}.$$

Thoulet, iodure de mercure dissous dans de l'iodure de potassium, (1,7167 à 18°, pour la solution de poids spécifique 3,1); l'iodure de méthylène (1,755 à 18°, et jusqu'à 1,95 quand on y dissout du phosphore et de l'iode).

[1] MALUS, *Mémoires des savants étrangers*, II, 509; 1811.

Si donc on connaît N et A, la mesure de i donnera n [1].

Le prisme étant monté sur un goniomètre dont la lunette possède un réticule éclairé, on s'arrangera de manière que l'image du réticule dans la face AC coïncide avec le réticule lui-même : la lunette sera alors normale à la face AC, et l'angle dont il faudra la faire tourner (ou faire tourner le prisme) pour recevoir le premier rayon totalement réfléchi sera précisément l'angle i.

Si la lunette n'est pas munie d'un réticule éclairé, on visera suivant SI, puis suivant S'I', la source étant amenée en S ; on mesurera ainsi l'angle

$$\alpha = \pi - C + i + i'.$$

Comme il existe entre n, B et i' une relation semblable à celle que nous avons établie entre n, A et i, on voit que si les trois angles du prisme sont connus, n sera déterminé.

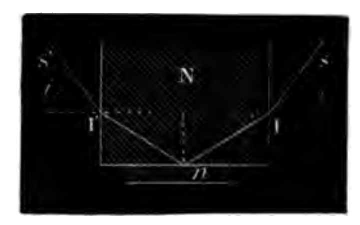


Fig. 374

Le calcul se simplifie si A = B, et si par conséquent $i = i'$.

Quand $A = B = \frac{\pi}{2}$, $C = 0$, le prisme se transforme en un parallélipipède (Feussner) : l'on a

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 i},$$

et l'angle i est égal à la moitié de l'angle $\widehat{SI,S'I'} = \alpha$.

Courbe limite. — Dans tous les cas, le passage de la réflexion partielle à la réflexion totale entraîne une variation brusque d'intensité, et le champ de la vision est coupé en deux portions d'éclat très différent, séparées par les rayons réfléchis sous l'angle limite λ.

[1] On peut déterminer N en appliquant le procédé au cas où le deuxième milieu est l'air, $n = 1$, et l'on a

$$N^2 = \frac{1 - 2 \cos A \sin i + \sin^2 i}{\sin^2 A}.$$

Supposons le centre de l'œil placé en O [1]. Les rayons qui ont ren-contré la surface sous un angle $i < \lambda$ frapperont la rétine en haut et, comme l'impression est renversée, la partie inférieure du cham paraîtra sombre, la partie supérieure éclairée, et la séparation ent



Fig. 375

les deux sera marquée par les rayons qui sont situés sur le côn d'axe O*o* et d'angle au sommet *o*O*k*. La courbe limite, sur laquelle de Sénarmont [2] a le premier appelé l'attention, sera donc sensi-blement un arc de cercle tournant sa concavité vers la région obscure. Dans la lumière blanche, cet arc se borde des couleurs de l'iris.

Appareil de M. Kohlrausch [3]. — M. Kohlrausch, qui a utilisé la réflexion totale pour la mesure des indices des cristaux, a construit un réfractomètre dans lequel la lame à étudier, au lieu d'être appliquée contre un bloc solide, est plongée dans un liquide très réfringent. Elle y est soutenue verticalement par une pince munie des pièces nécessaires pour le réglage et portant une alidade mobile sur un cercle gradué horizontal. On s'arrange de manière à ce que la face réfléchissante de la lame soit exacte ment verticale et autant que possible dans l'axe même de rotatio Une lunette horizontale fixe vise à travers une fenêtre ména dans le vase qui contient le liquide. Les rayons d'une lampe m chromatique sont dirigés sur la lame. On déplace la lampe e tourne la pince sur elle-même jusqu'à ce que la réflexion tot manifeste. On amène la courbe limite sous le fil du réticule

(1) Pour simplifier la figure, on n'a pas marqué la brisure des ray le verre.

(2) De Sénarmont, *C. R.*, XLII, 65 ; et *Journal de mathématiques*, (2), I,

(3) F. Kohlrausch, *Wied. Ann.*, IV, 1 ; 1878.

on transporte la lampe de l'autre côté de la ligne de visée, et pour faire revenir la courbe limite sous le fil du réticule il faut évidemment tourner la pince de l'angle 2λ.

Réfractomètre de Soret (¹). — Soret a établi sur le même principe un réfractomètre où la source de lumière est un collimateur éclairé par le soleil et conséquemment fixe. La lunette est donc mobile et elle entraîne dans son mouvement le cristal qui lui est relié par un mécanisme agencé pour qu'elle reçoive toujours le rayon réfléchi. Cette lunette possède d'ailleurs un prisme à vision directe, de sorte que l'observateur peut faire coïncider la courbe limite successivement avec chacune des raies du spectre.

Observation par transmission. — Si le cristal, transparent, est taillé sous la forme d'une lame à faces parallèles, on peut mettre la source en regard de la lunette, de façon que la lumière traverse la lame. Les rayons qui se trouvent à l'intérieur du cône d'angle au sommet 2λ pénètrent seuls dans le cristal : ils ressortent parallèlement à eux-mêmes et sont compris à l'émergence dans un cône de même angle éclairé intérieurement et sombre extérieurement, à l'inverse de ce qui avait lieu dans les appareils précédents. L'observation est facile; mais la méthode ne convient qu'à une lame extrêmement mince, où les rayons qui échappent par la tranche ne provoquent pas de réduction appréciable dans l'angle du cône émergent (²).

Mesure des indices des liquides : Terquem et Trannin (³), *E. Wiedemann* (⁴). — La même méthode s'adapte aisément à la mesure de l'indice d'un liquide, soit que l'on opère avec une lame solide d'indice connu, soit que, à l'exemple de MM. Terquem et Trannin et E. Wiedemann, on se serve d'une double lame, constituée par deux plaques de verre que sépare une mince couche d'air : les choses se passent alors comme si la réflexion totale s'effectuait à la surface du liquide et de l'air.

(¹) Soret, *Archives de Genève*, (3), IX, 5; 1883.
(²) L'erreur atteint 5 unités de la 4ᵉ décimale quand l'épaisseur est le $\frac{1}{50}$ de la largeur.
(³) Terquem et Trannin, *C. R.*, LXXVIII, 1843; 1874; et *Journal de physique*, IV, 232; 1875.
(⁴) E. Wiedemann, *Archives de Genève*, LI, 340; 1874; et *Pogg. Ann.*, CLVIII, 375; 1876.

Totalréflectomètre de Pulfrich [1]. — M. Pulfrich est revenu à la méthode primitive et lui a donné un haut degré de précision. Son appareil, destiné particulièrement aux mesures minéralogiques qui doivent pouvoir être faites dans tous les azimuths, se compose

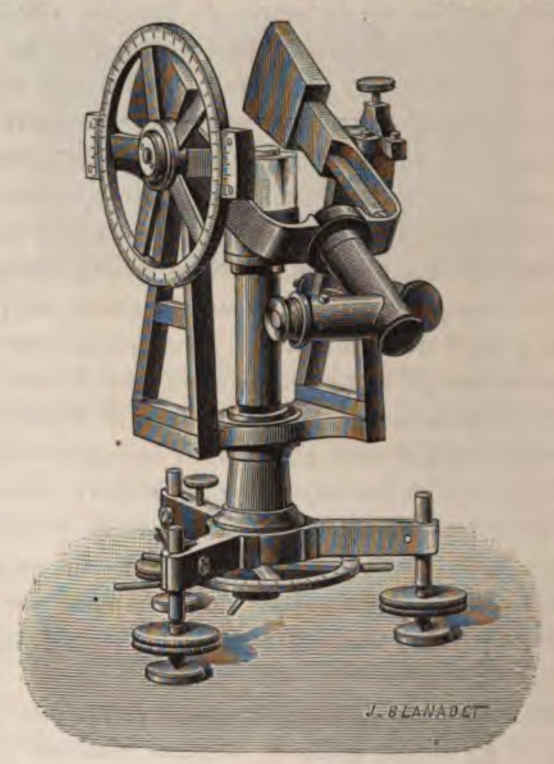


Fig. 376

d'un cylindre de verre très réfringent ($n_D = 1,73727$), bien poli, sur lequel se met la lame cristalline ou le liquide à étudier : une lunette mobile en face d'un cercle gradué, et brisée à angle droit pour plus de commodité, sert à déterminer l'angle limite. L'éclairement est produit par des rayons ayant suivi un chemin symétrique de celui qu'ils parcourent à la sortie (ce qui nécessite un ajustement convenable de la source), soit, plus simplement, par des rayons arrivant à l'incidence rasante (la lame doit alors être trans-

(1) Pulfrich, *Wied. Ann.*, XXX, 193, 317, et 487; 1887 ; et *Journal de physique* (2), VI, 343 ; 1887 (Macé de Lépinay). M. Pulfrich a décrit en détail son appareil dans une brochure intitulée *Das Totalreflectometer*, Leipsig ; 1890.

rente et taillée sous la forme d'un cylindre, mais la courbe limite plus nette). Dans l'un et l'autre cas, l'indice est défini par la formule

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 i};$$

erreur ne dépasse pas quelques unités du cinquième ordre décimal.

Réfractomètre Bertrand ([1]). — Nous citerons encore le petit appareil construit par M. Émile Bertrand pour des mesures rapides. La réflexion totale s'opère sur la face plane d'une lentille demi-

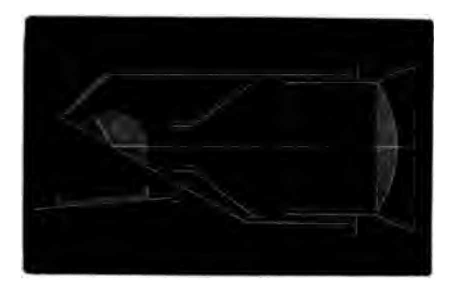


Fig. 377

boule, et la courbe limite vient se dessiner dans le plan focal où on a placé un micromètre, sur lequel vise une loupe oculaire. L'appareil ayant été gradué empiriquement, il suffit d'une lecture pour avoir immédiatement, avec deux décimales exactes, l'indice du corps liquide ou solide qui est en contact avec la lentille.

438. Mesure des indices des lames à faces parallèles. — *Procédé du duc de Chaulnes* ([2]). — Le procédé imaginé par le duc de Chaulnes pour évaluer rapidement l'indice d'une lame transparente peut aussi rendre des services. La lame étant mise sur le porte-objet d'un microscope, on mesure le chemin qu'il faut faire parcourir au corps de l'instrument pour viser successivement les poussières qui se trouvent sur la face supérieure, puis celles qui sont sur la face inférieure de la lame. L'indice est égal (423) au

([1]) E. BERTRAND, *Bulletin de la Société minéralogique de France*, VIII, 375; et *Journal de physique* (2), V, 223; 1886 (Dufet).

([2]) Duc de CHAULNES, *Mémoires de l'Académie des sciences* (*Histoire de l'Académie*; 1767), p. 423.

rapport inverse de l'épaisseur apparente, indiquée par ce chemin, à la l'épaisseur réelle, mesurée directement [1]. L'expérience est facile si le microscope est muni d'une vis micrométrique à tambour gradué.

Modification de Bertin [2]. — On peut se passer de la vis micrométrique en opérant de la manière suivante, proposée par Bertin. Sur la lame en expérience on dispose un micromètre ; et, après avoir beaucoup tiré l'oculaire, on met au point : on voit le micromètre avec un certain grossissement G. Si l'on place au contraire le micromètre sous la lame, sans changer l'objectif, il faudra enfoncer l'oculaire pour retrouver l'image, que l'on verra avec un grossissement moindre γ. Enfin, en enlevant la lame pour laisser le micromètre à nu, on devra de nouveau enfoncer l'oculaire : l'image reparaîtra avec un grossissement encore plus petit g. Ces trois grossissements étant mesurés, on en déduira l'indice par la relation

$$n = \frac{g}{\gamma}\frac{G-g}{G-\gamma}.$$

Mais la méthode est peu sensible.

439. Résultats. — Les mesures d'indices ont conduit non seulement à des données d'une utilité pratique évidente, mais aussi à des résultats généraux que l'on a formulés en considérant

soit le *pouvoir réfringent* $\frac{n^2-1}{d}$ (Newton),

soit l'*énergie réfractive* $\frac{n-1}{d}$ (Gladstone) [3],

soit la *constante de réfraction* $\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$ (Lorentz et Lorenz) [4].

(1) On a aussi tenté de mesurer l'indice d'une lame par le déplacement qu'elle imprime au rayon. Cette méthode a été employée par Bernard, puis par Pichot (Voir Desains, *Leçons de physique*, II, 317).

(2) Bertin, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVI, 288 ; 1849.

(3) Gladstone et Dale, *Phil. Trans.* ; 1858-63. — Landolt, *Pogg. Ann.*, CXVII et CXXII ; 1862-64.

(4) Lorentz (d'Arnheim), *Wied. Ann.*, IX, 641 ; 1880. — Lorenz (de Copenhague), *Wied. Ann.*, XI, 70 ; et Prytz (de Leyde) ; *ibid.*, 104 ; 1880.

ui serait une constante pour chaque corps dans quelques condi-
ions qu'il se trouvât placé.

Gaz (¹). — Pour les gaz, ces trois quantités sont sensiblement pro-
ortionnelles (²); chacune peut être regardée comme une constante
aractéristique du gaz (³).

On a donc pour les variations de pression et de température
ui obéissent à la loi de Mariotte et à la loi de Charles (⁴)

$$n-1=(n_0-1)\frac{p}{76(1+\alpha t)}.$$

Le tableau ci-joint fait connaître l'indice de réfraction moyen,
alculé pour la température de 0° et la pression de 76^{cm}, d'après
I. Mascart (⁵).

Air	1,000 292 5	Acétylène	1,000 607
Azote	298	Acide sulfureux	704
Oxygène	271	Cyanogène	822
Hydrogène	139	Eau	257
Oxyde de carbone	335	Chlore	770
Acide carbonique	454	Brome	1 127
Protoxyde d'azote	516	Alcool	881
Bioxyde d'azote	297	Éther	1 507
Formène	442	Chloroforme	1 457
Éthylène	720	Sulfure de carbone	1 478

(¹) Outre les travaux dont nous avons parlé, les gaz ont été l'objet de recher-
hes par la méthode interférentielle de la part d'Arago et Fresnel, de Jamin,
le M. Mascart et d'autres savants, dont les résultats seront indiqués plus bas
ARAGO, *Œuvres*, X, 298 et 312. — JAMIN, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 282;
860. — MASCART, *Ann. de l'École normale*, (2), VI, 9; 1877).

(²) Quand n est voisin de 1, on a sensiblement $n-1=\frac{1}{2}(n^2-1)$, et
$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{1}{3}(n^2-1)=\frac{2}{3}(n-1)$.

(³) MM. Chappuis et Rivière ont opéré sur l'air à 21° de 0 atmosphère à 20 at-
mosphères, sur l'acide carbonique à 21° de 0 atmosphère à 19 atmosphères,
sur le cyanogène entre 0° et 35° de 1 atmosphère à 4 atmosphères, en mesu-
rant dans chaque cas l'indice et la densité; et ils ont trouvé que pour ces trois
gaz, dont les propriétés physiques aux températures ordinaires sont très dif-
férentes, la loi $\frac{n-1}{d}=C^{te}$ était exactement vérifiée (CHAPPUIS et RIVIÈRE, *Ann.
de chim. et de phys.*, (6), XIV, 5; 1888).

(⁴) M. Benoît a vérifié que, pour l'air, le coefficient de variation avec la tem-
pérature, entre 0° et 80°, est précisément égal au coefficient de dilatation 0,00367
(R. BENOIT, *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*,
VI; 1888; et *Journal de physique*, (2), VIII, 451).

(⁵) MASCART, *Annuaire du Bureau des longitudes* pour 1891, p. 590.

M. Ketteler (¹) et M. Lorenz (²) ont mesuré les indices de quelques gaz pour différentes lumières. Voici les moyennes de leurs résultats relatifs à l'air pour les principales raies de Fraunhofer :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1,000	291 10	291 71	292 03	292 89	293 50	294 98	296 80	298 28

L'hydrogène est moins dispersif: $n_E - n_C = 0,000\,001\,28$,
l'acide carbonique l'est davantage: 3 04,
l'acide sulfureux beaucoup plus: 8 66,
le cyanogène plus encore: 9 44.

La formule de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4},$$

réduite à ses deux premiers termes $A + \frac{B}{\lambda^2}$, suffit à exprimer les résultats.

La vapeur d'iode, dont nous avons signalé la dispersion anomale, a pour indices, à 700°, dans le rouge (C) $n_r = 1,0205$ et dans le violet (G) $n_v = 1,019$, ce qui dénote un pouvoir dispersif négatif, $\frac{n_v - 1}{n_r - 1} = 0,06$, très voisin du pouvoir dispersif positif du flint (³).

Liquides. — Loi de Gladstone. — Pour les liquides (⁴) la loi de Gladstone

$$\frac{n-1}{d} = C^{te}$$

semble s'appliquer exactement aux variations de pression et seulement d'une manière approximative aux variations de température :

(¹) Ketteler, *Farbenzerstreuung der Gase*. Bonn ; 1865 ; et *Pogg. Ann.*, CXXIV, 390 ; 1865.

(²) Lorenz, *Wied. Ann.*, XI, 70 ; 1880.

(³) Hurion, *Recherches sur la dispersion anomale* (thèse), 1877 ; et *Journal de physique*, VII, 181 ; 1878.

(⁴) Quand un corps passe de l'état gazeux à l'état liquide, l'énergie réfractiv se conserve sensiblement : M. Lorenz et M. Prytz ont étudié sous les deux éta quinze corps appartenant à la chimie organique, (plus l'eau et le sulfure carbone), et ils ont trouvé que, malgré la très grande variation de densité accompagne le changement d'état, l'énergie réfractive, ou mieux encore constante de réfraction reste la même (à 5 p. 100 près), résultat confirmé M. Bleekrode, qui a étendu ses recherches à la plupart des gaz liquéfiés (Bleekrode, *Journal de physique*, (2), IV, 109 ; 1885).

température s'élève, l'indice diminue en même temps que ;, mais toujours un peu plus rapidement que ne le ı loi (1).

ériences récentes de M. Quincke (2) sur différents liquides iculier sur l'eau ont montré que le coefficient de com- é, déduit des variations de l'indice avec la pression d'après Gladstone, concorde d'une façon presque absolue et es les couleurs avec le coefficient mesuré directement. ›uve pour le coefficient de compressibilité de l'eau, à 22°,9, ;3 au lieu de 0,00004575 (Grassi).

ıtion de la réfrangibilité de l'eau avec la température est ;e par le tableau suivant, qui se rapporte à la raie D (3). ımin l'a annoncé, le passage par 4° ne cause aucune on dans le phénomène.

n_D	$\frac{n_D - 1}{d}$	t	n_D	$\frac{n_D - 1}{d}$
1,33397	0,33401	15°	1,33333	0,33362
96	398	20	292	50
94	95	25	242	39
92	92	30	185	27
89	89	40	049	03
86	86	50	1,32896	0,33289
82	83	60	713	66
78	80	70	505	38
74	78	80	287	19
69	76	90	066	10
64	73	100	(1,31853)	(0,33227)

Journal de physique, (2), IV, 477 ; 1885.

E, *Wied. Ann.*, XIX, 401 ; 1883. Cf. ZEHNDER, *ibid.*, XXXIV, 91 ; 1888.

nbreux expérimentateurs ont étudié la réfrangibilité de l'eau à dif- ıpératures et pour diverses lumières : FRAUNHOFER, *Denkschriften d. Wiss. zu München*, V, 193 ; 1817. — JAMIN, *C. R.*, XLIII, 1191 ; 1856. E et DALE, *Phil. Trans.*, CXLVIII, 887 ; 1858. — LANDOLT, *Pogg. Ann.*, 1862. — MÜTTRICH, *Pogg. Ann.*, CXXI, 398 ; 1864. — FOUQUÉ, *Ann. de Paris*, IX ; 1867. — BAILLE, *C. R.*, LXIV, 1029 ; 1867. — RÜHLMANN, CXXXII, 1 et 177 ; 1867. — WÜLLNER, *Pogg. Ann.*, CXXXIII, 1 ; 1868. VILLIGEN, *Arch. du Musée Teyler*, II, 199 ; 1869. — SIEBEN, *Wied. Ann.*, 379. — LORENZ, *Wied. Ann.*, XI, 70 ; 1880. — PRYTZ, *Wied. Ann.*, XI, — DAMIEN, (thèse), *Ann. de l'Éc. Norm.*, (2), X, 233 ; 1881. — DUFET, a *Société minéral.*, VIII ; 1885. — PULFRICH, *Wied. Ann.*, XXXIV, 326 ; trouvera les résultats de leurs mesures dans les tables de LANDOLT et *Physikalisch-chemische Tabellen*. Berlin, Springer ; 1883), et dans le M. DUFET (*loc. cit.*). Nous avons pris pour les indices les valeurs don- Dufet de 0° à 50° (complétées de 50° à 100° par les déterminations nann) et pour les densités les nombres adoptés par M. Rossetti.

La dispersion de l'eau est nettement marquée par les nombres ci-après, relatifs à la température de 20° (Dufet) :

B	C	D	E	F	h
1,33 038	109	292	512	701	1,34 208

Ces nombres obéissent très bien à la formule de Briot,

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} - D\lambda^2,$$

plus générale que celle de Cauchy.

L'examen d'autres liquides conduit à des résultats analogues. Ainsi Landolt trouve avec la lumière rouge :

	t	d	n_C	$\frac{n_C - 1}{d}$ (¹)
Alcool éthylique.........	12°	0,8054	1,3638	0,4426
	28	0,7917	1,3574	0,4423
Alcool amylique..........	16	0,8151	1,4073	0,4996
	26	0,8075	1,4034	0,4995
Essence d'amandes amères.	16	1,0496	1,5412	0,5156
	26	1,0401	1,5361	0,5154

Mais les différences s'accentuent pour les lumières plus réfrangibles dans les liquides très dipersifs. Si par exemple nous rapprochons les mesures d'indices dues à Dale et Gladstone et les valeurs de la densité données par I. Pierre, nous avons :

	t	d	n_A	$\frac{n_A - 1}{d}$	n_D	$\frac{n_D - 1}{d}$	n_H	$\frac{n_H - 1}{d}$
Sulfure	10°	1,2785	1,6144	0,4806	1,6346	0,4964	1,7081	0,553[illegible]
de carbone.	30	1,2485	1,5995	0,4802	1,6182	0,4952	1,6896	0,552[illegible]

Dale et Gladstone furent donc amenés à considérer non plus l'indice n, mais la constante de la dispersion A, et à poser

$$\frac{A - 1}{d} = c^{te}.$$

Les nombres qu'ils apportaient à l'appui et ceux qu'obtint de son côté Landolt offrant encore quelques variations, et celles-ci pouvant provenir de ce qu'ils employaient des échantillons différents de ceux qui avaient servi à I. Pierre ou à Kopp pour mesurer les densités, Rühlmann et Wüllner entreprirent concurremment des recherches dans lesquelles ils déterminèrent, pour chaque liquide

(¹) La constance de $\frac{n^2_C - 1}{d}$ est moins satisfaisante.

même temps l'indice et la densité à diverses températures; ils arrivèrent l'un et l'autre à cette conclusion que la loi n'était 'approchée (1).

Elle n'est cependant pas sans importance.

L'énergie réfractive se conserve à très peu près dans les mélan-s et même dans les combinaisons (2), de sorte que l'énergie ré-ctive d'un composé (organique) peut se calculer au moyen de lle des éléments par une simple règle d'alliage (3).

Elle est donc la même dans les composés isomères, dans les

(1) Voici les résultats obtenus par M. Wüllner (les longueurs d'onde sont rimées en dix-millièmes de millimètres : $\lambda_D = 5,892$).

olution saturée de chlorure de zinc (eau 100, chlorure 254,735), entre 20° et 40°.

$$= 1,494538 - 0,0002857t + \frac{0,633266 - 0,0001007t}{\lambda^2}$$

$$1,96816 - 0,001153t \qquad \frac{A-1}{d} = 0,25126 + 0,0000028t$$

lycérine, à peu près privée d'eau, entre 15° et 35°.

$$= 1,454262 - 0,0002683t + \frac{0,404553 - 0,0000669t}{\lambda^2}$$

$$1,25073 - 0,000635t \qquad \frac{A-1}{d} = 0,36325 - 0,0000310t$$

lcool, entre 15° et 35°.

$$= 1,36086 - 0,000384t + \frac{0,325707 - 0,0002008t}{\lambda^2}$$

$$0,81281 - 0,00085t \qquad \frac{A-1}{d} = 0,44396 - 0,0000082t$$

ulfure de carbone, entre 7° et 24°.

$$= 1,601500 - 0,0007539t + \frac{1,170258 - 0,0005956t}{\lambda^2} + \frac{10,09856 - 0,0229000t}{\lambda^4}$$

$$1,29366 - 0,001506t \qquad \frac{A-1}{d} = 0,46496 - 0,0000424t$$

(2) BERTHELOT, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLVIII; 1856. — SCHRAUFF, *Pogg.* ., CXXVI, 344; 1865. — HAAGEN, *Pogg. Ann.*, CXXXI, 117; 1867. — GLADSTONE DALE, *Phil. Mag.*, (4), XXXIX, 232; 1870.

(3) La règle s'applique généralement bien aux mélanges de liquides organi-s (M. Wüllner a obtenu des vérifications précises avec des mélanges d'al-l et de glycérine), de même qu'aux dissolutions salines très étendues. Mais, s bien des cas, les choses se passent moins simplement. Ainsi, van der Willi-trouve pour les indices de divers hydrates d'acide sulfurique relativement à aie D, à 18°,3 (p étant le poids d'acide pour 100) :

p	n	p	n	p	n
0	1,33327	30,10	1,37009	85,98	1,43807
0,1	1,33382	56,25	1,40308	88,97	1,43669
4,46	1,33862	71,97	1,42466	94,72	1,43163
19,08	1,35630	81,41	1,43596		

L'indice croît jusqu'à l'hydrate $SO^3,2HO$ (84,1), et décroît ensuite.

mélanges ou combinaisons de même composition centésimale [1].

Si l'on multiplie l'énergie réfractive par l'équivalent, on a *l'équivalent de réfraction*, et l'on peut dire que l'équivalent de réfraction d'une molécule est égal à la somme des équivalents de réfraction des atomes qui la composent, énoncé plus général, mais non plus exact, d'une règle qui n'est qu'approximative.

Sans entrer dans la discussion des difficultés résultant de l'influence de l'atomicité, nous donnerons ici les équivalents de réfraction r des éléments principaux, selon M. Haagen [2] :

	p	$\frac{n-1}{d}$	r		p	$\frac{n-1}{d}$	r
H	1	1,300	1,3	O	16	0,1875	3
Cl	35,5	0,2758	9,8	S	32	0,5009	16
Br	80	0,1918	15,3	Az			4,1 (Gladstone).
I	127	0,1958	25	C	12	0,4167	5

[1]) Citons quelques exemples d'après M. Landolt :

1° Composés isomères :

		d	n_C	$\frac{n_C-1}{d}$
$C^3H^6O^2$	Acide propionique	0,9963	1,3846	0,3860
	Acétate de méthyle	0,9053	1,3592	0,3967
	Formiate d'éthyle	0,9078	1,3580	0,3944
$C^4H^8O^2$	Acide butyrique	0,9610	1,3955	0,4116
	Acétate d'éthyle	0,9021	1,3705	0,4110
$C^5H^{10}O^2$	Acide valérique	0,9313	1,4022	0,4319
	Butyrate de méthyle	0,8976	1,3869	0,4311
$C^6H^{12}O^2$	Acide caproïque	0,9252	1,4116	0,4449
	Valérate de méthyle	0,8809	1,3927	0,4458
	Butyrate d'éthyle	0,8906	1,3940	0,4424
	Formiate d'amyle	0,8816	1,3959	0,4491

2° Mélanges ou combinaisons de même composition centésimale :

$C^2H^4O^2$	Acide acétique	1,0514	1,3699	
$C^4H^8O^2$	Acide butyrique	0,9610	1,3955	
$C^3H^6O^2$	Mélange	0,9930	1,3851	0,3878
$C^3H^6O^2$	Acide propionique	0,9963	1,3856	0,3860
$C^3H^6O^2$	Acide propionique	0,9963	1,3846	
H^2O	Eau	1	1,3311	
$C^3H^8O^3$	Mélange	1,0220	1,3856	0,3775
C^2H^6O	Alcool éthylique	0,8011	1,3605	
CH^2O^2	Acide formique	1,2211	1,3693	
$C^3H^8O^3$	Mélange	0,9602	1,3610	0,3760
CH^4O	Alcool méthylique	0,7964	1,3279	
$C^2H^4O^2$	Acide acétique	1,0514	1,3699	
$C^3H^8O^3$	Mélange	0,9606	1,3594	0,3741
$C^3H^8O^3$	Glycérine	1,2615	1,4706	0,3731

A noter aussi les observations de M. Doumer (*C. R.*; 1890) sur les sels métalliques.

[2]) Quelques nombres montreront le degré d'exactitude de la règle.

	r observé.	r calculé.		r observé.	r calculé.
Alcool méthylique	13,17	13,20	Aldéhyde	18,58	18,[illegible]
— éthylique	20,70	20,80	Éther	36,26	36,0[illegible]
— propylique	28,30	28,40	Glycérine	34,32	34,4[illegible]
— butylique	36,11	36,00	Acide lactique	31,81	31,8[illegible]
— amylique	43,89	43,60	Eau	5,96	6,1[illegible]

ıbleau suivant renferme les indices de plusieurs liquides iverses lumières, d'après Baden Powell, Gladstone et Dale, r Willigen, Kundt[1].

	A	B	C	D	E	F	G	H	
one (15°)...	1,6114	1,6177	1,6209	1,6303	1,6434	1,6554	1,6779	1,7035	G.D.
....	1,4905	1,4939	1,4955	1,5002	1,5066	1,5124	1,5234	1,5329	K.
›nth. (20°,7).	1,4663	1,4682	1,4693	1,4721	1,4759	1,4793	1,4857	1,4913	W.
(10°).......	1,4438	1,4457	1,4466	1,4490	1,4526	1,4555	1,4614	1,4661	G.D.
....	1,3600	1,3612	1,3621	1,3638	1,3661	1,3683	1,3720	1,3751	G.D.
. ...	1,3529	1,3545	1,3554	1,3566	1,3590	1,3606	1,3646	1,3683	G.D.
›is (15°)....	1,3290	1,3302	1,3308	1,3326	1,3344	1,3362	1,3384	1,3421	K.
is (15°).....	»	1,5487	1,5508	1,5573	1,5659	1,5744	1,5912	1,6084	P.
assia (15°)..	»	1,5659	1,5690	1,5780	1,5905	1,6029	»	»	K.
elle (23°,5).	1,5967	1,6038	1,6077	1,6188	1,6348	1,6508	»	»	W.

rappelons les liquides très réfringents cités plus 437).

les. — Dans les corps solides, l'indice est beaucoup moins par la chaleur que la densité : l'énergie réfractive ne reste ıs constante aux différentes températures [2].

énéral, l'indice augmente quand la température s'élève ; dans ›n il ne change pas ; dans le spath-fluor, il diminue. Le

[1] ›EN POWELL, *Pogg. Ann.*, LXIX, 110 ; 1846. — GLADSTONE et DALE, *Phil.* CXLVIII, 887 ; 1858 ; et CLIII, 317 ; 1863 ; et *Phil. Mag.*, (4), XVII, 222 ; XXVI, 484 ; 1863. — VAN DER WILLIGEN, *Arch. du Musée Teyler*, I, 161, t III, 15 ; 1868-70. — KUNDT, *Wied. Ann.*, IV, 34 ; 1878.

[2] te quantité est néanmoins utile à considérer. Ainsi, en calculant l'in- 'iode solide d'après l'indice de sa vapeur au moyen de la loi de Glad- . Hurion trouve : dans le rouge 1,89, dans le bleu 1,83.

e part, en comparant les indices d'une dissolution d'iode au $\frac{1}{500}$ dans e de carbone aux indices du dissolvant, et en admettant que l'énergie e d'un mélange est la somme des énergies réfractives des corps qui le ›nt, il obtient pour les indices de l'iode solide : dans le rouge 2,07, bleu 1,98, nombres voisins des précédents.

›s M. Damien, il n'y a pas de différence sensible entre l'énergie réfrac- ›hosphore liquide et celle du phosphore solide, à la même température. ›riences lui donnent en effet :

t	$\frac{A-1}{d}$ solide.	$\frac{A-1}{d}$ liquide.
29°,2	0,561 707	0,561 718
34°,7	623	567
37°,5	601	541

fférences sont faibles et attribuables aux erreurs d'expérience.

tableau ci-dessous contient les nombres obtenus par M. Fizeau [1] pour quelques corps isotropes par la méthode si précise à laquelle nous avons déjà fait plusieurs fois allusion et dont l'exposé trouvera sa place plus loin. Dans ce tableau, d représente, comme d'habitude, la densité, k le coefficient de dilatation cubique, n_D l'indice relatif à la raie D, et α le coefficient de variation de l'indice avec la température :

$$(n_D)_t = (n_D)_0(1 + \alpha t).$$

	d	k	n_D	α
Verre de Saint-Gobain (19°,1-81°,3).	2,438	0,00002584	1,5033	0,00000108
Autre verre de Saint-Gobain (18°-55°).	2,514	2584	1,528	065
Crown Maës à oxyde de zinc (18°-60°,5).	2,626	255	1,5204	000
Flint ordinaire (13°,4-60°,75).......	3,584	243	1,6112	163
Flint lourd (20°-53°)...............	4,14	198	1,682	408
Spath-fluor (12°-55°)...............	3,2	621	1,435	—0,00000949

Nous laissons de côté, pour le moment, les résultats qui concernent les corps biréfringents.

M. Dufet [2] a montré que dans les mélanges de sels isomorphes, l'indice du mélange pouvait se calculer comme pour un mélange de liquides. D'autre part, des mesures faites par M. Soret [3] sur les aluns à l'aide de son réfractomètre, il ressort que d'une base alcaline à une autre la variation d'indice est très sensiblement constante, sauf pour les aluns de cœsium [4]. L'énergie réfractive spécifique des éléments se conserve donc dans une certaine limite. Newton l'avait bien senti quand, après avoir remarqué que les corps les plus réfringents étaient en général facilement inflammables, il en avait hardiment conclu que le diamant devait être combustible.

Au tableau qui suit figurent les indices des verres le plus fréquemment employés et de certains corps isotropes [5].

[1] Fizeau, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXVI, 429; 1862.

[2] Dufet, *Journal de physique*, VII, 325 ; 1878.

[3] Soret, *Archives de Genève*, XII, XIII, XIV, XX ; 1884-88.

[4] On trouve des faits du même ordre dans les corps biréfringents (Dufet, *Journal de physique*, (2), VI, 301 ; 1887).

[5] M. Dufet a réuni dans le 1er fascicule du volume des *Constantes*, publié par la Société française de physique, les renseignements les plus exacts sur les indices de réfraction pour tous les corps où ils ont été mesurés.

	A	B	C	D	E	F	G	H
..		1,524312	1,525279	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684
..		1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
								FRAUNHOFER (1814-15)
n.		1,44600	1,44711	1,44979	1,45290	1,45657	1,46238	1,52073(?)
..		1,61440	1,61605	1,62090	1,62730	1,63314	1.64432	1,65421
..		1,7049	1,7070	1,7144	1,7234	1,7320	1,7486	1,7637
								DUTIROU (1850)
..	1,52814	1,53011	1,53113	1,53386	1,53735	1,54037	1,54607	1,55093
..	1,57829	1,58114	1,58261	1,58671	1,59197	1,59673	1,60589	1,61360
..	1,60927	1,61268	1,61443	1,61929	1,62569	1,63148	1,64269	1,65268
								MASCART (1860)
..		1,5126	1,5134	1,5160		1,5222	1,5278	1,5323
n.		1,5244	1,5254	1,5280		1,5343	1,5397	1,5443
..		1,5554	1,5568	1,5604		1,5690	1,5769	1,5836
..		1,6131	1,6149	1,6198		1,6321	1,6435	1,6534
)..		1,6771	1,6795	1,6858		1,7019	1,7171	1,7306
..		1,7801	1,7831	1,7920		1,8149	1,8368	1,8567
								BAILLE (1867)
.).	1,60301	1,60646	1,60822	1,61292	1,61919	1,62478	1,63549	
[1]).	1,72229	1,72735	1,72997	1,73717	1,74708	1,75597	1,77352	
								PULFRICH (1887)
..		2,46062		2,46986	2,47902			
								SCHRAUFF (1860
..				2,369				
								H. BECQUEREL (1877)
..				1,7155				
								DESCLOIZEAUX (1868)
..	1,53663	1,53918	1,54050	1,54418	1,54901	1,55324	1,56129	1,56833
..	1,48377	1,48597	1,48713	1,49031	1,49455	1,49830	1,50542	1,51061
..		1,43200		1,43390		1,43709	1,43982	1,44204
								STEFAN (1871)
..	2,653	2,730	2,786	2,980				
								SIRCKS (1871)
..			2,09300			2,15831		
								DAMIEN (1881)
..			1,528					
								WOLLASTON (1802)
..		1,585		1,593		1,613		1,653
								BADEN POWELL (1846
..		1,545						
								JAMIN (1850)
..		1,73	1,81	1,90			1,31	1,54
								WERNICKE (1875)

; verres fabriqués à Iéna par MM Abbe et Schott forment une série bien ans laquelle nous citerons :

›s.	d	n_D	$n_F - n_C$	uméros.	d	n_D	$n_F - n_C$
	3,58	1,6129	0,01660	O,113	4,64	1,7372	2600
	3,87	1,6489	1919	O,165	4,78	1,7541	2743
	4,10	1,6734	2104	O,198	4,99	1,7782	2941
	4,49	1,7174	2434	S, 57	6,33	1,9626	4882

r la Note sur l'application de la formule de Briot à la dispersion dans mme, par M. CARVALLO, *Journal de physique*, (2), VIII, 179; 1889.

On remarquera l'indice élevé de la blende (presque égal à celui du diamant), le pouvoir dispersif presque nul du spath-fluor, et la dispersion anomale de la fuchsine.

A l'aide de prismes assez minces pour être transparents, M. Kundt a pu mesurer directement les indices de plusieurs métaux et il a obtenu des résultats concordants avec les nombres déduits des expériences de Jamin, Haugton et Quincke sur la réflexion métallique. Il a trouvé :

	Lumière rouge.	Lumière blanche.	Lumière bleue.
Argent		0,27	
Or	0,38	0,58	1,00
Cuivre	0,45	0,65	0,95
Platine	1,76	1,64	1,44
Fer	1,81	1,73	1,52
Nickel	2,17	2,01	1,85
Bismuth	2,61	2,26	2,13

Les métaux se rangent quant à leur facilité à transmettre la lumière sensiblement dans le même ordre que pour leur aptitude à conduire la chaleur ou l'électricité.

III. — Achromatisme.

440. Aberration de réfrangibilité. — *Décomposition de la lumière par une lentille.* — Une lentille offre d'un point autant d'images séparées qu'il y a d'éléments distincts dans la lumière blanche. Par suite de cette *aberration de réfrangibilité*, en quelque endroit que l'on coupe le faisceau émergent on n'a jamais qu'une image colorée.

Histoire de l'achromatisme. — Newton croyait ces colorations inévitables : d'après lui, la dispersion étant proportionnelle à la réfraction, on ne pouvait supprimer l'une qu'en annulant l'autre. Euler (¹) fit observer que cependant l'œil donne des images incolores et, comme cet organe est composé de plusieurs milieux réfringents, il en conclut que l'on devait pouvoir faire des lentilles achromatiques au moyen de deux ou plusieurs verres unis par quelque liquide. Peu après, un professeur d'Upsal, Klingens-

(¹) Euler, *Sur la Perfection des verres objectifs des lunettes*, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*; 1747. Déjà, Gregory avait avancé que « peut-être il serait utile de réaliser l'objectif d'une lunette par une combinaison de différents milieux, comme en a usé pour l'œil la nature qui ne fait rien en vain » (Gregory, *Catoptricæ et dioptricæ sphæricæ elementa*; 1695). Voir plus loin, p. 593.

jerna [1] montra qu'en effet les expériences de Newton étaient nexactes. Il communiqua son travail à l'opticien anglais Dollond qui, avec un prisme de verre et un prisme d'eau à angle variable, éussit à faire disparaître la coloration tout en conservant une ceraine déviation. De là Dollond passa à la combinaison du crown vec le flint, et bientôt (1557) il réussit à construire des lunettes chromatiques [2].

Lentilles achromatiques. — Une combinaison convenable de deux entilles permet effectivement de superposer les foyers relatifs à leux couleurs données.

Soit un système de deux lentilles infiniment minces juxtaposées. Examinons d'abord l'action de ce système sur une lumière simple léterminée (le rouge par exemple).

La puissance du système est égale à la somme des puissances respectives des deux lentilles

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}, \qquad (1)$$

ou

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+(n'-1)\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right), \qquad (2)$$

n et n' étant les indices des verres constituant les deux lentilles pour la lumière proposée, R_1, R_2, R_3, R_4, les rayons de courbure des quatre surfaces dirimantes.

Pour une autre lumière simple (le violet, par exemple), les indices étant $n+\Delta n$ et $n'+\Delta n'$, la distance focale du système devient $F+\Delta F$; et ΔF sera nul si

$$\Delta n\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\Delta n'\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)=0. \qquad (3)$$

Δn et $\Delta n'$ étant de même signe, les deux parenthèses doivent être de signes contraires : si l'une des lentilles est convergente, l'autre doit être divergente. Quant au système total, il sera convergent si la lentille convergente est formée du verre le moins dispersif,

[1] KLINGENSTJERNA, *Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*; 1754.

[2] La priorité lui fut contestée par un gentilhomme de More Hall (Essex), nommé Chester; mais le parlement donna gain de cause à Dollond.

$\frac{\Delta n}{n-1}$ étant le *pouvoir dispersif* ([1]). En effet $\frac{1}{F}$ est proportionnel à $\frac{n-1}{\Delta n} - \frac{n'-1}{\Delta n'}$: c'est donc la lentille dont le pouvoir dispersif est le plus faible qui décide du signe de F.



Fig. 378

L'équation (3) pouvant s'écrire

$$\frac{\Delta n}{n-1}\frac{1}{f} + \frac{\Delta n'}{n'-1}\frac{1}{f'} = 0,$$

on voit que dans un système achromatique de deux lentilles, les pouvoirs dispersifs respectifs des deux lentilles sont proportionnels à leurs distances focales principales.

A l'équation (2) qui définit la distance focale que l'on veut assurer au système, à l'équation (3) qui règle l'achromatisme ([2]), il faut encore joindre deux conditions pour déterminer les quatre rayons. Généralement, on prend $R_3 = -R_2$, de manière que les faces en regard des deux lentilles s'adaptent exactement l'une sur l'autre.

Reste à fixer une dernière condition : on s'imposera que l'aberration de sphéricité soit minimum ([3]).

([1]) On appelle souvent *pouvoir dispersif total*, ou simplement *pouvoir dispersif*, le rapport $\frac{n_H - n_B}{n_D - 1}$ de la différence des indices extrêmes (au point de vue pratique) à l'excès de l'indice moyen sur l'unité. Pour la plupart des verres, l'effet de la température sur le pouvoir dispersif est beaucoup plus marqué que sur la réfraction (HASTINGS, *American Journal of Sciences;* 1878).

([2]) Ces équations établies dans l'hypothèse de lentilles infiniment minces conviennent presque exactement aux objectifs astronomiques.

([3]) L'indice du flint étant peu différent de celui du crown, la condition est sensiblement la même que pour une lentille unique. Le rayon de courbure de la face d'entrée doit donc être à très peu près le 1/6 de celui de la face de sortie.

La condition d'achromatisme (3) suppose la connaissance du rapport $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$. Si les différents indices des verres sont fournis par le fabricant ou ont été mesurés directement, Δn et $\Delta n'$ se trouvent en effet connus.

Sinon, on taillera dans les deux verres deux prismes d'angles quelconques, mais petits, a et a', on achromatisera successivement chacun de ces prismes à l'aide d'un prisme d'indice $\mathfrak{N}$, en amenant l'angle variable de ce prisme d'abord à la valeur α puis à la valeur α', ce qui donnera deux équations d'où l'on tirera le rapport cherché.

Prismes achromatiques. — En effet, un prisme de petit angle A, traversé à peu près normalement par un faisceau de rayons homogènes (rouges), imprime à ce faisceau une déviation

$$D=(n-1)A\text{ (1)}.$$

Un second prisme, placé en sens contraire, produit une déviation inverse

$$D'=(n'-1)A'.$$

La déviation totale due au système des deux prismes est donc

$$D-D'=(n-1)A-(n'-1)A'.$$

Elle aura la même valeur pour un second faisceau de rayons (violets), si l'on a

$$A\Delta n-A'\Delta n'=0, \tag{4}$$

ou

$$\frac{A}{A'}=\frac{\Delta n'}{\Delta n}. \tag{5}$$

Telle est la condition d'achromatisme d'un couple de prismes.

Appliquons-la aux deux phases de l'expérience décrite plus haut :

1° Le prisme a est achromatisé par un prisme α

$$a\Delta n-\alpha\Delta\mathfrak{N}=0;$$

(1) On a en effet, vu la petitesse des angles,

$$i=nr,$$
$$i'=nr',$$
$$r+r'=A,$$
$$D=(i+i')-(r+r').$$

2° Le prisme a' est achromatisé par un prisme α'

$$a'\Delta n' - \alpha'\Delta\mathfrak{N} = 0.$$

De ces deux équations on déduit

$$\frac{\Delta n}{\Delta n'} = \frac{a'}{a}\frac{\alpha}{\alpha'}\ (^1).$$

Diasporamètres : Boscowitch, Rochon, Brewster. — **Le diasporamètre** (διασπορά, dispersion ; μέτρον, mesure) **est un prisme à angle variable, disposé pour la mesure en question.**

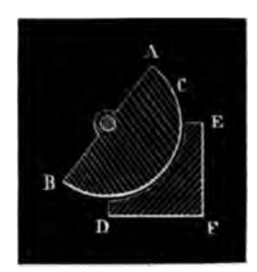


Fig. 379

Le plus simple théoriquement est le *diasporamètre de Boscowitch* : une gouttière cylindrique DE creusée dans un bloc de verre reçoit un demi-cylindre ABC, du même verre, qui peut être mis à l'inclinaison voulue. Mais la taille des pièces est délicate, et le frottement dépolit assez vite les surfaces en contact.

Le *diasporamètre de Rochon* se compose de deux prismes rectangles, égaux, ACB, ACD, pris dans le même verre, et accolés par une de leurs faces AC : l'un des prismes ACB est fixe, l'autre est mobile autour de l'axe de l'appareil Om, de manière que l'angle compris entre les faces externes varie de zéro au double de l'angle γ de chacun des prismes. Un calcul facile permet de déterminer l'angle x du prisme total correspondant à une rota-

(1) Si $a = A$, $A' = \frac{\alpha}{\alpha'} a'$: tel serait l'angle du prisme d'indice n' achromatisant le prisme d'angle A et d'indice n. La déviation, proportionnelle à $\frac{n-1}{\Delta n} - \frac{n'-1}{\Delta n'}$, se produit vers la base du prisme formé du verre le moins dispersif.

tion ω du prisme mobile à partir de l'azimuth zéro, pour lequel il y a parallélisme. Soient en effet Om l'axe de rotation, On la normale par O à la face AB, Op la normale par le même point O à la position actuelle de la face CD. Le plan Omn est section principale du prisme ACB, le plan Omp section principale du prisme

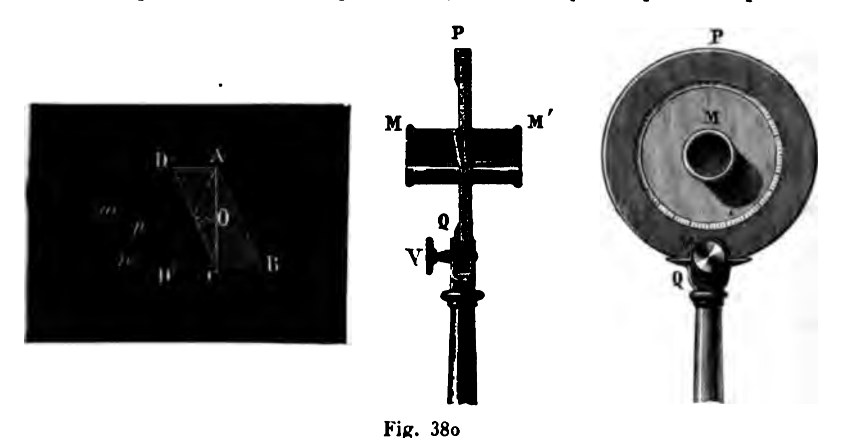


Fig. 380

ACD, le plan Onp section principale du prisme total. Si donc nous décrivons de O comme centre une sphère avec un rayon égal à l'unité; dans le triangle sphérique mnp nous avons $m = \omega$, $mn = \gamma$, $mp = \gamma$, $pn = x$, et par suite

$$\cos x = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma \cos\omega,$$

ou, en remplaçant $\cos x$ et $\cos\omega$ par $1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ et $1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2}$,

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\gamma \sin\frac{\omega}{2},$$

formule calculable par logarithmes.

Pour se servir de l'instrument, on le dispose à la suite du prisme à essayer éclairé par la lumière du jour, et l'on reçoit dans l'œil cette lumière à travers le système. On fait tourner le prisme mobile du diasporamètre jusqu'à ce que toute coloration ait disparu. On a alors achromatisé le prisme en expérience, non pas pour deux lumières choisies à l'avance, mais, ce qui est plus pratique, pour les deux lumières (le jaune et le bleu) qui donnent le mieux satisfaction à l'œil.

replié deux fois sur lui-même et par conséquent encore plus resserré et plus décoloré. Si par exemple la déviation était maximum pour le jaune et minimum pour le bleu, le spectre se réduirait à un



Fig. 382

trait blanc, à peine teinté de rouge sur l'un des bords et de violet sur l'autre. On construit en effet des lentilles à trois verres (¹), formées d'une lentille divergente en flint comprise entre deux lentilles convergentes en crown.

IV. — Couleurs.

441. Composition des couleurs. — *Principes.* — La couleur est un caractère physiologique de la lumière. Bien que physiquement définie par le nombre des vibrations, elle n'en reste pas moins, comme la tonalité, une sensation (²); et par suite elle comporte dans son appréciation quelque incertitude selon les individu et les circonstances.

Les lumières colorées, ou, suivant le langage reçu, les couleur du spectre sont tenues pour simples (³). Mais l'œil ne sait poin,

(¹) Si l'on suppose les lentilles infiniment minces, le calcul des courbures s'effectuera comme pour deux verres.

(²) C'est au P. Malebranche qu'est due la véritable théorie des couleurs. Avant Euler à qui on en attribue ordinairement la gloire, il a affirmé d'une façon expresse la périodicité des vibrations lumineuses, ainsi que l'analogie entre les différences de coloration et les différences de tonalité (Malebranche, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1699, p. 22). Voir à ce sujet un article de M. Lechalas dans la *Revue philosophique*, année 1884, p. 293.

(³) D'après Aristote, toute couleur était un mélange de blanc et de noir. Ce fut aussi l'opinion de Gœthe : sa fameuse théorie des couleurs repose sur la coloration produite par les milieux troubles qui rendent rouge la lumière transmise et bleue la lumière réfléchie; il admet donc que la coloration est un genre par-

ainsi que l'oreille, distinguer un mélange et en séparer les éléments. Une couleur composée agit sur lui de la même manière qu'une couleur simple.

Dans un mélange, deux couleurs équivalentes jouent un rôle identique. D'ailleurs, le nombre des couleurs résultant des mélanges est limité : on les obtient toutes par des associations de deux couleurs simples. La plupart même des couleurs résultantes peuvent être réalisées par des combinaisons différentes de couleurs simples prises deux à deux.

Cercle de Newton. — Newton le premier a indiqué le moyen de calculer la teinte d'un mélange quelconque de couleurs.

A la suite d'expériences répétées, il a formulé cette règle :

Partagez la circonférence en sept arcs proportionnels aux intervalles des huit notes de la gamme (¹), $\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}, \frac{1}{9}$, ou aux

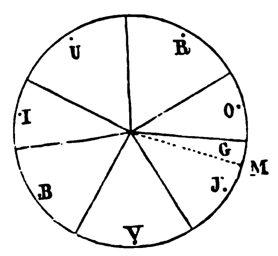


Fig. 383

nombres entiers 80, 45, 72, 80, 72, 45, 80, dont la somme est 474; répartissez toutes les couleurs simples du spectre sur la circonférence de façon que le premier arc contienne les diverses nuances du rouge, le deuxième celles de l'orangé, le troisième celles du jaune... ; marquez les centres de gravité R, O, J... de ces arcs. Si vous voulez connaître le résultat du mélange de r parties de rouge, o d'orangé, j de jaune..., appliquez aux points R, O, J... des poids r, o, j... et prenez la résultante de ces forces parallèles : elle aura son point d'application (centre de gravité du système) en G. Ce point définira la couleur résultante qui sera celle du point M de la

ticulier d'obscurcissement, les milieux les plus transparents étant pour lui faiblement troubles.

(¹) Il s'agit toujours des intervalles de la gamme phrygienne.

circonférence en face duquel il tombe, lavée d'une quantité de blanc d'autant plus considérable qu'il sera plus voisin du centre C (qui figure le blanc pur) : si ρ est le rayon de la circonférence, d la distance CG, la proportion de blanc sera $\frac{\rho-d}{\rho}$. La grandeur de la résultante représente l'intensité de la couleur.

Cette règle, ajoute Newton, sans être d'une rigueur absolue, est assez exacte pour la pratique. En effet, Biot et Fresnel s'en sont servis utilement pour le calcul des teintes qui se manifestent dans différents phénomènes d'interférence. Elle laisse échapper toutefois les diverses nuances de *pourpre* qui proviennent du mélange des rayons situés aux deux extrémités du spectre et qui forment un passage continu entre le violet et le rouge ([1]). Si l'on intercale ce pourpre entre le violet et le rouge, la règle de Newton suffit pour définir physiologiquement toute couleur dans ses trois éléments fondamentaux : l'intensité, le ton et le degré de saturation.

Couleurs fondamentales. — Au lieu de définir ces trois éléments, comme le fait Newton, par un mélange déterminé de blanc (équivalent à deux couleurs) et d'une certaine couleur saturée, couleur du spectre ou pourpre, on peut prendre trois autres variables.

C'est une idée très ancienne que toutes les couleurs peuvent être reproduites par le mélange en proportions convenables de trois couleurs fondamentales. Née chez les peintres qui la déduisirent des effets obtenus par les mélanges de couleurs matérielles sur leur palette, cette doctrine a été confirmée par toutes les expériences sur les couleurs spectrales ([2]). Young lui donna un corps en admettant

([1]) Le *carmin* est une nuance du pourpre voisine du rouge. Le *rose* est du pourpre blanchâtre.

([2]) Il y a toutefois une différence essentielle entre les deux sortes de mélanges, ainsi que l'a expliqué M. von Helmholtz (*Optique physiologique*, trad. Javal et Klein, p. 361). Le mélange des poudres colorées produit sur la lumière un effet analogue à celui des verres colorés : un verre bleu qui arrête le rouge et le jaune et un verre jaune qui arrête le bleu donnent *par soustraction* du vert. De même, une poudre colorée, cristallisée et transparente, renvoie vers l'œil une lumière privée de certaines teintes; et le mélange de deux poudres agit par double soustraction et non par addition. Aussi les mélanges de poudres colorées sont-ils bien plus foncés que les poudres simples ; et l'on comprend comment aux trois couleurs fondamentales des peintres (bleu, jaune, orangé) Léonard de Vinci joignait déjà le vert, sans doute parce qu'il avait remarqué que le vert simple est bien plus vif que le vert composé.

u'il existe dans l'œil trois sortes de fibres nerveuses dont l'excitaon fait naître respectivement la sensation du rouge, du vert ou du leu (Young disait du violet (¹), d'accord en cela avec la prédilection es maîtres italiens), chaque espèce de fibre étant excitée spécialeient (²) par la lumière correspondante (³). Sans doute le choix des ois couleurs fondamentales a quelque chose d'arbitraire. Les avaux ultérieurs d'Helmholtz (⁴) et de Maxwell (⁵) paraissent indiuer que les couleurs choisies par Young sont, à un petit chanement près, celles qui conviennent le mieux.

Maxwell prend pour couleurs fondamentales dans le spectre : un *uge* situé entre C et D et deux fois plus éloigné de D que de C; un *ert* voisin de E; et un *bleu* entre F et G, deux fois plus loin e G que de F. Trois fentes, qui peuvent varier de largeur, et dont s milieux coïncident avec les trois couleurs fondamentales, laisent passer de ces couleurs des quantités variables que l'on comine par addition (⁶).

Étude des couleurs spectrales. — Maxwell a mesuré pour chaune des couleurs simples du spectre la proportion des trois coueurs fondamentales produisant une coloration équivalente (⁷).

(¹) A ce sujet voir UNGER, *Pogg. Ann.*, LXXXVII, 121; 1852; et *C. R.*, XL, 39; 1855 (Chevreul); et HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 356.

(²) Nous ne disons pas exclusivement : une couleur saturée paraît blanchâtre uand elle est très intense. Comme le remarque M. von HELMHOLTZ (*loc. cit.*, . 383), le point capital de l'hypothèse d'Young est de regarder les sensations olorées comme résultant de trois actions distinctes qui se produiraient dans i substance nerveuse, plutôt que d'admettre trois sortes de fibres essentielement différentes ; toutefois l'énoncé primitif, plus clair et mieux concevable, iérite d'être conservé.

(³) La paralysie des nerfs sensibles au rouge produit l'*anérythropsie* (ἀ privatif, υθρός rouge, ὄψις vue), ou *daltonisme* (Dalton en était atteint). L'œil affecté de ce éfaut confond le rouge avec le vert. En effet, deux couleurs fondamentales, vert et le bleu, subsistant seules, le rouge qui n'excite que faiblement les bres du vert paraîtra un vert peu intense; le jaune semblera un vert intense t saturé; le vert, présentant déjà un mélange de l'autre couleur fondamentale, ra un degré plus intense, mais plus blanchâtre, de la même couleur que le ouge et le jaune (von HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 393).

(⁴) HELMHOLTZ, *Athen*, 1197; 1853; et *Pogg. Ann.*, XCIV; 1855.

(⁵) MAXWELL, *Phil. Trans.*, CL, 57; 1860.

(⁶) Voir dans HELMHOLTZ (*loc. cit.*, p. 402), les précautions à prendre pour effecer correctement les mélanges de couleurs simples, et dans PELLAT (*Journal de hysique*, VIII, 20; 1879), la description d'un appareil convenant à ce genre e recherches.

(⁷) La même méthode s'appliquerait à l'évaluation numérique d'une couleur uelconque.

Soient R, V, B les quantités de lumière relatives aux trois couleurs fondamentales pour la largeur 1 des fentes. Il cherche d'abord les largeurs r, v, b, pour lesquelles le mélange des trois couleurs provoque sur l'œil le même effet que la lumière blanche non décomposée W : il a alors

$$r\mathrm{R}+v\mathrm{V}+b\mathrm{B}=\mathrm{W}.$$

Puis, en modifiant la largeur des fentes, il détermine les quantités de deux de ces couleurs qu'il faut mêler à une certaine quantité x de la couleur donnée X pour reproduire le même blanc

$$r'\mathrm{R}+v'\mathrm{V}+x\mathrm{X}=\mathrm{W},$$

d'où, W s'éliminant,

$$\mathrm{X}=\frac{r-r'}{x}\mathrm{R}+\frac{v-v'}{x}\mathrm{V}+\frac{b}{x}\mathrm{B}=\rho\mathrm{R}+\varphi\mathrm{V}+\beta\mathrm{B}.$$

C'est ainsi qu'il a obtenu le tableau suivant, complété par lord Rayleigh [1]. La première colonne contient les numéros d'une échelle arbitraire à laquelle était rapporté le spectre dans les expériences et qui sont marqués sur la figure 384, la deuxième les longueurs d'onde λ des lumières étudiées.

Numéros.	λ	Couleurs.	ρ	φ	β
16	0μ,698	Rouge.	+0,140		
20	663	»	420	+0,009	+0,063
24 R	630	Écarlate.	1,000		
28	606	Orangé.	1,155	360	−0,006
32	583	Jaune.	0,846	877	005
36	562	Jaune vert.	484	1,246	032
40	544	Vert.	127	1,206	008
44 V	528	»		1,000	
48	513	Vert bleuâtre.	−0,063	0,759	+0,085
52	500	Bleu vert.	055	506	282
56	488	Bleu verdâtre.	050	340	495
60	477	Bleu.	047	190	753
64	467	»	033	033	905
68 B	457	»			1,000
72	449	Indigo.	+0,019	006	0,944
76	441	»	025	016	693
80	434	»	005	−0,028	479
84	428	Violet.			333
88	422	»			208
92	416	»			146
96	411	»			083
100	406	»			042
		Sommes algébriques :	+3,973	+6,520	+6,460

[1] Lord RAYLEIGH, *Edinb. Phil. Trans.*, XXXIII, part I, 157; et *Phil. Trans.*, CLXXVII, 157 ; 1886.

Un coefficient négatif, $-\rho_1$ par exemple, annonce que la couleur proposée X (figurée ci-contre par M′), en se combinant avec la couleur fondamentale correspondante, R, donne une teinte équivalente à celle que produit une combinaison des deux autres couleurs fondamentales

$$X+\rho_1 R=\varphi V+\beta B.$$

Cela revient à dire que, rabattue de blanc, la couleur proposée équivaut à une combinaison des deux couleurs V et B.

Si en effet on ajoute aux deux membres de l'équation précédente une quantité w de blanc W, on a

$$X+wW=(wr-\rho_1)R+(wv+\varphi)V+(wb+\beta)B$$

et, si l'on prend $w=\frac{\rho_1}{r}$, il vient

$$X+\frac{\rho_1}{r}W=\left(\frac{\rho_1}{r}v+\varphi\right)V+\left(\frac{\rho_1}{r}b+\beta\right)B.$$

Triangle de Maxwell. — Si l'on veut représenter graphiquement ces résultats, aux trois sommets d'un triangle équilatéral, figurant respectivement le rouge, le vert et le bleu, on placera des

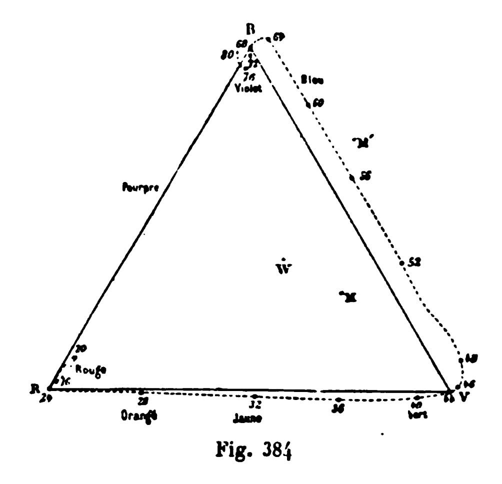


Fig. 384

poids ρ, φ, β, et on cherchera le centre de gravité du système résultant, d'après la règle de Newton. Le blanc sera ainsi marqué par le centre de gravité W de trois poids égaux à 3,973, 6,520, 6,460.

La ligne ponctuée, qui trace la variation des nuances dans le spectre, suit de très près le contour du triangle : toutefois les bleus spectraux sont sensiblement plus saturés que les couleurs correspondantes du triangle. En effet ces bleus, pour lesquels ρ est négatif, tombent en dehors du triangle; par conséquent, si l'on mène le rayon vecteur joignant le blanc W à l'un d'eux, ce rayon coupera le côté VB en un point qui peut être regardé comme désignant un mélange de blanc et du bleu considéré. On voit ainsi nettement la signification des coefficients négatifs, déjà indiquée plus haut.

CHAPITRE V

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

I. — Œil.

442. Œil. — *Description physique.* — L'étude de l'œil précède naturellement celle des instruments d'optique, qui n'ont pour objet que de corriger les imperfections et d'augmenter la puissance de cet organe.

Au point de vue physique, l'œil constitue une chambre noire dont la paroi, formée par la sclérotique, tapissée de la choroïde, reçoit l'épanouissement du nerf optique (rétine). La sclérotique devient transparente en avant où elle prend le nom de cornée; de même la choroïde se modifie à la partie antérieure pour enchâsser le cristallin, véritable lentille située à l'entrée de cette chambre noire et recouverte par un diaphragme (iris) percé d'un trou (pupille) qui peut se rétrécir ou s'agrandir sous l'action de muscles spéciaux. Entre la cornée et le cristallin est un liquide incolore, se distinguant à peine de l'eau (humeur aqueuse); entre le cristallin et la rétine, l'œil est rempli par une masse gélatineuse peu consistante (corps vitré). La lumière du dehors a donc à traverser toute une série de milieux d'indices variés et de courbures différentes [1] avant d'arriver à la rétine. La connaissance de ces quantités suffit pour calculer l'effet produit. Le calcul a été effectué par Listing d'après un ensemble de mesures dont les

[1] Les deux surfaces de la cornée sont sensiblement des sphères, la face antérieure du cristallin un ellipsoïde de révolution, la face postérieure un paraboloïde. Mais, dans leur partie utile, toutes ces surfaces peuvent être confondues avec des sphères.

résultats peuvent, sans inconvénients, s'écrire en nombres ronds : ils se rapporteront à une sorte d'œil moyen, abstraction faite des petites variations individuelles.

Conception théorique : Listing (1), *Volkmann* (2). — La cornée n'ayant qu'une épaisseur de $0^{mm},4$, présentant sur ses deux faces sensiblement le même rayon de courbure (égal, d'après Listing, à 8^{mm}) et possédant un indice de réfraction (1,340) très peu supérieur à celui de l'humeur aqueuse (1,337), il est permis, ainsi que l'a proposé M. von Helmholtz, de ne considérer qu'une seule réfraction s'effectuant entre l'air et l'humeur aqueuse à la surface antérieure de la cornée, dont les distances focales principales (427) seront, en conséquence, 24^{mm} et 32^{mm}.

D'autre part, les indices de réfraction de l'humeur aqueuse (1,337) et de l'humeur vitrée (1,338) étant presque identiques, le cristallin se comporte comme une lentille placée dans l'humeur aqueuse, sa face antérieure à 4^{mm} de la face antérieure de la cornée, et qui aurait, suivant Listing, 4^{mm} d'épaisseur, des rayons de courbure de 10^{mm} et de 6^{mm}, et un indice de réfraction total égal à $\frac{16}{11} = 1,4545$. La distance focale principale de cette lentille est 44^{mm}; les plans principaux sont tous les deux à l'intérieur de la lentille, à $2^{mm},35$ et $1^{mm},40$ des faces correspondantes; enfin l'interstice a pour valeur $0^{mm},25$ (3).

Si nous appliquons à cet appareil les formules relatives à la combinaison de deux systèmes optiques, en y faisant $f_1 = 24^{mm}$, $f'_1 = 32^{mm}$, $f_2 = f'_2 = 44^{mm}$, $e = 6^{mm},35$, nous obtenons pour les deux distances focales principales du système unique équivalent, compris entre les mêmes milieux extrêmes (air et humeur vitrée), $f = 15^{mm}$ et $f' = 20^{mm}$. La distance du premier plan principal à la face antérieure de la cornée est $h = 2^{mm},15$; la distance du deuxième plan principal à la même face, $6^{mm},60 - h' = 2^{mm},55$: ces deux plans sont donc contenus dans la chambre antérieure de l'œil et leur écart est à peine $0^{mm},4$. Les points nodaux sont à l'intérieur du

(1) LISTING, *Dioptrik des Auges*, in *Wagner's Handwörterbuch d. Physiologie*; 1851.

(2) VOLKMANN, *Sehen*, in *eod. loc.*; 1846.

(3) Dans l'œil vivant, le cristallin est un peu plus convergent qu'après la mort (429).

cristallin, près de sa face postérieure (le premier à $0^{mm},75$, le second à $0^{mm},35$ en avant de cette surface), et séparés l'un de l'autre par la même distance très petite $0^{mm},4$. Enfin, fait capital, le second foyer tombe exactement sur la rétine, qui se trouve à 15^{mm} derrière le cristallin (23^{mm} au delà de la face antérieure de la cornée), la très faible différence que nous rencontrons (moins d'un demi-millimètre) étant inférieure aux incertitudes des

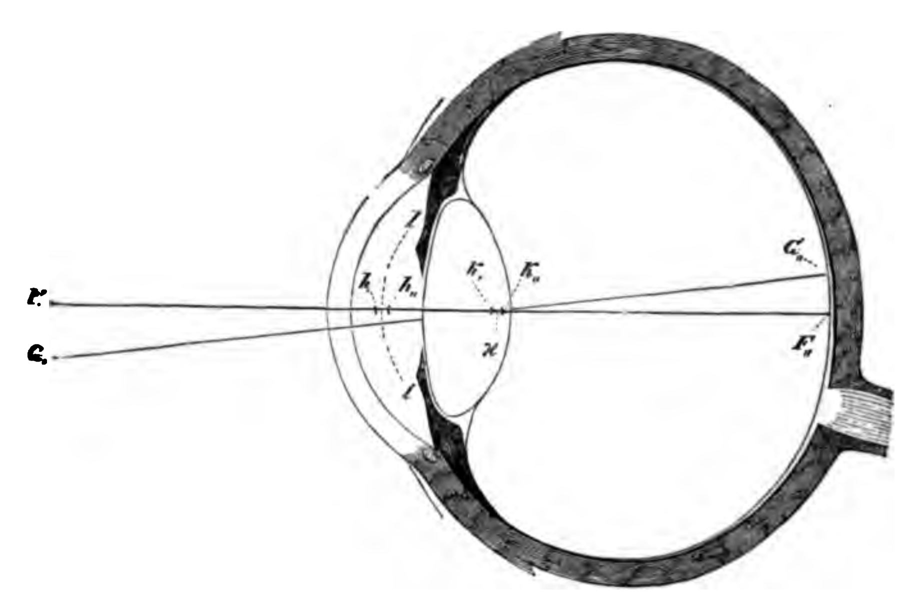


Fig. 385

données. La figure 385, empruntée à M. von Helmholtz, représente l'*œil schématique de Listing*, visant à l'infini : F, F,, sont les foyers principaux, *h*, *h*,, les points principaux, *k*, *k*,, les points nodaux.

La petitesse de l'interstice permet de confondre en un seul les deux points principaux et de même en un seul les deux points nodaux. On obtient ainsi un système que Listing nomme l'*œil réduit* : une simple surface sphérique *ll*, dont le pôle serait au point principal unique à $2^{mm},35$ en arrière de la surface antérieure de la cornée, dont le centre (point par lequel passent les rayons sans déviation) serait au point nodal double $\varkappa$, à $0^{mm},55$ en

avant de la surface postérieure du cristallin, et qui séparerait l'air de l'humeur aqueuse ou vitrée (¹). Cette conception est le plus souvent suffisante.

On peut encore comprendre le rôle des milieux réfringents de l'œil en supposant la rétine dans l'air et en mettant devant elle à 15^{mm} (contre la face postérieure du cristallin) une lentille convergente infiniment mince de 15^{mm} de distance focale.

Antérieurement aux calculs de Listing, les expériences de Volkmann avaient établi que l'œil se comporte en effet à la façon d'une lentille unique placée dans l'air. En disposant plusieurs mires en avant d'un œil isolé, dont il avait raclé la sclérotique pour la rendre transparente, il constatait que ces mires projetaient sur la rétine leurs images dans des directions qui se coupaient toutes en un même point situé près de la face postérieure du cristallin.

On construira donc, d'après les règles ordinaires, les images qui seront semblables aux objets et renversées.

Quant à ce renversement, signalons au passage l'inanité de la question souvent posée : Comment voit-on les objets droits, leurs images sur la rétine étant renversées (²)? L'image produite dans l'œil n'est pas un tableau que nous regarderions du dedans. « Notre conscience naturelle, dit à ce sujet M. von Helmholtz, ignore complètement et l'existence de la rétine et la formation des images optiques : comment saurait-elle quelque chose de la position des images qui s'y forment? » La sensation reste aussi inexpliquée, quelle que soit dans l'organe la situation de l'image.

Théorie physique de la vision. — Expérience du P. Scheiner (³). — La netteté de la vision a pour condition nécessaire l'existence d'une image nette sur la rétine. Parmi les nombreuses démonstrations à l'appui de ce principe, nous citerons seulement l'expérience du

(¹) Le rayon de courbure de cette surface est $5^{mm},10$; les distances focales principales restent 15^{mm} et 20^{mm}.

(²) Par contre, une image droite fait voir l'objet renversé. A travers un petit trou percé dans une carte opaque, regardons une surface très éclairée, la flamme d'une bougie, par exemple; entre l'œil et la carte, faisons passer un objet délié (plume, épingle). La pupille agit alors comme une grande ouverture : l'*ombre* de l'objet tombe sur la rétine sans renversement; l'objet paraît renversé et semble se déplacer en sens inverse de son mouvement réel.

(³) SCHEINER, *Oculus, sive fundamentum opticum*. Innspruck; 1619.

P. Scheiner. Dans une carte opaque on perce deux trous à un intervalle moindre que le diamètre ordinaire de la pupille (qui est d'environ 4^{mm}). On met cette carte devant l'œil et l'on regarde à travers les deux trous une aiguille située à petite distance : on voit deux images. Si l'on retire la carte, on n'en perçoit plus qu'une, mais très confusément. Éloigne-t-on l'objet, les deux images se rapprochent et finissent par se réunir. Si alors on enlève la

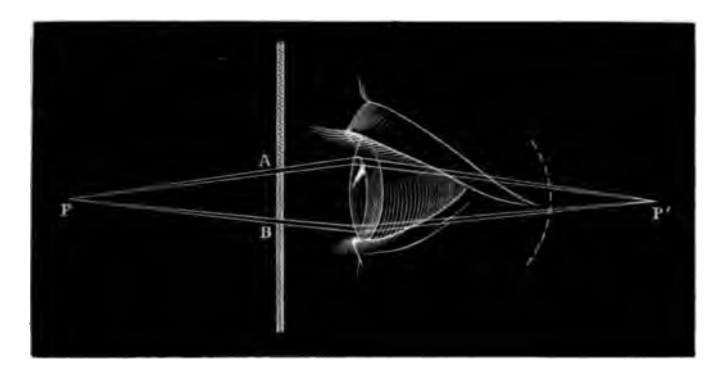


Fig. 386

carte, l'image unique reste parfaitement nette. La figure ci-contre fait comprendre immédiatement ces différentes apparences. Quand le point P est très voisin de l'œil, son conjugué P' est derrière la rétine : vu directement, l'objet manque de netteté; examiné à travers les deux trous A et B qui isolent deux pinceaux étroits, il paraîtra double. Le point P s'éloignant, P' se rapproche de la rétine, et quand il y arrivera, la vision sera également nette à l'œil nu ou à travers la carte [1]. Nous conclurons donc que la vue n'est distincte que s'il y a image nette sur la rétine.

Vue distincte. — Toutefois ce principe ne doit pas être appliqué avec une rigueur géométrique qui ne convient à aucun de nos organes. Il importe avant tout de savoir ce que l'on appelle *vue distincte*. Un œil normal voit la lune se détacher nettement sur le fond du ciel, mais il ne saisit aucun détail de la surface.

[1] Si l'œil est myope, P continuant à s'éloigner, P' passera en avant de la rétine et l'on verra de nouveau à travers la carte deux images, mais croisées, l'image supérieure correspondant au trou inférieur, et réciproquement.

Dans toute image, les détails au-dessous d'une certaine grandeur angulaire nous échappent effectivement.

Inégale sensibilité des diverses parties de la rétine : punctum cæcum, fovea centralis. — Le nerf optique lui-même est insensible à la lumière. Le point où il pénètre dans l'œil constitue le *punctum cæcum*, la tache aveugle, dont on peut facilement reconnaître sur soi-même l'existence, au moyen de l'expérience suivante, due à Mariotte [1] : Que l'on ferme l'œil gauche et que l'on regarde fixement



Fig. 387

avec l'œil droit la croix blanche de la figure ci-contre, empruntée à M. von Helmholtz, en avançant ou en reculant le livre maintenu verticalement, on trouve aisément une distance (30^{cm} environ) pour laquelle le cercle blanc s'effacera complètement [2]. La région la plus sensible de l'œil, celle sur laquelle on amène toujours l'image quand on arrête son regard sur un objet (quand on lit ou qu'on écrit), est la *fovea centralis*, la partie centrale d'une *tache jaune* [3], placée un peu en dehors du *punctum cæcum*. Elle est formée essentiellement par la juxtaposition d'un très grand nombre de tout petits organes, les *cônes*, dans lesquels se terminent les dernières ramifications du nerf optique : ce sont les véritables éléments impressionnables par la lumière [4]. De leur grandeur dé-

(1) Mariotte, *Œuvres*, dans les *Mémoires de l'Académie*; 1669-82.

(2) Le diamètre apparent de la tache aveugle est, selon M. von Helmholtz, [illegible] (onze pleines lunes y tiendraient sur une seule rangée), le diamètre vrai $1^{mm},8$.

(3) A l'état normal, la rétine est rouge; le pourpre rétinien, qui a son siège dans les bâtonnets, fait défaut dans la tache jaune : il ne joue donc pas un rôle essentiel dans la vision, comme on l'a parfois prétendu.

(4) Dans les autres parties de la rétine (sauf le *punctum cæcum*), les cônes se trouvent mêlés en proportions diverses, suivant les régions, aux bâtonnets qui font également défaut dans la tache aveugle.

pend nécessairement le degré d'exactitude que peut atteindre la vision. Or les cônes ont dans la *fovea centralis* un diamètre de 3^{μ} à 4^{μ}, d'après Kölliker. Assurément on peut voir un objet dont l'image rétinienne a géométriquement un diamètre bien inférieur, si ce objet est assez éclairé pour affecter sensiblement l'un des cônes : c'est ainsi que l'œil perçoit très nettement les étoiles, malgré l'infinie petitesse de leur diamètre apparent. Mais on ne pourra pas distinguer deux points lumineux dont la distance apparente sera inférieure à 40″, angle visuel correspondant à 3^{μ} (¹). En fait, par suite des aberrations, le pouvoir séparateur de l'œil diffère peu de 1′, ce qui correspond à une tache lumineuse de $4^{\mu},5$.

Toute déviation des conditions idéales de la vision qui n'entraîne pas de perturbation au delà de cette limite sera donc absolument négligeable. L'œil normal qui voit nettement à l'infini verra encore nettement un objet distant de 13^{m}, le cône des rayons réfractés ne détachant pas encore sur la rétine un cercle d'un diamètre supérieur à $4^{\mu},5$ (²). Mais un œil normal voit nettement les objets très rapprochés, non pas, il est vrai, sans un certain travail intérieur dont l'observateur a conscience et que l'on appelle l'accommodation.

Accommodation : images de Sanson (³). — Guidé par une ancienne expérience d'Young, le chirurgien français Sanson a indiqué le moyen de déterminer en quoi cette accommodation consiste. Plaçant devant l'œil du sujet une bougie allumée, il en percevait trois images: deux, droites et virtuelles, provenant de la réflexion sur les surfaces convexes de la cornée et du cristallin (l'image donnée par ce dernier étant plus grande et bien moins brillante), la troisième (beaucoup plus petite que l'image cornéenne et que la première image cristallinienne), renversée et réelle, relative à

(¹) Les images, ou plus exactement les centres des images de ces points tombent alors sur un seul cône ou sur deux cônes adjacents; l'impression sera identique à celle que produirait l'image d'un point unique rencontrant un seul élément ou la ligne de contact de deux éléments. L'œil ne peut distinguer deux images que si elles se forment sur deux éléments séparés par un troisième ne recevant pas de lumière ou en recevant moins que les deux autres.

(²) Telle est du moins la conclusion du calcul quand on remplace l'œil par la lentille infiniment mince de 15^{mm} de distance focale. La limite s'abaisse à 8^{m} si l'on tient compte de la figure réelle des surfaces réfringentes et de la forme qui en résulte pour le faisceau réfracté, comme l'a fait Sturm.

(³) Sanson, *Leçons sur les maladies des yeux*. Paris; 1837.

la surface concave du cristallin; et par l'aspect de ces images il jugeait de l'état de l'œil. Le physicien hollandais Cramer [1] disposa l'expérience de façon à observer les déformations des images quand la vue se porte brusquement d'un objet éloigné à un objet rapproché P : la première image droite reste fixe, ce qui signifie que la cornée ne change pas de forme; mais la graude image droite se déplace beaucoup, prouvant ainsi que la face antérieure du cristallin a subi une forte augmentation de courbure. L'observation de l'image renversée montre que la face postérieure a au contraire pris une courbure un peu moindre. Au moyen de son ophtalmomètre (429), M. von Helmholtz a pu mesurer exactement ces variations de courbure, et mettre hors de doute ce fait que la convergence du cristallin s'accroît pour les faibles distances [2].



Fig. 388

Diverses sortes de vues. — Avec l'âge, la faculté d'accommodation diminue, et la limite inférieure de la vision distincte recule : on devient *presbyte* (πρέσβυς, ancien). Pour voir de près, on devra placer devant l'œil un verre convergent [3].

(1) Cramer, *Het Accomodatievermogen der Oogen.* Haarlem; 1853.

(2) L'œil accommodé pour une certaine distance voit mal les objets plus éloignés ou plus rapprochés, parce que leurs images sur la rétine ne sont pas au point.

(3) La distance f de ce verre sera donnée par l'équation

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{\pi}=\frac{1}{f},$$

d étant la distance à laquelle on veut réduire la limite inférieure de la vision distincte, limite actuellement égale à π (abstraction faite de la distance du verre à l'œil.

L'œil *normal* ou *emmétrope* (ἐν dans, μέτρον mesure, ὤψ œil) voit istinctement depuis l'infini jusqu'à une courte distance (environ 5^{cm}); en d'autres termes, des deux limites de la vision distincte ı plus lointaine, le *punctum remotum* est à l'infini; la plus rapprochée, le *punctum proximum*, est à 15^{cm} ([1]).

Le système optique de l'œil peut présenter un excès ou un défaut e convergence par rapport à la distance à laquelle se trouve la réne : de là deux amétropies.

L'œil *myope* (μύειν serrer, ὤψ œil, à cause de l'habitude qu'ont ›s myopes de serrer les paupières pour voir un peu moins mal) ou *·achymétrope* (βραχύς, court) ne voit distinctement qu'entre deux mites finies : une limite supérieure, toujours peu éloignée ([2]), et ne limite inférieure qui se réduit souvent à quelques centimètres. i le rapprochement du *punctum proximum* n'a pas d'inconvénients, ː raccourcissement de la limite supérieure est fort gênant : on y ›médie à l'aide d'un verre divergent ([3]).

L'œil *hypermétrope* (ὑπέρ, au delà) ne voit nettement à aucune istance ([4]) : pour se rassembler sur la rétine, les rayons incidents oivent déjà posséder une certaine convergence : le *punctum re- ıotum*, défini comme le point où l'œil voit sans accommodation,

([1]) Le nombre de 30^{cm}, que l'on cite souvent comme distance normale de la sion distincte et qui n'est autre chose que la distance convenable pour lire ı pour écrire, correspond à nos conditions de vie civilisée et n'aurait aucune gnification physiologique si l'habitude ne donnait en effet à l'œil de l'homme étude une facilité particulière d'accommodation pour cette distance. C'est nsi que les enfants, entre les mains desquels on met des livres mal imprimés s obligeant à regarder de près, deviennent myopes par la persistance d'un état abord passagèrement imposé. Inversement les chasseurs, les montagnards, s marins, accoutumés à observer les objets éloignés, perdent la facilité d'ac- ›mmoder leur vue aux courtes distances et sont presbytes de très bonne heure.

([2]) Si elle atteignait quelques mètres, la vue serait nette jusqu'à l'infini.

([3]) Ce verre devra avoir pour distance focale la distance ρ du *punctum remo- m.* La vision sera alors distincte depuis l'infini jusqu'à une distance d déterinée par la formule

$$\frac{1}{\pi}-\frac{1}{d}=\frac{1}{\rho},$$

étant la distance du *punctum proximum*.

([4]) Pour certains yeux hypermétropes, l'accommodation permet de voir les ›jets éloignés jusqu'à une distance minima correspondant au *punctum ·oximum*. Ce point peut donc être situé à distance finie. Il peut aussi être à nfini, ou même passer derrière l'œil, c'est-à-dire être virtuel, sa distance ›solue étant alors plus grande que celle du *punctum remotum*.

trous :: formant un trapèze de dimensions telles qu'il puisse se loger dans la pupille disposée pour une lumière peu intense. A travers ces quatre trous, on regarde une aiguille horizontale placée assez près pour que chaque trou donne une image distincte. Si alors on éloigne graduellement l'aiguille, on voit les quatre images se rapprocher jusqu'à se réunir en une seule quand on atteint le *punctum proximum*. Mais la réunion s'effectue d'une façon différente selon les yeux ; le plus souvent, les images centrales se superposent les premières : l'aberration est alors de signe contraire à celle d'une lentille convergente; d'autres fois, ce sont les images marginales qui commencent par se joindre : l'aberration est de même signe que dans une lentille ordinaire; parfois enfin il arrive que la coïncidence a lieu simultanément pour les quatre images : l'aberration est nulle.

Les milieux de l'œil agissant comme une série de prismes dont les actions concorderaient, l'aberration de réfrangibilité semble également devoir être considérable; et cependant elle est en général tout à fait insensible. Cela tient toujours à la petite ouverture de la pupille dans une lumière vive : chaque faisceau de rayons monochromatiques est très effilé dans sa portion utile, et par conséquent la superposition des divers faisceaux est presque complète sur la surface suivant laquelle ils sont coupés par la rétine. Mais si, par une instillation de belladone, on maintient la pupille aussi dilatée au grand jour qu'elle l'est normalement à une faible lumière, les objets apparaissent entourés d'une auréole colorée. Le défaut d'achromatisme de l'œil se manifeste encore dans l'expérience de Scheiner : les deux images de P (fig. 386) sont irisées. Si l'on a en P une fente lumineuse, on voit deux spectres tournés en sens inverse. Nous rappellerons enfin l'observation de Fraunhofer : en étudiant le spectre avec une lunette achromatique, il avait remarqué que cependant la mise au point différait beaucoup d'une couleur à l'autre, circonstance qui prouve le défaut d'achromatisme de l'œil et qui permettrait même de le mesurer [1].

Persistance des impressions lumineuses sur la rétine : thaumatrope, phénakisticope, cercles de Faraday. — Bien que nous lais-

[1] Le raisonnement d'Euler (p. 568) reposait donc sur une donnée tout à fait fausse.

sions ici entièrement de côté l'étude physiologique de l'œil, nous ne pouvons passer sous silence un phénomène qui joue en physique un rôle important, déjà signalé à plusieurs reprises, c'est-à-dire la persistance des impressions lumineuses sur la rétine. Au moyen d'un disque tournant analogue à celui de la figure

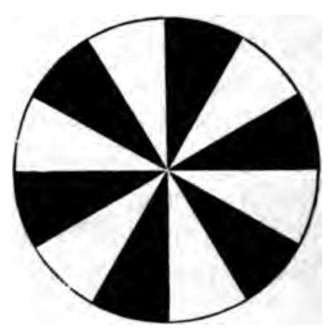


Fig. 389

ci-dessus, on peut aisément constater que la durée de cette persistance, variable d'ailleurs avec les conditions de l'expérience, est d'environ un dixième de seconde.



Fig. 390

Parmi les appareils établis sur ce fait, nous citerons :

Le thaumatrope (θαῦμα, merveille; τρέπω, tourner) (¹), carton

(¹) PARIS, *Edinb. journ.*, IV, 87.

aire tournant autour d'un de ses diamètres et portant une de ses faces un dessin incomplet, sur l'autre les parnanquantes qui, dans la rotation, s'ajoutent aux pres.

phénakisticope (φεναχιστιχός, trompeur) [1] : quand les deux es A et B (fig. 390) tournent ensemble, l'œil reçoit par les venant successivement passer devant lui une série d'impresqui se prolongent de façon à provoquer la sensation d'un ement continu de l'objet dessiné à diverses phases de ce mount sur le carton B (362).

roues de Faraday [2] : ce sont deux roues identiques, touren sens inverse avec la même vitesse suffisamment grande et t l'aspect d'une roue unique, fixe, qui aurait un nombre de ouble de ceux que possède réellement chacune des roues

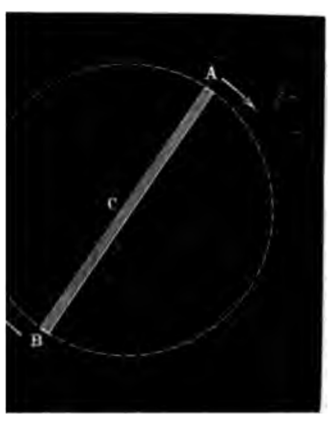




Fig. 391

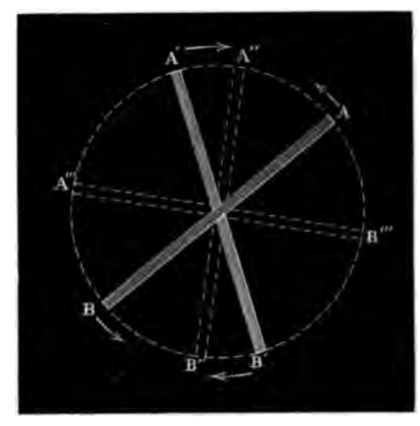


Fig. 392

es. Pour nous rendre compte de cette apparence, considél'abord une simple barre supposée brillante : si cette barre e assez vite, le champ paraîtra uniformément éclairé ie pour notre œil la lumière de la barre se répartira égale-

LATEAU, *Correspond. math. et phys. de l'Observ. de Bruxelles*, VII, 365 ; f. STAMPFER, *Die stroboskopischen Scheiben*. Wien ; 1833. Dans les disques copiques, les figures sont tracées sur le même carton que les fentes : servir de l'appareil, on se met devant une glace, les figures faisant face ce, et on regarde à travers les fentes.

ARADAY, *Journal of the Royal Institution*, I, 1831.

ment sur tout le cercle. Si devant cette barre nous en plaçons une deuxième, aussi brillante, tournant en sens contraire à vitesse égale, l'intensité de l'éclairement apparent du champ sera double, sauf sur les deux diamètres rectangulaires suivant lesquels les deux barres se croisent à chaque révolution, la barre supérieure étant alors la seule éclairante. Le champ présentera donc deux bandes immobiles perpendiculaires, relativement obscures. Le raisonnement s'étend de lui-même à un nombre quelconque de barres, et par conséquent aux deux roues de Faraday (¹).

Vision binoculaire. — Stéréoscope : Wheatstone, Brewster, d'Almeida. — Nous ne saurions non plus omettre absolument le phénomène de la vision binoculaire. Que l'on voie mieux avec deux yeux qu'avec un seul est chose connue de tous et qui n'a guère besoin d'explication. On conçoit moins la simplicité de l'apparence, malgré la dualité de l'image.

Pour qu'un objet, que nous supposerons d'abord assez éloigné, paraisse simple, il faut que les images de chacun de ses points se forment en deux points physiologiquement correspondants des deux rétines. Le fait arrive normalement quand les axes des deux yeux sont dirigés vers l'objet. Mais il suffit de déranger l'un des yeux par une légère pression du doigt pour détruire cet arrangement et faire surgir deux images. Lorsque l'objet est rapproché, les images produites dans les deux yeux ne peuvent plus être identiques, et le principe posé plus haut cesse d'être rigoureusement applicable. Il en résulte une vision spéciale, causant la sensation du relief, comme le prouve ce qui se passe dans le stéréoscope (στερεός, solide; σκοπέω, voir) (²).

Cet appareil, imaginé par Wheatstone, donne la sensation du relief en mettant devant chaque œil une image de l'objet telle que la recevrait cet œil et en assurant aux rayons émanés de cette image la direction qu'ils auraient s'ils venaient réellement de l'objet. Procurons-nous deux photographies de l'objet prises au

(¹) Si les deux roues tournent en sens inverse avec des vitesses différentes, les rais de l'image paraissent tourner en sens contraire de la roue qui va le plus vite, avec une vitesse égale à la demi-différence des vitesses des deux roues.

(²) WHEATSTONE, in *Mayo's Outlines of human Physiology*; 1833; et *Phil. Trans.*; 1838, part II, p. 371.

yen de deux objectifs braqués sur lui ainsi que le seraient les ıx yeux; et, à l'exemple de Wheatstone (¹), plaçons-les en AB

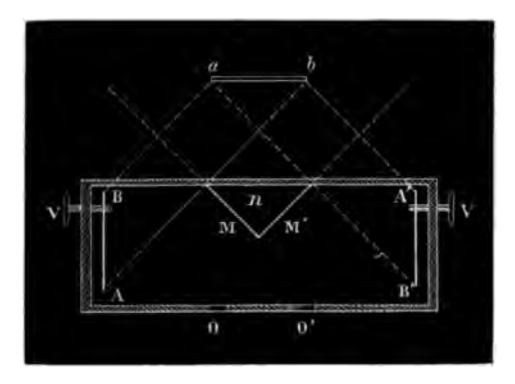


Fig. 393

ı'B', vis-à-vis de deux miroirs plans M, M', perpendiculaires re eux : les images se superposant en *ab*, le relief appa-

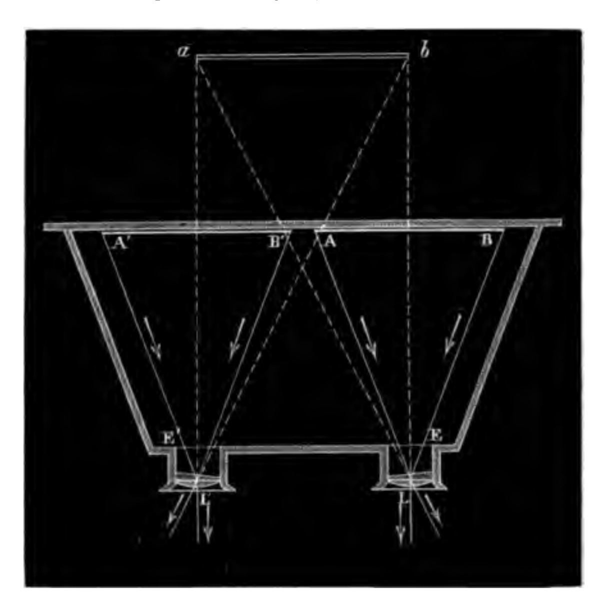


Fig. 394

ı. Brewster a produit le même effet plus commodément avec ıx lentilles prismatiques : chacune d'elles peut être considérée

) Wheatstone se servait de dessins tracés géométriquement.

comme constituée par la juxtaposition d'une lentille qui fournit une image virtuelle à la distance de la vision distincte et d'un prisme qui rejette cette image en *ab* où les deux images se réunissent.

Le phénomène se montre sous une forme très frappante dans l'expérience de d'Almeida. Sur un écran on superpose en projection deux images stéréoscopiques, l'une rouge, l'autre verte, de façon à obtenir une image unique, incolore et sans relief. Mais si l'on regarde cette image à travers une paire de lunettes dont l'un des verres soit rouge, et l'autre vert, l'image prend un relief saisissant, tout en restant incolore.

II. — Instruments d'optique.

443. Propriétés générales. — Les instruments d'optique ont tous pour but d'augmenter la puissance de l'œil.

Puissance. — D'après Verdet, on appelle puissance d'un instrument le diamètre apparent sous lequel cet instrument fait voir l'unité de longueur prise à la surface de l'objet.

Grossissement. — Le grossissement est le rapport des diamètres apparents ([1]), toujours petits, sous lesquels on voit l'objet à travers l'instrument ou à l'œil nu, dans les conditions où s'effectue chacune des visées.

Il importe, en effet, de préciser la position de l'œil non seulement par rapport à l'objet, mais aussi par rapport à l'image que l'instrument substitue à l'objet ([2]).

L'instrument est toujours théoriquement réductible à une lentille unique. Soient F' le second foyer et H'K' le second plan principal de cette lentille. Par le sommet Q de l'objet PQ ([3]) menons QK' parallèle à l'axe, tirons F'K'. Le sommet Q' de l'image P'Q' se

([1]) Au lieu des diamètres apparents, il serait peut-être plus naturel de considérer les grandeurs des images rétiniennes; mais, les déplacements du point nodal de l'œil avec l'accommodation étant négligeables, les deux quantités sont proportionnelles, et l'usage des diamètres apparents est plus commode dans la pratique.

([2]) Voir Guébhard, *Annales d'oculistique*, LXXXIX, 197, et *Journal de physique*, (2), II, 266; 1883; et Gariel, *Études d'Optique géométrique*. Paris, Nony, 1889; p. 162.

([3]) Si PQ = 1, angle PCQ mesure la puissance de l'instrument.

formera sur cette droite F'K' à une distance qui dépend de la distance même de l'objet.



Fig. 395

Le centre optique de l'œil C peut occuper trois positions par rapport au point F'.

1° Le centre optique de l'œil C_1 est en deçà du foyer F', entre F' et P'Q'. Il est manifeste que le grossissement sera d'autant plus grand que P'Q' sera plus près de C_1. L'instrument devra donc être ajusté de façon que l'image se fasse au *punctum proximum*. Si l'œil peut se déplacer, il se mettra le plus loin possible de F' et par conséquent le plus près possible de l'instrument. Il y a d'ailleurs entre le dernier verre et l'œil un écartement minimum, égal à la distance du centre optique à la cornée plus l'épaisseur des paupières et la longueur des cils, soit au total environ 15 millimètres (¹);

2° Le centre optique de l'œil C_2 coïncide avec le foyer F'. Le diamètre apparent de P'Q' est alors indépendant de sa position. On évitera toute fatigue d'accommodation en éloignant l'image au *punctum remotum*;

3° Le centre optique de l'œil C_3 est au delà du foyer F'. Ce cas est l'inverse du premier. L'image devra se faire au *punctum remotum*. En outre, on rapprochera C de F' autant que cela se pourra.

Les deux derniers cas sont les plus fréquents. La position de l'œil au foyer peut même être regardée comme la condition théorique dont on s'éloigne généralement fort peu dans la pratique.

Ces considérations se traduisent aisément en formules.

(¹) Les opticiens comptent 13 millimètres de la cornée et par conséquent 20 millimètres du centre optique de l'œil aux besicles.

Soient Δ la distance CP′ du centre de l'œil à l'image,

ε la distance F′C du foyer au centre de l'œil,

distances comptées positivement du côté d'où vient la lumière.

Nous avons désigné plus haut (428) par ϖ' la distance F′A′ du foyer à l'image, comptée positivement dans le sens où va la lumière.

On a donc

$$-\varpi' = \Delta + \varepsilon;$$

par suite, l'équation

$$\frac{-\mathrm{I}}{\mathrm{O}} = \frac{\varpi'}{f'} \qquad \text{(V)},$$

I et O étant les grandeurs linéaires de l'image et de l'objet, et f' la seconde distance focale (égale à la première f quand le système est dans l'air), s'écrira

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{O}} = \frac{\Delta + \varepsilon}{f}.$$

L'angle θ_1 sous lequel l'image est vue du point C est

$$\theta_1 = \frac{\mathrm{I}}{\Delta} = \frac{\mathrm{O}}{f} \frac{\Delta + \varepsilon}{\Delta}.$$

La puissance a donc pour expression

$$\mathrm{P} = \frac{1}{f} \frac{\Delta + \varepsilon}{\Delta},$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathrm{P} = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\Delta}\right).$$

Δ est nécessairement positif pour tout œil non hypermétrope. Par conséquent, si ε est positif (œil en deçà du foyer), la puissance sera d'autant plus grande que Δ sera plus petit et ε plus grand : on devra placer l'image au *punctum proximum* et s'éloigner autant que possible du foyer. Si ε est négatif (œil au delà du foyer) les conclusions sont inverses : on reculera l'image au *punctum remotum* et on se rapprochera le plus que l'on pourra du foyer. Si ε est

nul (œil au foyer), la puissance sera indépendante de Δ, et elle aura pour valeur la puissance intrinsèque du système (428)

$$P = \frac{1}{f};$$

mais, pour éviter la fatigue de l'accommodation, il sera avantageux d'éloigner l'image jusqu'au *punctum remotum*.

Le diamètre apparent θ_0 sous lequel on voit à l'œil nu l'objet placé à la distance Δ_0 est

$$\theta_0 = \frac{O}{\Delta_0}.$$

On a donc pour le grossissement

$$G = \frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{\Delta_0(\Delta + \varepsilon)}{f\Delta},$$

formule que l'on discutera facilement dans chaque cas particulier.

Pouvoir séparateur (¹). — Il ne faut pas oublier que la théorie géométrique exposée ici est incomplète. Par suite des phénomènes de diffraction, la visibilité des détails dépend du diamètre de la tache lumineuse formant le centre de l'image complexe que donne un point. Toutes choses égales d'ailleurs, ce diamètre est en raison inverse du diamètre de la surface effective des plans principaux (²). Par conséquent, l'angle apparent sous lequel la tache centrale est vue du deuxième point nodal du système (³) et que l'on appelle le pouvoir séparateur de l'instrument, est défini uniquement (pour une lumière déterminée) par la surface utile des plans principaux.

D'après Foucault, le pouvoir séparateur est 1″, soit environ $\frac{1}{200\,000}$ (telle est à peu près la longueur de l'arc de 1″ dans un cercle de rayon 1), pour un objectif de 13 centimètres de diamètre. Suivant Dawes, la constante de séparation (produit du pouvoir sé-

(¹) Voir Mascart, *Traité d'Optique*, I, 130. Paris, Gauthier-Villars; 1889.

(²) Il est en outre proportionnel à la longueur d'onde et aussi à la distance de l'image au deuxième plan principal.

(³) Cet angle est égal à celui sous lequel apparaît à la surface de l'objet la distance de deux points dont les images se touchent : nous admettons que c'est la plus petite distance pour laquelle les deux points sont distincts.

parateur par le diamètre en centimètres) serait 11′,6. Nous adopterons 12″ comme résultat moyen de ces mesures.

Le diamètre de la pupille varie de 3 millimètres dans une lumière vive à 8 millimètres dans l'obscurité. Si nous admettons un diamètre de 4 millimètres, qui correspond à un éclairage ordinaire, l'œil pourrait donc résoudre un angle de $\frac{120}{4}\,1'' = 30''$, presque identique à la limite résultant du diamètre des cônes sur la *fovea centralis* (442).

Cette limite n'est jamais atteinte [1] : dans un œil normal, l'acuité visuelle, mesurée par le pouvoir séparateur, diffère peu de 1′, comme si le diamètre utile de la pupille n'était que 2 millimètres. La distance des détails que sépare un œil visant à 30 centimètres est par conséquent d'environ $\frac{1}{10}$ de millimètre [2].

Clarté. — On nomme clarté le rapport entre les éclats intrinsèques de l'image et de l'objet.

Soit E l'éclat intrinsèque de l'objet, c'est-à-dire la quantité de lumière envoyée par l'unité de surface de l'objet sur une surface égale à l'unité placée à l'unité de distance, la surface éclairante et la surface éclairée étant l'une et l'autre normales aux rayons. Si nous appelons s la surface de l'objet, σ la surface utilisée sur le premier plan principal du système, la quantité de lumière que reçoit cette surface σ située à la distance p de l'objet est

$$Q = \frac{E s \sigma}{p^2}.$$

Abstraction faite des absorptions, le deuxième plan principal reçoit sur une surface égale σ la même quantité de lumière Q, que

(1) Cela tient, comme nous l'avons dit, aux aberrations de l'œil, aberrations qui deviennent d'autant plus sensibles que la pupille s'ouvre davantage, de sorte que l'acuité visuelle n'augmente pas proportionnellement au diamètre de l'ouverture.

(2) On a en effet, en appelant x cette distance,

$$\frac{x}{30} = \frac{60}{200\,000},$$

d'où

$$x = 0^{cm},009.$$

nous pouvons regarder comme lui étant envoyée par l'image de surface s' placée à la distance p'. Si donc E' est l'éclat intrinsèque de cette image, on a encore

$$Q = \frac{E' s' \varpi}{p'^2}.$$

De ces deux égalités on tire

$$\frac{E'}{E} = \frac{s p'^2}{s' p^2} = \left(\frac{O p'}{I p}\right)^2,$$

I et O étant toujours les grandeurs linéaires de l'image et de l'objet (¹). ou, en vertu de l'équation IV (428),

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{f'}{f}\right)^2,$$

ou enfin, d'après la relation générale $\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n}$,

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2:$$

en d'autres termes, la clarté est égale au carré du rapport des indices extrêmes.

Quand ces indices sont identiques, comme il arrive pour un système plongé dans l'air, la clarté est égale à 1.

Les raisonnements qui précèdent s'appliquent évidemment aux images rétiniennes. Par conséquent, il y a encore égalité d'éclat intrinsèque entre les images rétiniennes de l'objet et de l'image, à la seule condition que la section du faisceau pénétrant dans l'œil soit la même (ouverture de la pupille constante et pleinement remplie par la lumière); et l'égalité se maintient à quelques distances que l'objet et l'image soient de l'œil, tant que leur diamètre apparent reste sensible, l'éclairement et la surface éclairée sur la rétine étant l'un et l'autre proportionnels à la surface apparente $\frac{s}{p^2}$ de la source.

(¹) Dans l'air $\frac{I}{O} = \frac{p'}{p}$; donc $E' = E$.

Champ. — On appelle champ l'espace angulaire dans lequel doit se trouver un objet pour être visible à travers l'instrument.

444. Loupe. — *Principe.* — Pour voir le mieux possible à l'œil nu les détails d'un objet, on le rapproche naturellement jusqu'au *punctum proximum*. Si π désigne la distance de ce point au centre optique, la puissance maxima de l'œil est

$$\frac{1}{\pi};$$

elle est d'autant plus grande que la distance minima de la vision distincte π est plus petite [1].

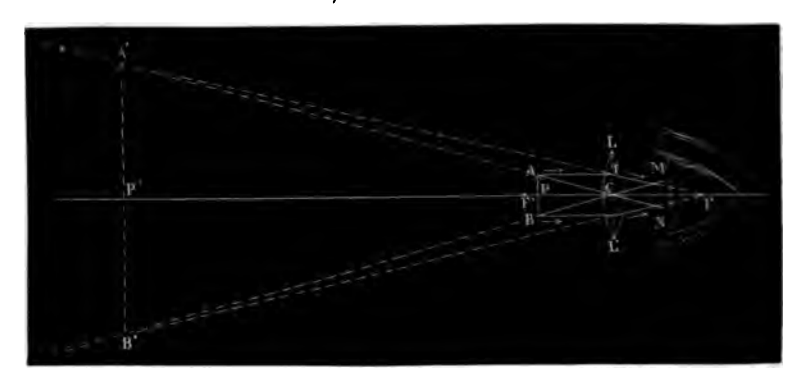


Fig. 396

Cette puissance peut être augmentée par l'emploi d'un verre convergent placé au devant de l'œil. En amenant l'objet entre le foyer et le verre, on obtient une image virtuelle, droite et agrandie, dont on règle la position en modifiant légèrement la distance de l'objet au verre [2]. Un semblable verre constitue une loupe.

(1) Si l'on place devant l'œil une carte percée d'un trou d'aiguille, on peut rapprocher davantage l'objet, tout en conservant une certaine netteté; mais cet expédient, analogue à celui qu'emploient les myopes quand ils clignent les paupières, est évidemment très défectueux.

(2) La distance p de l'objet à la lentille est donnée par la formule

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{\Delta-(f-\varepsilon)}=\frac{1}{f},$$

de laquelle on tire

$$p=f\left(1-\frac{f}{\Delta+\varepsilon}\right),$$

valeur toujours peu différente de f.

Puissance. — D'après ce qui a été dit plus haut (1), la puissance de l'instrument est

$$P = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\Delta}\right).$$

Dans les loupes faibles (loupes à long foyer, telles que verres de besicles, loupes de graveur ou d'horloger), ε est positif. On aura donc le maximum d'effet en appliquant l'œil contre la loupe et en rapprochant l'image jusqu'au *punctum proximum* (en avançant l'objet jusqu'à ce que $\Delta = \pi$). L'acuité visuelle étant supposée la même, un myope conservera avec la loupe l'avantage qu'il avait à l'œil nu sur un presbyte de mieux percevoir les détails (2).

Avec une loupe forte, il est au contraire préférable de viser au *punctum remotum* (3) : ρ étant la distance de ce point au centre

(1) Directement, on a

$$\frac{I}{O} = \frac{\Delta - (f - \varepsilon)}{p} = \frac{\Delta + \varepsilon}{f}.$$

Si donc $O = 1$, $I = \frac{\Delta + \varepsilon}{f}$; et comme cette grandeur est vue de la distance Δ, on a pour la puissance

$$P = \frac{\Delta + \varepsilon}{f\Delta}.$$

(2) Chez les hypermétropes, les valeurs positives de Δ sont très grandes, mais en outre il y a des valeurs négatives, dont la plus petite numériquement correspond au *punctum remotum*. Si Δ a cette valeur $-\rho_1$, la puissance atteint son maximum quand ε, négatif, est le plus grand possible en valeur absolue. Tel est le cas des *loupes à lire* que les vieillards promènent de loin au-dessus de leur livre, situé un peu au delà du foyer.

(3) Pour un œil normal dont le *punctum remotum* est à l'infini, l'objet sera

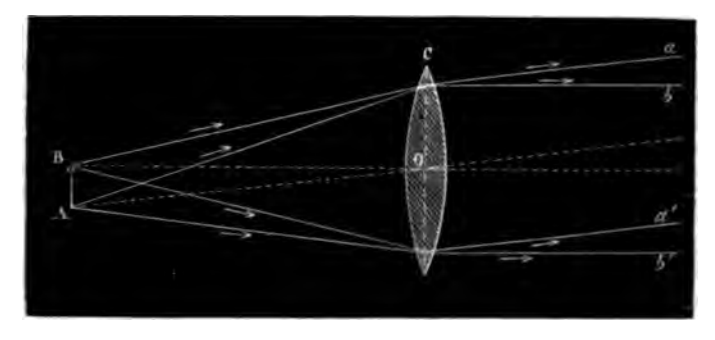


Fig. 397

dans le premier plan focal principal. Alors, les rayons partis de deux points A

optique, si nous posons $\varepsilon = -\varepsilon_1$ de façon à mettre en évidence le signe de cette quantité, la puissance aura pour expression

$$\frac{1}{f}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\rho}\right).$$

A mesure que ρ augmente, elle tend vers la valeur

$$\frac{1}{f}$$

qu'elle acquiert pour tout œil placé au foyer ($\varepsilon_1 = 0$).

Cette valeur, indépendante de la vue de l'observateur [1], et purement objective, représente la puissance intrinsèque de la loupe. Ce n'est autre chose que la puissance de la lentille, et, comme celle-ci, elle doit être évaluée en dioptries.

Grossissement. — D'après la formule générale (443), Δ_0 étant ici égal à π, le grossissement a pour expression

$$G = \frac{\pi}{f}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\Delta}\right),$$

formule qui se discuterait comme précédemment.

Pouvoir séparateur. — Le pouvoir séparateur d'une loupe se calcule aisément si l'on remarque que le rôle de la loupe, supposée parfaite, se réduit à permettre de rapprocher davantage les objets. Ainsi, une loupe visant à 1 centimètre fera dis-

et B de l'objet forment à leur sortie de la lentille O deux faisceaux de rayons respectivement parallèles aux axes secondaires AO, BO; en quelque point par conséquent que soit l'œil, il verra AB sous l'angle constant AOB, tant du moins que la lentille, dont le diamètre apparent diminue sans cesse, ne lui en cachera pas les extrémités. Mais, par suite de cette diminution de diamètre apparent de la lentille, l'image, que l'œil suppose toujours à la même distance derrière celle-ci, semble croître. Cette illusion, signalée par Smith, est très frappante, si, comme l'indique Desains, on prend pour objet un système de lignes parallèles débordant sur la loupe : « On les voit nettement à quelque distance que l'œil (capable de voir nettement à l'infini) soit placé; seulement, plus on s'éloigne, moins on en voit. » (SMITH, *A compleat system of Opticks*; 1728 (*Optique*, traduction du P. Pézenas, I, 157. Avignon et Paris; 1767). — DESAINS, *Leçons de physique*, II, 276).

[1] Chaque œil choisit la position la plus commode de l'image, l'angle visuel restant alors toujours le même, quelle que soit cette position.

tinguer des détails dont la distance sera seulement 3 microns [1].

Clarté. — La clarté est égale à 1. En effet, la distance de l'œil à la loupe étant supposée négligeable, la surface de l'image (située à la distance π) est à celle de l'objet (distant de p) dans le rapport de π^2 à p^2. D'autre part, la quantité de lumière qui concourt à la formation de l'image, la distance actuelle de l'objet étant p, est à la quantité de lumière qu'il envoyait, quand la distance était π, dans le rapport de p^2 à π^2. Donc les éclats intrinsèques de l'image et de l'objet sont égaux (abstraction faite des pertes par réflexion, absorption, etc.); et leur rapport, c'est-à-dire la clarté, est égal à 1.

Champ. — Bien que théoriquement, dans ces conditions, le champ d'une loupe puisse atteindre celui de l'œil, soit presque un demi-cercle, pratiquement les aberrations le limitent à une dizaine de degrés.

Loupes complexes. — On diminue les aberrations à l'aide d'un diaphragme, ou d'une combinaison de lentilles.

Loupes diaphragmées. — Dans les *lentilles diaphragmées de Wollaston*, appelées aussi *loupes périscopiques*, le diaphragme est engagé dans la masse même de la lentille [2]. Si celle-ci est sphérique, elle sera traversée dans tous les sens par des pinceaux étroits

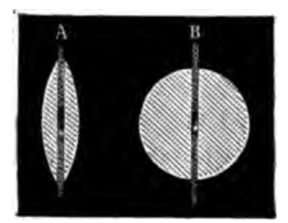


Fig. 398

s'éloignant peu des rayons de la sphère : elle offrira donc un champ très vaste sans aberration sensible.

(1) D'après ce qui a été dit plus haut, on a en effet

$$\frac{x}{1}=\frac{60}{200000},$$

d'où

$$x=0^{m},0003.$$

(2) Wollaston partageait le verre en deux moitiés, entre lesquelles il intercalait le diaphragme; mais la réflexion sur les deux faces planes voisines causait

Loupes composées. — Les plus en usage sont formées de deux

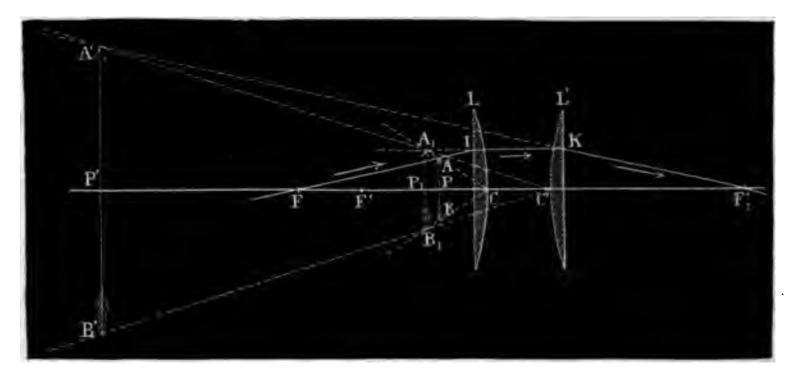


Fig. 399

lentilles. Les formules relatives à ce cas ont été données plus haut (428) [1]. La puissance intrinsèque du système est

$$P = \frac{1}{f} = \frac{f_1 + f_2 - e}{f_1 f e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}.$$

Dans le *doublet de Wollaston*, $f_1 = \frac{2}{3} e, f_2 = 2e$; par suite,

$$P = \frac{5}{6} \frac{1}{f_1}.$$

La puissance est un peu moindre que celle de la première lentille seule; mais les aberrations sont beaucoup plus faibles.

Pour mieux comprendre la valeur de cette combinaison que les opticiens représentent par le symbole 2, 3, 6 (nombres proportionnels à f_1, e et f_2), construisons les plans principaux et les foyers

la perte d'une certaine quantité de lumière. Mieux vaut, au lieu de couper le verre, y creuser une gorge assez large qui suffira seule à limiter les faisceaux transmis : on a alors la *loupe de Brewster*, dite ordinairement *loupe Coddington*.

[1] Sans recourir aux formules générales, on trouve aisément l'expression de la puissance, si l'on admet que l'image virtuelle formée par la première lentille (celle qui regarde l'objet supposé de longueur 1) est au foyer de la deuxième. Cette image a en effet pour grandeur $\frac{f_1 + f_2 - e}{f_1}$; et par suite l'angle sous lequel l'œil, placé n'importe où derrière la lentille 2, la voit par des rayons parallèles, est

$$\frac{f_1 + f_2 - e}{f_1 f_2}.$$

du système, en négligeant l'épaisseur des lentilles (¹) : soient A_1 la première lentille, F_1, F'_1 ses foyers ; A_2 la deuxième lentille, F_2, F'_2 ses



Fig. 400

foyers. Les plans principaux sont situés respectivement aux distances $A_1H = \frac{2}{5}e$ et $A_2H' = \frac{6}{5}e$, ce qui produit le croisement marqué sur la figure. Les foyers F et F', distants respectivement de ces plans principaux de $HF = H'F' = \frac{4}{5}e = \frac{6}{5}f_1$, tombent l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur du système : l'interstice $HH' = \frac{3}{5}e$. Par rapport à une loupe simple qui permettrait de voir à partir du deuxième foyer l'objet sous le même angle visuel, le doublet de Wollaston offre donc deux inconvénients : 1° un plus petit espace entre la face qui regarde l'objet et cet objet, autrement dit une plus petite *distance frontale*, ce qui constitue une gêne pour la manipulation ; 2° un plus grand éloignement de l'œil qui se trouve rejeté assez loin au delà du deuxième foyer. Ce dernier inconvénient est contrebalancé par l'avantage d'obtenir le meilleur effet du doublet dans l'état de non accomodation. Quant au premier, il est le prix peu élevé d'un avantage considérable, la suppression presque complète des aberrations (²).

La formule générale du grossissement, si l'on met en évidence le signe de ε, donne ici

$$G = \frac{\varpi}{f}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\rho}\right),$$

(¹) Voir Gariel, *loc. cit.*, p. 120.

(²) Par une autre combinaison dont la description trouvera sa place après celle de la lunette de Galilée, il est possible d'obtenir à la fois une grande distance frontale et un fort grossissement avec très peu d'aberration.

ce qui pour un œil normal dont le *punctum remotum* est à l'infini se réduit à

$$G=\frac{\pi}{f}=\frac{\pi}{f_1}+\frac{\pi}{f_2}-\frac{e\pi}{f_1 f_2}.$$

On a donc, avec les valeurs numériques adoptées,

$$G=\frac{5}{6}\frac{\pi}{f_1}.$$



Fig. 401

Les deux lentilles du doublet sont ordinairement serties dans deux bagues réunies par un pas de vis qui permet de faire varier un peu e, pour mieux compenser les défauts propres à l'œil [1].

On appelle *loupe montée* ou *microscope simple*, une loupe un peu forte (doublet ou autre système), disposée au-dessus d'une platine semblable à celle d'un microscope.

Loupe Stanhope. — Une forme très curieuse de loupe est celle qui porte le nom de Stanhope. C'est un bout de verre terminé du côté de l'œil par une calotte sphérique et de l'autre côté par une face plane contre laquelle on applique l'objet à examiner, de manière que les rayons émanant de l'objet n'éprouvent qu'une seule réfraction au sortir du verre. La longueur du cylindre étant un peu inférieure à la distance focale, la loupe fournit une image virtuelle, droite et agrandie, située à une distance invariable. Si donc l'appareil est remarquablement simple, il est fort imparfait. On ne l'emploie guère que pour grossir ces photographies microscopiques que l'on introduit dans toutes sortes de menus bibelots.

Oculaires composés. — Parmi les combinaisons de deux lentilles convergentes, nous décrirons encore les oculaires composés.

On distingue les oculaires composés en positifs et négatifs.

Oculaire positif de Ramsden. — Le type des oculaires positifs est

[1] Dans le *doublet de Ch. Chevalier*, les lentilles (qui tournent toutes les deux leur face plane vers l'objet) sont séparées par un diaphragme qui a pour but de réduire encore les aberrations.

l'oculaire de Ramsden (symbole 3, 2, 3) [1]. Sauf le croisement des plans principaux, il équivaut à une lentille unique de distance focale $\frac{3}{4}f_1$. Le foyer F est assez en avant de la première lentille A_1 pour



Fig. 402

que l'on puisse aisément se servir du système en guise de loupe. Les deux verres sont des lentilles plan-convexes se regardant par leurs faces courbes, disposition propre à diminuer les aberrations.

Oculaire négatif d'Huygens. — Les oculaires négatifs, appelés



Fig. 403

aussi oculaires d'Huygens ou de Campani, sont habituellement construits sur le symbole 3, 2, 1 adopté par Dollond [2]. La puissance de ce système $\frac{1}{f} = \frac{4}{3}e = 2\frac{1}{f_1}$. Les plans principaux sont encore

(1) $$f_1 = f_2 = \frac{3}{2}e.$$

Par suite,

$$f = \frac{9}{8}e = \frac{3}{4}f_1, \quad h = \frac{3}{4}e = \frac{1}{2}f_1, \quad \delta = \frac{1}{2}e = \frac{1}{3}f_1.$$

(2) $$f_1 = \frac{3}{2}e, \; f_2 = \frac{1}{2}e.$$

Par suite,

$$f = \frac{3}{4}e = \frac{1}{2}f_1, \quad h = \frac{3}{2}e = f_1, \quad \delta = e = \frac{2}{3}f_1.$$

croisés (le plan H coïncide avec les foyers F'_1 et F'_2 confondus, le plan H′ avec le foyer F_2), et les foyers sont normalement disposés par rapport à ces plans : le foyer F′ est à $\frac{1}{4}e$ au delà du second verre; le foyer F tombe à l'intérieur du système $\left(\frac{1}{4}e\right.$ en deçà du second $\left.\text{verre}\right)$, en sorte que l'oculaire d'Huygens ne peut pas fonctionner comme une loupe relativement à un objet réel placé à gauche. Mais il conviendra très bien à un objet virtuel situé en F (nous supposons toujours pour simplifier un œil normal visant à l'infini)(¹). Les lentilles constituantes sont plan-convexes et ont leurs faces planes du côté de l'œil, la convergence des rayons étant beaucoup plus forte de ce côté.

445. Microscope. — *Principe.* — Le microscope (μικρός petit, σκοπέω regarder) se compose essentiellement d'un objectif convergent qui donne une image réelle, renversée et agrandie de l'objet, et d'un oculaire convergent qui fait office de loupe et transforme cette première image en une deuxième image virtuelle, droite par rapport à la première, donc renversée par rapport à l'objet et de nouveau agrandie.

La figure 404 représente la marche des rayons.

Puissance. — Si nous désignons par f la distance focale principale de l'objectif, par F celle de l'oculaire et par d la distance des deux verres, la puissance intrinsèque du système est

$$P = -\frac{d-f-F}{fF},$$

le signe — indiquant que l'image est renversée. La distance d étant toujours très grande relativement à f et F, la puissance diffère peu de

$$\frac{d}{fF}.$$

(¹) Et en effet la première lentille offre alors à la deuxième une image réelle située en F_2, puisque l'on a

$$-\frac{2}{f_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f_1},$$

d'où

$$p'=\frac{f_1}{3}=\frac{e}{2}.$$

et par conséquent elle est sensiblement proportionnelle :

1° A la distance d des deux verres;

2° A la puissance de l'objectif $\frac{1}{f}$;

3° A la puissance de l'oculaire $\frac{1}{F}$.

Grossissement. — Le grossissement pour un œil normal visant à l'infini est

$$G = \pi P = -\frac{d-f-F}{f} \cdot \frac{\pi}{F}.$$

Le premier facteur est le grossissement de l'objectif (l'image réelle étant supposée se former à la distance $d - F$), le deuxième

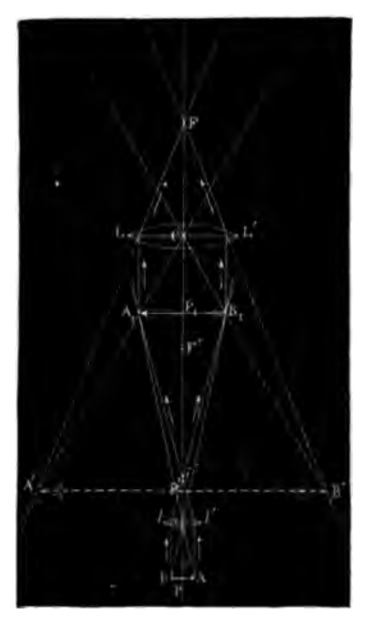


Fig. 404

est le grossissement de l'oculaire. Le grossissement du microscope est donc le produit du grossissement de l'objectif par le grossissement de l'oculaire, proposition évidente sur la figure, puisqu'on a identiquement

$$G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{A_1B_1} \cdot \frac{A_1B_1}{AB}.$$

la pupille coïncide avec le centre de l'anneau oculaire, on embrasse le champ entier, quel que soit d'ailleurs le diamètre de l'anneau oculaire. Ce diamètre est en effet sans influence sur le champ; mais il influe sur la clarté.

Clarté. — Lorsque le demi-diamètre a de l'anneau oculaire est supérieur ou égal à celui p de la pupille, la clarté est 1. Car l'éclat E' de l'image égalant celui E de l'objet, si cette image est vue, ainsi que l'objet, à pleine pupille, elle paraît également éclairée. Mais quand le faisceau qui arrive à l'œil ne remplit pas la pupille, en d'autres termes quand a est inférieur à p, cas ordinaire dans le microscope, les choses se passent comme si la pupille était réduite au rayon a, la clarté se trouve diminuée dans le rapport de la surface de l'anneau oculaire à la surface de la pupille (1).

Détails sur la construction. — Quelques détails sont nécessaires sur la construction de l'appareil.

Objectif. — L'objectif doit joindre une très petite distance focale (2) à une grande distance frontale (distance de la première surface matérielle à l'objet, placé toujours très près du foyer) et une très grande ouverture (3) à des aberrations extrêmement faibles. Ces exigences ne sont pas absolument inconciliables.

Un objectif formé de plusieurs lentilles peut satisfaire à la fois aux conditions d'ouverture et d'aberrations, les premières lentilles substituant à l'objet une série d'images aplanétiques, virtuelles, droites et agrandies, de plus en plus éloignées (p. 458), dont la dernière sera reprise sous un très petit angle par la lentille extrême (agissant comme l'objectif simple envisagé jusqu'ici) et transformée en une image réelle, agrandie, renversée, située du côté de l'oculaire (4). Cette disposition permet d'allier à une

(1) On voit bien dans le cas actuel la différence entre une image optique qui n'envoie de lumière que suivant certaines directions, ici très rapprochées, et un objet qui rayonne en tous sens.

(2) La puissance de l'objectif est l'inverse de la distance focale.

(3) Le pouvoir séparateur est proportionnel à l'ouverture. Au contraire, la *pénétration*, c'est-à-dire la propriété de laisser voir à la fois une certaine épaisseur, demande un faisceau étroit (v. p. 462).

(4) Ce n'est pas tout à fait ainsi que l'on procède ordinairement : pour plus de commodité, on emploie des lentilles plan-convexes qui permettent d'obtenir sensiblement le même résultat, comme l'a montré Lister (voir Verdet, *Œuvres* publiées par ses élèves, IV, 951).

ouverture énorme un aplanétisme presque parfait. Les premières lentilles étant forcément simples, on corrige les aberrations chromatiques par la dernière lentille que l'on compose de plusieurs verres choisis à cet effet. Un diaphragme, intercalé ordinairement après la dernière lentille, limite exactement la surface utile de l'objectif.

L'objet à examiner est habituellement posé sur une lame de verre et recouvert par une lamelle également en verre. La lumière doit donc passer de l'objet (supposé sec) dans l'air, puis dans la lamelle de verre, puis dans une couche d'air avant de rencontrer le front de l'objectif. Ces passages successifs occasionnent des pertes de lumière très grandes pour les rayons très inclinés. En outre, les seuls rayons qui concourent à l'éclairement sont ceux qui traversent la lame, puis la lamelle sous une incidence inférieure à 42° (angle limite pour le verre au contact de l'air). On évite ces inconvénients avec les *objectifs à immersion,* imaginés par Amici. Une goutte d'eau glissée entre la lamelle et la lentille frontale atténue déjà beaucoup le mal : c'est un remède facile à employer et qui est tout indiqué dans le cas où l'objet est déjà lui-même dans l'eau sous la lamelle [1]. Tandis qu'il fallait tout à l'heure un objectif à sec de 180° d'ouverture angulaire pour recueillir les rayons contenus dans un cône d'angle au sommet de 84°, un objectif à eau de 97° est capable de recevoir tous ces rayons, 48° 1/2 étant dans l'eau l'angle correspondant à 42° dans le verre [2].

D'autre part, l'introduction d'un liquide en avant de l'objectif augmente la distance focale antérieure, de sorte que la distance frontale se trouve accrue, ce qui est très utile. Pour une même distance frontale, on pourra avoir un foyer beaucoup plus court : il sera donc possible d'atteindre des grossissements que l'on ne saurait obtenir avec des objectifs à sec.

[1] Les objectifs à sec ou à eau, étant affectés dans leurs effets par la lamelle, sont établis pour une épaisseur déterminée de celle-ci (et aussi pour une certaine longueur du tube de l'instrument). Si l'on change ces conditions, il faut modifier l'objectif : de là l'emploi d'*objectifs à correction*, qui permettent de déplacer les lentilles intérieures par rapport à la lentille frontale.

[2] Un objectif à eau de 180° recevrait tous les rayons ayant traversé la lame à l'intérieur d'un cône de 126° (l'angle limite au passage du verre dans l'eau est de 63°).

La combinaison la plus avantageuse, due à Hartnack (1850), est l'*objectif à immersion homogène*, réuni à la lentille par une goutte d'huile de même indice que le verre. Si alors l'objet est semblablement noyé dans le baume [1], les rayons lumineux arrivant à l'objet à travers la lame poursuivent leur chemin en ligne droite jusqu'à la deuxième face de la lentille frontale [2]. Par conséquent, un objectif à immersion homogène de 84° recueille autant de lumière qu'un objectif à sec de 180° [3].

Ces objectifs ont même *ouverture numérique* (égale à 1), l'ouverture numérique a étant définie le rapport du rayon effectif de la dernière lentille à la distance focale principale [4].

Le pouvoir séparateur est proportionnel à l'ouverture numérique : l'étude de la diffraction montre que la distance minima de deux points que sépare l'objectif est

$$\delta = \frac{\lambda}{2a},$$

[1] Si l'objet était monté à sec, la lamelle étant devenue de fait partie intégrante de la lentille frontale, on aurait en réalité un objectif à sec, mais où la petitesse de la distance frontale ne serait plus une gêne.

[2] La première face peut alors être quelconque : dans la pratique, ce sera sensiblement un plan diamétral.

[3] En général un objectif à immersion homogène, d'ouverture angulaire 2α, recevra tous les rayons arrivant à la lame dans tous les sens sous une incidence inférieure ou égale à α.

[4] D'après la formule (VI), qui, pour les grandes ouvertures, doit s'écrire

$$n_1 \mathrm{O} \sin \alpha_1 = n_e \mathrm{I} \sin \alpha_e,$$

l'ouverture numérique peut se représenter par

$$a = n_1 \sin \alpha_1.$$

Soient en effet ρ le rayon de l'objectif, p (toujours très peu différent de f) et p' les distances respectives de l'objet et de l'image, on a

$$\rho = p' \operatorname{tg} \alpha_e,$$

ou, l'angle α_e étant très petit,

$$\rho = p' \sin \alpha_e.$$

Par suite,

$$\frac{\rho}{f} = \frac{p'}{f} \sin \alpha_e = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{O}} \sin \alpha_e = \frac{n_1}{n_e} \sin \alpha_1,$$

ce qui donne la formule indiquée, n_e étant ici égal à 1.

Un objectif à immersion homogène avec une lamelle en crown ($n = 1{,}52$) a une ouverture numérique maxima égale à 1,52. Le maximum pour un objectif à eau est 1,33. (HELMHOLTZ, *Monatsber. d. k. preuss. Akad. d. Wissensch. z. Berlin*; 1873, p. 625. — ABBE, *Schultze's Arch. f. mik. Anat.*, IX, 413; 1873.)

il est possible d'obtenir un champ beaucoup plus grand en conservant la même puissance. Tel est le problème résolu par la combinaison indiquée plus haut, ainsi que nous allons le prouver.

Le rayon de la partie visible dans le plan focal de l'objectif est toujours

$$c = \frac{fR_1}{d},$$

f étant la distance focale de l'objectif, R_1 le rayon du premier verre de l'oculaire, et d la distance du deuxième point nodal de l'objectif à ce premier verre de l'oculaire.

Mais le rapport du rayon R_1 à la distance focale F_1, ou, en d'autres termes, la *raison d'ouverture* ω_1 de la lentille doit être regardée comme donnée (1). On peut donc écrire

$$c = \frac{f\omega_1 F_1}{d},$$

ω_1 étant une quantité pratiquement constante.

Cela posé, comparons l'oculaire négatif à un oculaire simple de même puissance P, le grossissement g de l'objectif restant identique (2).

Le grossissement g a pour mesure $\frac{l}{f}$, f étant la distance de l'objet au premier point nodal de l'objectif (distance que nous avons identifiée à la distance focale principale), et l la distance de l'image au deuxième point nodal. Mais cette distance diffère toujours peu de d (3). On a donc très sensiblement, dans tous les cas,

$$c = \frac{\omega_1}{g} F_1,$$

autrement dit, le rayon de la partie visible est proportionnel à la distance focale du premier verre de l'oculaire.

(1) Ordinairement voisine de $\frac{1}{6}$, elle varie un peu suivant les constructeurs, mais elle ne dépasse pas $\frac{1}{4}$.

(2) Par conséquent la puissance du microscope, qui est égale au produit gP du grossissement g de l'objectif par la puissance P de l'oculaire, est supposée invariable.

(3) Dans l'oculaire simple, $d = l + F$; dans l'oculaire d'Huygens, $d = l - \frac{1}{2}F_1$.

D'où ressort la comparaison suivante :

Oculaire simple (Képler) $c = \frac{w_1}{gP}$,

Oculaire négatif (Huygens) $c = 2\frac{w_1}{gP}$.

Pour une même puissance, l'oculaire d'Huygens découvre un champ linéaire double de celui que fait voir l'oculaire de Képler [1].

D'ailleurs, dans chaque espèce d'oculaire le produit du champ par la puissance est un nombre constant : on perd nécessairement d'un côté ce que l'on gagne de l'autre.

Avec l'oculaire d'Huygens, comme avec un oculaire simple, la place du diaphragme est au premier foyer F_2 du verre de l'œil.

L'anneau oculaire est toujours à très peu près au second foyer F' du système oculaire, les rayons qui arrivent sur ce système étant presque parallèles.

A l'époque où Huygens imagina son oculaire, on ne savait pas construire d'objectifs achromatiques. Il était donc important de corriger, au moyen de l'oculaire, les colorations provenant de

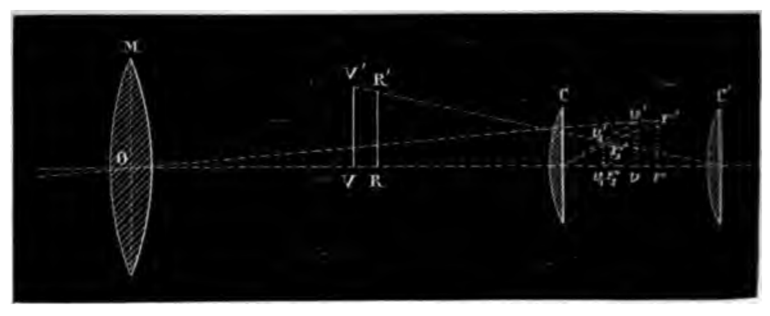


Fig. 406

l'objectif. Soient rr' et vv' les images rouge et violette données par l'objectif, images qui sont sensiblement comprises dans un même angle ayant son sommet au centre optique (ou plus exactement au deuxième point nodal) de l'objectif. Le verre de champ C transforme ces deux images en deux autres $r_1r'_1$ et $v_1v'_1$ qui.

(1) Le doublet de Wollaston donnerait au contraire un champ moindre

$$c = \frac{5}{6}\frac{w_1}{gP}.$$

vues à travers le verre de l'œil C', produiront à leur tour deux images RR' et VV'. Or on conçoit que les choses puissent être arrangées de telle sorte que ces deux images finales RR' et VV' soient vues sous un même angle. Les deux images rouge et violette et toutes les images intermédiaires se superposent alors pour former une image incolore [1].

Aujourd'hui on construit des objectifs achromatiques. L'oculaire doit donc être lui-même achromatique. Les proportions habituellement adoptées satisfont en effet à cette condition [2]; et on ne les

(1) La figure ci-contre suppose l'œil accolé à la lentille C'. En réalité, d'après ce que nous avons vu plus haut, l'œil sera à l'anneau oculaire, c'est-à-dire sensiblement au second foyer F' du système CC'. Ce sont donc les directions F'R' et F'V' qui devront coïncider.

(2) Voici en effet les considérations qui ont conduit aux règles pratiques admises dans la construction de l'oculaire négatif (fig. 403).

Un rayon venant du centre de la face terminale de l'objectif pour toucher le bord du verre A_1 va sensiblement passer, après réfraction dans le verre, au deuxième foyer F'_1. Si nous supposons que ce rayon touche aussi le bord du deuxième verre (condition à laquelle on devra satisfaire si l'on veut ne pas perdre de champ tout en atteignant la plus grande puissance possible), on aura $\frac{R_1}{f_1}=\frac{R_2}{A_2F'_1}$; mais, d'après la règle pratique indiquée plus haut, on doit avoir $\varpi_1=\varpi_2$, ou $\frac{R_1}{f_1}=\frac{R_2}{f_2}$; et par conséquent $A_2F'_1=f_2$: le foyer F'_2 du deuxième verre doit coïncider avec le foyer F'_1 du premier. L'écartement e des deux verres est donc lié à leurs distances focales par cette première relation

$$e=f_1-f_2. \qquad (1)$$

L'achromatisme fournira une seconde équation. Pour que la puissance du système $P=\frac{f_1+f_2-e}{f_1f_2}$ ne varie pas avec la couleur, il faut que la différentielle de P par rapport à l'indice soit nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{f_1df_2}{f_2}+\frac{f_2df_1}{f_1}=e\left(\frac{df_2}{f_2}+\frac{df_1}{f_1}\right).$$

Si l'on suppose maintenant que les deux lentilles ont le même indice n et la même forme, par exemple qu'elles sont toutes les deux plan-convexes, on a

$$\frac{df_1}{f_1}=-\frac{dn}{n-1}=\frac{df_2}{f_2};$$

et l'équation précédente devient

$$2e=f_1+f_2. \qquad (2)$$

Des deux équations (1) et (2) on tire

$$f_1=\frac{3e}{2}, \qquad \text{et} \qquad f_2=\frac{e}{2};$$

telles sont en effet les valeurs recommandées par Dollond.

L'oculaire de Ramsden se plaçant au delà de l'image réelle émanant de l'objectif, on aura la possibilité de disposer le diaphragme en dehors de l'oculaire. Cette adaptation, précieuse dans la lunette astronomique, n'a pas la même importance ici.

La figure 407 montre comment un oculaire positif permet de remédier au défaut d'achromatisme de l'objectif [1]. Mais, fonctionnant à la manière d'une loupe double, cet oculaire n'aplanirait pas le champ.

Corps. — L'objectif et l'oculaire sont montés aux deux extrémités d'un tube de longueur constante, ou plutôt le tirage de la portion qui porte l'oculaire est réglé d'avance en vue du grossis-

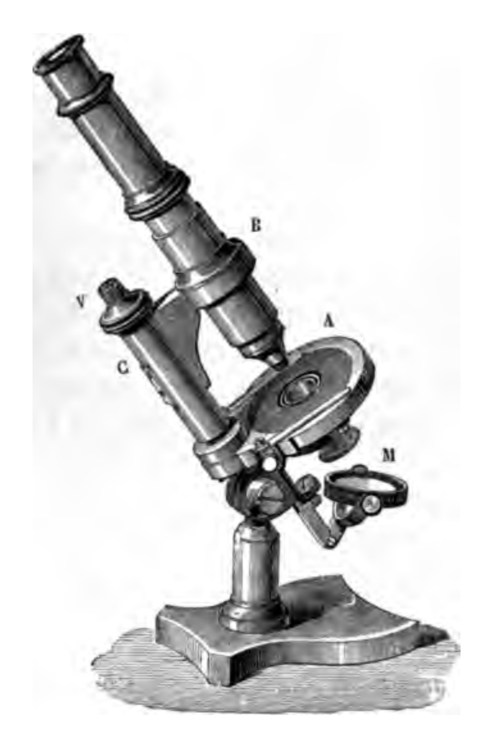


Fig. 408

sement que l'on veut obtenir. La préparation à examiner, placée sur la platine, est éclairée par transparence au moyen d'un

[1] Même remarque que pour la figure 406.

miroir disposé dans le pied de l'instrument. Quand on se sert d'un objectif de grande ouverture, il faut employer en outre un *condenseur* qui se fixe immédiatement sous la platine. La figure 409

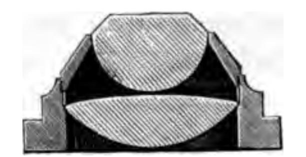


Fig. 409

représente un condenseur d'Abbe, pour objectif à immersion homogène.

Mise au point. — On effectue la mise au point en déplaçant le corps du microscope, tout entier, d'un mouvement rapide, puis d'un mouvement lent, de façon que l'image réelle formée par l'objectif (et le verre de champ) soit amenée au foyer du verre de l'œil (¹).

Perte apparente d'accommodation de l'œil regardant au microscope. — Quiconque regarde dans un microscope mis au point, est frappé de cette circonstance qu'un très faible déplacement de l'appareil suffit (surtout avec les forts grossissements) à faire disparaître complètement l'image. Il y a là une perte apparente d'accommodation dont on se rend compte sans difficulté : l'objet étant situé tout près du foyer d'un système très convergent, un déplacement extrêmement petit et qu'il serait facile de calculer, fait parcourir à l'image réelle le chemin minime compris entre les deux positions pour lesquelles l'image virtuelle est aux deux limites de la vision distincte, de sorte qu'en deçà et au delà tout devient confus et ne tarde pas à s'effacer entièrement.

Instrument pour la photographie. — En tirant suffisamment l'oculaire, on obtiendra sur un écran une image réelle. Il est donc aisé de combiner un dispositif permettant de prendre des photographies très amplifiées d'objets microscopiques.

Mesure de la puissance. — La puissance d'un microscope étant égale au produit du grossissement de l'objectif par la

(¹) Nous savons la signification de ce langage abrégé.

puissance de l'oculaire, la détermination numérique de ces deux facteurs suffit évidemment pour définir la valeur du produit.

Afin d'évaluer le grossissement de l'objectif, on place sur la platine de l'instrument un micromètre objectif, c'est-à-dire un micromètre sur verre, qui présente ordinairement 1 millimètre divisé en 100 parties égales; on met au point comme d'habitude. Si l'oculaire est négatif, on l'enlève, on le remplace par un oculaire positif muni en son foyer d'un micromètre oculaire sur lequel seront inscrites, par exemple, 50 divisions valant chacune $\frac{1}{10}$ de millimètre; et, sans toucher au corps de l'appareil, on amène cet oculaire en position telle que son micromètre soit dans le plan de l'image réelle donnée par l'objectif. On voit alors quel nombre n de divisions du micromètre oculaire couvre 1 division grossie du micromètre objectif : le grossissement de l'objectif est $g = 10n$.

La puissance de l'oculaire, qui n'est autre chose que l'inverse de sa distance focale, s'appréciera très exactement par la méthode de M. Cornu (429) [1].

Au lieu d'opérer de la manière précédente, on peut aussi, en considérant le verre de champ comme partie de l'objectif, mesurer : 1° le grossissement du système, objectif et verre de champ, à l'aide du micromètre objectif et d'un micromètre oculaire logé à l'intérieur de l'oculaire négatif à la place du diaphragme [2]; 2° la puissance du verre de l'œil.

Non seulement ce procédé fournit un contrôle du premier, mais il comporte une détermination (la première) qui fait connaître ensuite la grandeur d'un objet d'après le nombre de divisions occupées par celui-ci sur le micromètre oculaire. Si, par exemple, 2 divisions du micromètre objectif valaient, grossies, 5 divisions du micromètre oculaire, 1 division du micromètre oculaire repré-

[1] Cette méthode, s'appliquant à un système optique quelconque, permettrait d'obtenir d'un seul coup la puissance du microscope en bloc; mais, comme dans la pratique on combine de diverses manières les objectifs et les oculaires dont on dispose, il vaut mieux déterminer à part la valeur de chacun.

[2] Le tube qui porte les deux verres doit être agencé de façon à rendre possible l'introduction de ce micromètre : le procédé le plus simple consiste à le former de deux portions réunies par un pas de vis, pour que l'on puisse mettre le micromètre exactement en place par rapport au verre de l'œil.

senterait $\frac{2}{5.100} = 4$ microns; un objet couvrant, grossi, 3 divisions du micromètre oculaire, aurait donc une grandeur de 12 microns.

Dans les laboratoires de recherches microscopiques on préfère, en général, mesurer, à l'aide de la chambre claire, le grossissement correspondant à chaque combinaison d'oculaire et d'objectif.

Chambre claire. — On appelle chambre claire tout appareil permettant de voir à la fois un objet (ou une image de l'objet formée par un instrument d'optique) et une feuille de papier mise à la distance convenable pour dessiner, de façon que, l'image paraissant se projeter sur le papier, on n'aura qu'à en suivre les contours avec un crayon pour obtenir un dessin exact.

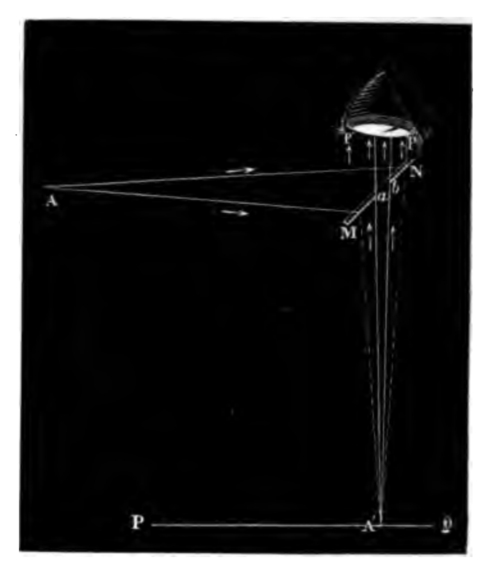


Fig. 410

Ainsi une glace MN, dont le tain a été enlevé sur une petite portion *ab*, renvoie à l'œil, par la partie étamée, les rayons émanant d'un objet A et en donne une image virtuelle A', tandis qu'elle laisse voir, au travers de la partie *ab*, la pointe d'un crayon placée au même point A' sur le papier PQ (une lentille convenable, disposée sur le trajet de l'un des faisceaux lumineux, ramenant à la même distance de l'œil l'image du point A et la pointe du crayon). Mais cet appareil, très simple, exige que l'observateur tourne le dos à l'objet

ur en avoir une image droite. La chambre claire de Wollaston ɔprime cet inconvénient : le point A, rapproché en *a* par la

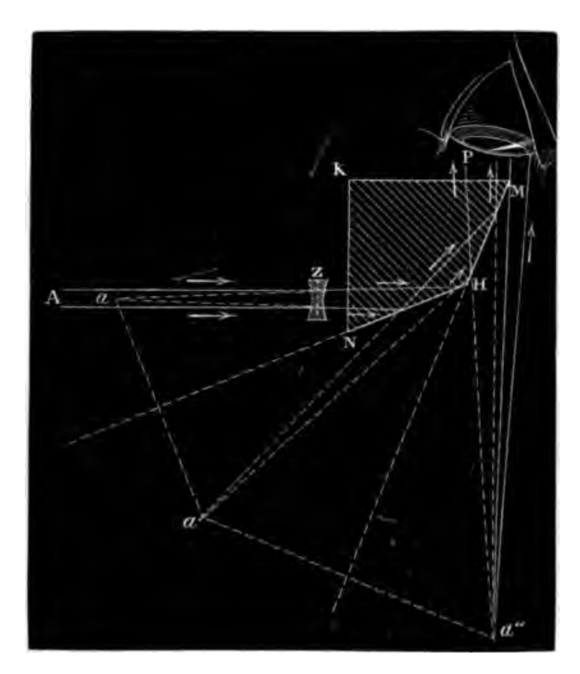


Fig. 411

ıtille divergente Z [1], est vu en *a″* au moyen des rayons réfléchis



Fig. 412

:cessivement par les deux faces NH et HM et pénétrant dans la

(¹) M. Laussedat remplace cette lentille par une entaille sphérique sur la ɜ KM, de sorte que le prisme KNHM agit comme une lentille plan-concave.

pupille à côté des rayons qui viennent directement de la pointe de crayon a'.

Les figures 412 et 413 représentent deux modèles de chambre claire pour microscope, qui sont dus l'un à Nachet, l'autre à Abbe, et qui se comprennent d'eux-mêmes.

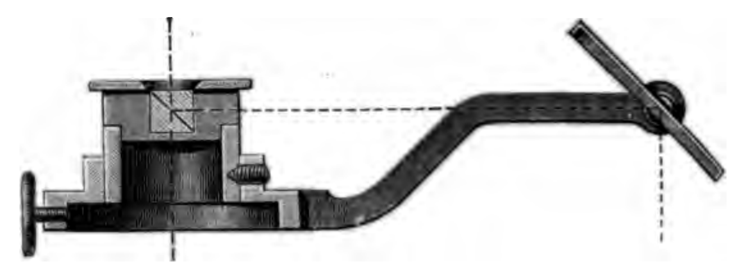


Fig. 413

Si l'on installe sur le microscope une de ces chambres et que l'on regarde simultanément, à travers le microscope, un micromètre objectif et, en dehors, un crayon destiné à noter sur le papier les traits suivant lesquels se projettent les divisions du micromètre [1], il suffira de mesurer ensuite l'intervalle de ces traits pour en déduire le grossissement du microscope dans les conditions de l'expérience, c'est-à-dire l'œil étant placé comme il l'était avec la chambre claire et étant accommodé pour la distance à laquelle on a mis le papier. Après avoir fait à la chambre claire le dessin d'une préparation, on pourra ainsi, en substituant le micromètre à la préparation, marquer sur le dessin même l'échelle à laquelle il a été tracé. Mais on n'en déduira qu'imparfaitement la puissance du microscope [2].

(1) La chambre claire n'est pas indispensable : on superpose aisément l'image dans le microscope reçue par un œil et le crayon en dehors vu par l'autre.

(2) Le procédé s'appliquerait au contraire très bien à la mesure de la puissance P d'un oculaire convergent (l'oculaire négatif devrait être retourné, le verre de champ du côté de l'œil). On viserait, à la chambre claire, directement un collimateur portant en son foyer une échelle en millimètres et, à travers l'oculaire, un micromètre oculaire au $\frac{1}{10}$ de millimètre. L'œil adapté pour voir l'échelle à l'infini percevrait nettement le micromètre quand celui-ci serait exactement au foyer de l'oculaire et constaterait que m divisions du micromètre couvrent n divisions de l'échelle. Les m divisions du micromètre étant vues à travers l'oculaire sous l'angle $\frac{m}{10F} = \frac{mP}{10}$, et les rayons qui viennent du

Détermination du pouvoir séparateur. — Dans les meilleurs instruments actuels, le pouvoir séparateur atteint 1/4 de micron, ce qui est bien près de la limite théorique établie plus haut.

C'est en général par l'examen de *test-objets* et particulièrement des diatomées suivantes : *pleurosigma angulatum*, *surirella gemma*, *amphipleura pellucida*, que l'on juge de la valeur pratique d'un microscope.

446. Lunette astronomique. — *Principe.* — La lunette astronomique se compose, comme le microscope, d'un objectif convergent et d'un oculaire convergent. Mais si les moyens employés sont essentiellement les mêmes, l'application en est bien différente,

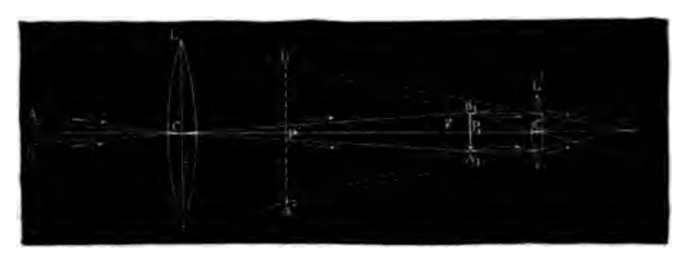


Fig. 414

l'objet se trouvant ici à une distance extrêmement grande, pratiquement infinie [1]. Par conséquent, l'objectif donne en son foyer une image réelle, renversée, très petite, que l'on examine au moyen de l'oculaire, situé de manière que son premier foyer coïncide sensiblement avec le deuxième foyer de l'objectif. La longueur de l'appareil est donc à très peu près $F+f$, F étant la longueur focale principale de l'objectif et f celle de l'oculaire.

collimateur de longueur focale φ comprenant entre eux un angle $\frac{n}{\varphi}$, on aurait très exactement

$$\frac{m\text{P}}{10}=\frac{n}{\varphi},$$

d'où P (Voir Pellat, *loc. cit.*, p. 593).

(1) Entre le microscope et la lunette astronomique, on a tous les intermédiaires. Tels sont les *viseurs* employés dans les laboratoires de physique pour observer à quelques mètres ou même quelques centimètres de distance : dans ces appareils la raison d'ouverture de l'objectif est d'environ $\frac{1}{10}$.

C'est d'ailleurs nécessairement l'oculaire qui sert à effectuer la mise au point, laquelle présente les mêmes circonstances que dans le microscope : une vue courte exige que l'oculaire soit plus enfoncé ; l'accommodation paraît supprimée dès que la puissance est un peu grande.

Grossissement. — Les dimensions linéaires de l'image et de l'objet ne sauraient évidemment entrer ici en ligne de compte ; les dimensions angulaires sont seules à considérer. En d'autres termes, c'est le grossissement pour un œil visant à l'infini et non la puissance qui caractérise l'instrument (1).

On voit immédiatement sur la figure que le grossissement G, c'est-à-dire le rapport des angles A'F'B' et ACB est égal au rapport des angles $A_1C'B_1$ et A_1CB_1, puisque les rayons F'A', F'B' sont parallèles aux axes secondaires $C'A_1$, $C'B_1$ (l'image A'B' est à l'infini) ; comme les angles sont toujours très petits, on a donc

$$G = \frac{F}{f}.$$

Pour les vues ordinaires, le grossissement diffère toujours très peu de cette valeur théorique (il est un peu plus grand pour les myopes, un peu plus faible pour les hypermétropes) (2).

Champ. — Nous ne répéterons pas ce que nous avons dit plus haut sur le champ, le diaphragme, l'anneau oculaire, la clarté, dans une lunette schématiquement réduite à deux lentilles convergentes.

Anneau oculaire. — Remarquons seulement que, par suite de la position de l'oculaire relativement à l'objectif, la distance d de l'anneau oculaire au deuxième point nodal de l'oculaire est donnée par la relation

$$\frac{1}{F+f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f},$$

ou

$$\frac{F+f}{d} = \frac{F}{f}.$$

(1) La puissance de la lunette astronomique appliquée à une étoile est toujours nulle.

(2) Dans tous les cas le grossissement est égal à $\frac{F}{\varphi}$, φ étant la distance entre l'image réelle et l'oculaire.

Or $\frac{F+f}{d}$ est le rapport du rayon R de l'objectif à celui a de l'anneau oculaire ; $\frac{F}{f}$ est le grossissement. Donc le rapport des rayons (ou des diamètres) de l'objectif et de l'anneau oculaire est égal au grossissement.

D'ailleurs la distance d est encore très sensiblement égale à f, et l'anneau oculaire, beaucoup plus petit que la surface utile de l'oculaire, est habituellement plus petit que la pupille dont le rayon dans les observations de nuit peut être évalué à 4 millimètres.

Clarté. — Le rapport des grandeurs de l'anneau oculaire et de la pupille a la même influence que dans le microscope relativement à la clarté des objets de diamètre apparent sensible (soleil, lune, planètes) : si le rayon a de l'anneau oculaire est inférieur à celui p de la pupille, la clarté est moindre que 1 ; si a est égal ou supérieur à p, elle est égale à 1 [1].

[1] La raison peut en être donnée sous la forme suivante :

La quantité de lumière que l'œil reçoit de l'objet vu à travers la lunette est à celle qu'il reçoit directement du même objet (situé à la même distance) comme

$$\frac{R^2}{p^2},$$

si toute la lumière tombant sur l'objectif pénètre dans l'œil, c'est-à-dire si a est inférieur ou égal à p.

Mais si a est plus grand que p, la lumière venant à travers la lunette est arrêtée en partie par l'iris, la section du faisceau incident est réduite dans le rapport de p^2 à a^2 ; le rapport des quantités de lumière reçues par l'œil à travers la lunette ou directement est

$$\frac{R^2}{a^2}.$$

Dans tous les cas d'ailleurs, ces quantités de lumière éclairent des images rétiniennes qui sont dans le rapport

$$\frac{R^2}{a^2}$$

exprimant, on vient de le voir, le carré G^2 du grossissement.

Donc, dans le cas des forts grossissements, $a < p$, la clarté est

$$\frac{R^2}{p^2} : \frac{R^2}{a^2} = \frac{a^2}{p^2} < 1 ;$$

dans le cas des faibles grossissements, $a > p$, elle est

$$\frac{R^2}{a^2} : \frac{R^2}{a^2} = 1.$$

longueur d'onde et en raison inverse du diamètre de l'objectif. Sous ce rapport, le bénéfice est encore le même que si le diamètre de la pupille devenait égal à celui de l'objectif [1].

Pourvu que l'œil, armé de l'oculaire, puisse distinguer les points correspondants de l'image objective (et c'est ce qui aura toujours lieu si le grossissement est suffisant) [2], ce pouvoir séparateur de l'objectif exprime en même temps le pouvoir séparateur de la lunette.

Nous savons qu'un objectif de 12 centimètres sépare les deux composantes d'une étoile double ne sous-tendant que 1″. On dit qu'un tel objectif *dédouble* la seconde, ou que son *pouvoir séparateur* est de 1″, ou encore que son *pouvoir optique* est 200 000, la valeur de l'arc de 1″ différant peu de $\frac{1}{200\,000}$. Un objectif de $1^m,20$ d'ouverture [3] permettrait de distinguer à la surface de la lune deux points distants de moins de 200 mètres.

Détails sur la construction. — Nous étudierons maintenant la lunette telle qu'on la construit réellement.

Objectif. — L'objectif est constitué par une lentille aplanétique et achromatique, formée habituellement d'un crown convergent, (à l'extérieur) et d'un flint divergent (à l'intérieur). Les aberrations

(1) Voir Mascart, *loc. cit.*, p. 132.

(2) L'angle sous lequel deux taches tangentes sont vues du centre optique de l'objectif étant $\frac{12''}{D}$ (où D est le diamètre de l'objectif en centimètres), l'angle sous lequel elles sont vues de l'oculaire est $\frac{12''}{D}\cdot\frac{F}{f}$. Pour que ces deux taches soient distinctes à l'œil, il suffit que cet angle soit supérieur à 1′, ou que l'on ait

$$\frac{12}{D}\frac{F}{f} > 60,$$

c'est-à-dire

$$f < \frac{F}{5D},$$

ou

$$f < \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{W}.$$

Si $W = \frac{1}{30}$, un oculaire de distance focale égale à 1 centimètre serait 6 fois plus puissant qu'il n'est nécessaire.

(3) Un semblable objectif aurait un pouvoir séparateur égal à 0″,1, ou à $\frac{1}{600}$ de ce que distingue l'œil normal. La lunette astronomique et le microscope atteignent sensiblement la même limite.

seront corrigées avec le plus grand soin (¹), si l'observation doit se faire avec l'œil muni d'un oculaire puissant (²).

Oculaire. **— L'oculaire positif est de fait le seul employé dans la lunette astronomique.**

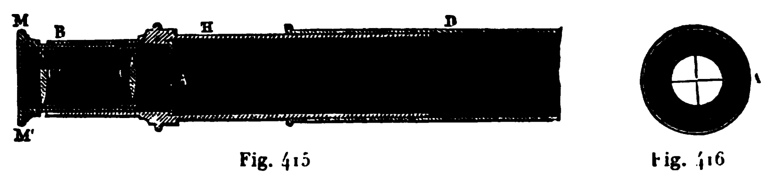


Fig. 415 Fig. 416

Il permet en effet d'installer dans le plan focal de l'objectif, là précisément où apparaît l'image de l'astre, un *réticule*, c'est-à-dire un système de fils croisés A que l'on pourra voir à travers l'oculaire CC′ en même temps que cette image et qui sera un repère extrêmement précieux. Sous sa forme la plus simple, le réticule se compose de deux fils fins croisés à angle droit. On appelle *axe optique* de la lunette la ligne qui joint la croisée des fils du réticule au centre optique de l'objectif (plus exactement, la parallèle menée par le premier point nodal de l'objectif à la ligne qui joint le deuxième point nodal à la croisée des fils du réticule). Cette direction, indépendante des déplacements de l'oculaire, déplacements inévitables pour la mise au point, est parfaitement déterminée : ce sera la ligne de visée.

(¹) Pour les quatre conditions que l'on peut s'imposer, on adopte alors :
Distance focale donnée,
Achromatisme des rayons centraux,
Aplanétisme pour des rayons parallèles,
Aplanétisme pour des rayons venant d'une distance finie déterminée.

Ainsi que l'a montré Herschell, cette quatrième condition est la plus avantageuse; en outre, si les verres sont convenablement choisis, elle peut se concilier avec l'égalité de courbure des faces en contact, préconisée par Clairaut et assurément commode.

L'aplanétisme est en effet la qualité essentielle d'un bon objectif; un léger défaut d'achromatisme peut se corriger au moyen de l'oculaire, comme dans le microscope.

Dans ses objectifs, Fraunhofer prenait pour raison d'ouverture $\frac{1}{30}$, et l'on n'a pas beaucoup changé ce nombre. Les grandes ouvertures (on construit aujourd'hui des objectifs de 1ᵐ de diamètre) correspondent donc à des distances focales énormes.

(²) Quand l'image doit être photographiée (les plaques sensibles étant à grain assez grossier), il n'y a pas intérêt à pousser aussi loin la netteté; et l'on peut se donner un champ plus étendu, autrement dit un foyer plus court : alors l'accroissement d'ouverture servira surtout à abréger le temps de pose.

Considérons par conséquent un oculaire positif de Ramsden.

Le champ de pleine lumière est limité par le cône tangent intérieurement à l'objectif et au premier verre de l'oculaire. Si donc nous appelons R le rayon et F la distance focale de l'objectif, r_1 le rayon de la première lentille de l'oculaire et d la distance du deuxième foyer de l'objectif, ou du premier foyer de l'oculaire, à cette lentille $\left(\text{dans l'oculaire de Ramsden, } d=\frac{1}{4}f_1=\frac{1}{3}f\right)$, le rayon ρ du cercle découpé par ce cône dans le plan focal de l'objectif a pour expression

$$\rho=\frac{r_1 F - Rd}{F+d};$$

et, comme c'est dans ce plan que se placera le diaphragme portant le réticule, on donnera à l'ouverture du diaphragme précisément ce rayon ρ.

Le champ de pleine lumière (champ angulaire 2C) est donc défini par la relation

$$tg\,C=\frac{\rho}{F}=\frac{r_1-\frac{R}{F}d}{F+d}.$$

Ce champ est très restreint (une fraction de degré) dans les grandes lunettes.

Le champ extrême, beaucoup moins intéressant à considérer [1], est limité par le cône circonscrit extérieurement aux deux mêmes verres.

Dans le cas de l'oculaire négatif, ou d'Huygens, le rôle des deux cônes circonscrits extérieurement et intérieurement est renversé. C'est le cône extérieur qui limite le champ de pleine lumière. On a donc $\left(d=\frac{1}{2}f_1=f\right)$

$$tg\,C=\frac{r_1-\frac{R}{F}d}{F-d}.$$

[1] Parfois cependant, à cause de la petitesse de C, on laisse à la lunette tout le champ disponible.

Avec l'oculaire simple ou de Képler ($d=f$), on aurait évidemment

$$tg\, C = \frac{r - \frac{R}{F} f}{F+f}.$$

Donc, pour un même grossissement G de la lunette et pour une même raison d'ouverture W de l'objectif $\left(\text{environ } \frac{1}{30}\right)$ et une même raison d'ouverture w des verres de l'oculaire $\left(\text{environ } \frac{1}{6}\right)$, les valeurs respectives du champ, avec les trois formes d'oculaires, sont :

Oculaire de Képler	$\frac{w - W}{G+1}$,	c.-à-d. approx.	$\frac{w}{G}$
Oculaire de Ramsden	$\frac{\frac{4}{3}w - \frac{1}{3}W}{G+\frac{1}{3}}$,	»	$\frac{4}{3}\frac{w}{G}$
Oculaire d'Huygens	$\frac{2w - W}{G-1}$,	»	$2\frac{w}{G}$

Le champ étant toujours très restreint dans une lunette puissante, l'instrument est muni d'un *chercheur*, petite lunette peu grossissante et de champ assez étendu, au moyen de laquelle on cherche l'astre à étudier : comme les deux lunettes sont montées parallèlement l'une à l'autre, il est facile d'amener la grande lunette dans la direction voulue.

Oculaire terrestre. Longue-vue. — Outre les oculaires astronomiques, on doit aussi considérer les oculaires terrestres. Le renversement de l'image, qui importe peu dans l'observation des astres, ne saurait être indifférent lorsqu'on observe des objets terrestres. Pour se servir de la lunette astronomique en guise de longue-vue, il faut donc y ajouter un dispositif propre à redresser l'image A_1B_1 fournie par l'objectif. On emploie généralement à cet effet, d'après Schyrl de Rheita, un système de deux lentilles, dit *véhicule*, dont la figure 418 fait suffisamment comprendre le rôle. La première lentille C_1, située à une distance de A_1B_1 moindre que sa distance focale principale f_1, lui substitue une image virtuelle, agrandie et encore renversée, A_2B_2, qui vient se placer

à une distance $2f_2$ de la deuxième lentille C_2 : celle-ci donne donc de l'autre côté, à la même distance $2f_2$, une image de même grandeur A_3B_3, réelle et redressée. C'est cette image que l'on regarde



Fig. 417

avec un oculaire ordinaire. La figure représente un oculaire simple C′; dans le fait, ce sera toujours un oculaire négatif : l'oculaire terrestre se compose ainsi de quatre lentilles montées

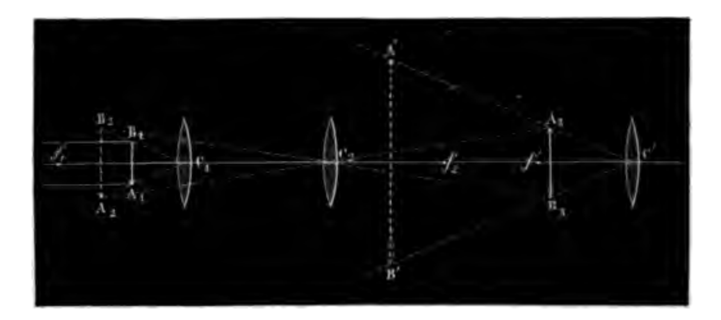


Fig. 418

dans un même tube. La première lentille C_1 projette un peu au delà de son deuxième foyer une image réelle de l'objectif par laquelle vont passer tous les rayons qui ont traversé la lentille : on encadre cette image à l'aide d'un diaphragme qui est percé d'un trou convenable et que suit de près la lentille C_2. Un deuxième dia-

laire, et de diviser ensuite ce rayon c par la longueur focale F. La valeur de c que nous avons établie pour un microscope à oculaire d'Huygens

$$c = \frac{2\omega_1}{g_P} = \frac{2\omega_1}{f},$$

est manifestement trop petite ici, parce que la puissance g_P étant faible, on ne peut pas négliger au dénominateur le terme négatif, insensible dans les conditions ordinaires. Le champ sera ainsi notablement supérieur à l'angle 2C qui serait défini par l'équation

$$tg\, C = \frac{2\omega}{G}.$$

De tous les oculaires que nous avons passés en revue, c'est donc l'oculaire terrestre qui, pour un même grossissement, donne le champ le plus vaste. Mais il est trop difficile à bien construire et absorbe trop de lumière pour convenir en astronomie.

Mesure du grossissement. — Galilée mesurait le grossissement en regardant d'un œil à travers la lunette, de l'autre directement



Fig. 419

une échelle divisée mise à grande distance, et en constatant combien de divisions vues directement étaient contenues dans une division grossie par la lunette.

Il est généralement plus commode d'employer pour cette expérience une chambre claire : la figure ci-contre montre la disposition imaginée à cet effet par Pouillet.

On peut aussi évaluer indirectement le grossissement d'une lunette astronomique en mesurant sur la lunette réglée à l'infini le

Instrument pour la photographie. — En tirant suffisamment l'oculaire d'une lunette astronomique, on recueille sur un écran situé à quelque distance une image réelle et redressée de l'objet. Cette propriété, souvent mise à profit pour examiner les taches du soleil, peut être utilisée, comme dans le microscope, pour obtenir des photographies. Durant ces dernières années, l'étude photographique des astres a pris une importance considérable; et récemment les observatoires de tous les pays du globe se sont concertés pour dresser la carte du ciel.

447. Lunette de Galilée. — *Principe.* — La lunette de Galilée, dite aussi et à meilleur droit *lunette batave* ou *lunette hollandaise*, se compose d'un objectif convergent et d'un oculaire divergent, lequel est disposé de façon à remplacer l'image réelle, petite et renversée, que donnerait l'objectif, par une image virtuelle, agrandie et redressée. A cet effet, le foyer postérieur de la lentille divergente (son premier foyer) est placé un peu en deçà du point où se formerait l'image réelle due à l'objectif.

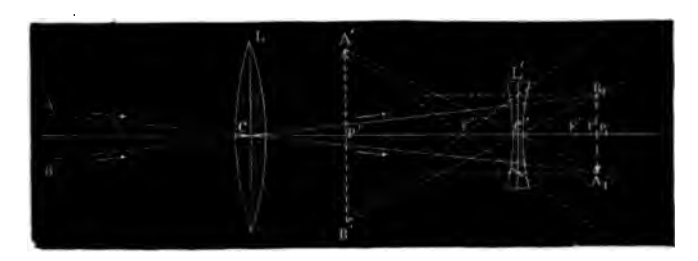


Fig. 421

Pour une vue normale visant à l'infini, le foyer postérieur de l'oculaire doit coïncider avec cette image, et comme celle-ci (même dans une lorgnette de spectacle) est toujours très sensiblement au deuxième foyer de l'objectif, le premier foyer de l'oculaire se confond alors avec le deuxième foyer de l'objectif. Si donc nous appelons F la distance focale principale de l'objectif, f celle de l'oculaire (prise en valeur absolue), la longueur de la lunette est $F-f$.

Pour un œil visant à une distance finie Δ, il faut enfoncer l'oculaire d'autant plus que la vue est plus courte : si, en effet, l'objet virtuel s'éloigne vers la droite de la lentille, l'image, qui marche

toujours dans le même sens que l'objet, avance vers la lentille qui est à sa droite [1].

Grossissement. — Soit O le centre de l'œil, le grossissement est

$$G = \frac{A'OB'}{ACB},$$

ou, si l'on remplace les angles par leurs tangentes,

$$G = \frac{A'B'}{\Delta} : \frac{A_1B_1}{F} = \frac{A'B'}{A_1B_1} \cdot \frac{F}{\Delta}.$$

Mais

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{P'C'}{P_1C'}.$$

Or, on a

$$-\frac{1}{P_1C'} - \frac{1}{P'C'} = -\frac{1}{f},$$

d'où

$$\frac{P'C'}{P_1C'} = \frac{P'C'}{f} - 1 = \frac{\Delta - (f - \varepsilon)}{f} - 1,$$

$(f - \varepsilon)$ exprimant la distance du centre de l'œil à l'oculaire.

Donc

$$G = \left(\frac{\Delta - (f - \varepsilon)}{f} - 1\right)\frac{F}{\Delta}$$
$$= \frac{F}{f}\left(1 - \frac{f + (f - \varepsilon)}{\Delta}\right).$$

Pour une vue normale visant à l'infini, le grossissement, ainsi que dans la lunette astronomique, est

$$G = \frac{F}{f}.$$

Mais ici, au contraire, les myopes perdent beaucoup. Un myope, pour lequel $\Delta = 10$ centimètres, visant dans une lunette

(1) En enfonçant l'oculaire, on modifie le système total de sorte que son deuxième foyer (image d'un point à l'infini) soit précisément à la distance de la vision distincte.

de Galilée où $f = 3^{cm},5$, l'œil aussi près que possible de l'oculaire ($f - \epsilon = 1^{cm},5$), ne profite que de la moitié du grossissement normal.

Anneau oculaire. — L'anneau oculaire (image de l'objectif à travers l'oculaire) est virtuel : c'est un cercle, de rayon $a = \frac{R}{G}$ (¹), situé très sensiblement à la distance f en avant de l'oculaire, et par lequel passent tous les prolongements des rayons émergents. Par suite, l'œil placé derrière l'oculaire à une distance peu inférieure à f voit les images virtuelles que la lunette substitue aux objets comme à travers un trou qui serait en avant à moins de $2f$ (²).

Champ. — Supposons la lunette réglée pour un œil visant à l'infini : elle constitue alors un système afocal (428), d'où la lumière émerge en formant un faisceau cylindrique dont le diamètre (qui n'est autre que celui de la pupille, $2p$) est à celui du faisceau incident dans le rapport de f à F. Si donc nous prolongeons le faisceau émergent jusqu'à l'anneau oculaire, il découpe dans le plan de cet anneau un cercle égal à la pupille, lequel est l'image virtuelle d'un cercle de rayon Gp sur l'objectif. Le grossissement n'étant jamais très grand (4 ou 5 dans une lorgnette de théâtre, 15 à 20 dans une lunette marine, 30 à 50 dans les instruments destinés aux observations astronomiques), le cercle par lequel passent à travers l'objectif tous les rayons émanés du point P et arrivant à l'œil est toujours petit. Si l'on couvre ce cercle avec un écran, on supprime l'image du point P, sans modifier d'une façon appréciable l'éclat des points voisins. Ainsi, dans la lunette de Galilée, contrairement à ce qui a lieu dans la lunette astronomique, un écran masquant une partie de l'objectif réduit le champ sans altérer sensiblement la clarté de la portion qui reste visible.

Le champ dépend donc de l'ouverture de l'objectif. On peut le déterminer de la manière suivante (³).

Supposons le centre de la pupille sur l'axe de la lunette et considérons le cône ω tangent extérieurement à la pupille et à l'anneau oculaire. Ce cône ω renferme toutes les directions des rayons émer-

(¹) Le grossissement G est encore égal au rapport du diamètre $2R$ de l'objectif au diamètre $2a$ de l'anneau oculaire.

(²) LUBINOFF, *Pogg. Ann.*, XLVIII, 405; 1873.

(³) Voir BOHN, *Carl's Repertorium*, 97 ; 1873 ; et PELLAT, *loc. cit.*, p. 527.

gents qui correspondent au champ de pleine lumière. Par conséquent, les axes optiques des faisceaux sortant de l'oculaire sont compris dans un cône C′ de même angle, ayant son sommet au centre de l'oculaire; et les axes des faisceaux incidents se trouvent à l'intérieur d'un cône C ayant pour sommet le centre de l'objectif et pour base le cercle découpé par le cône C′ dans le plan focal commun aux deux verres. Or, ce cercle a pour rayon $f\,tg\omega$; et si $(f-\varepsilon)$ et f sont respectivement les distances de la pupille et de l'anneau oculaire à la lentille oculaire supposée infiniment mince, on a

$$tg\omega = \frac{a-p}{f+(f-\varepsilon)};$$

donc le cône C est défini par la relation

$$tg\,C = \frac{f}{F}\cdot\frac{a-p}{f+(f-\varepsilon)} = \frac{a-p}{G[f+(f-\varepsilon)]}.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, le champ sera d'autant plus vaste:

1° que $(f-\varepsilon)$ sera plus petit, c'est-à-dire l'œil plus rapproché de l'oculaire;

2° que f sera plus petit : toutefois les aberrations empêchent de descendre au-dessous de 3 à 4 centimètres ;

3° que G sera plus petit, d'après la règle générale.

Si l'on avait $a=p$, le champ de pleine lumière serait nul. Il faut donc que l'objectif ait un grand diamètre : on prend ordinairement 1/5 pour raison d'ouverture [1].

Avec $a=0^{cm},75$, $p=0^{cm},15$, $f=3^{cm},5$, $(f-\varepsilon)=1^{cm},5$ on aurait

$$tg\,C = \frac{1}{8G},$$

soit à peine le tiers du champ d'une lunette terrestre de même grossissement [2].

Clarté. — Quand la lumière vient d'une étoile, tous les rayons contenus dans le faisceau incident de rayon Gp entrant dans la pu-

[1] Puisque les rayons qui font voir un point à travers la lunette n'utilisent qu'une petite portion de l'objectif, celui-ci peut avoir une ouverture beaucoup plus grande que dans la lunette astronomique.

[2] Il est vrai qu'en déplaçant l'œil devant l'oculaire, sans toucher à la lunette,

pille donnent une image rétinienne dont l'éclairement est G^2 fois celui de l'image rétinienne de l'astre vu directement.

De même l'image rétinienne d'un objet, de diamètre apparent sensible, observé à travers la lunette reçoit une quantité de lumière G^2 fois plus grande que l'image rétinienne de l'objet regardé directement; mais cette lumière étant répartie sur une surface G^2 fois plus étendue, l'éclairement reste identique : la clarté est égale à 1.

Ainsi, au point de vue de la clarté, la lunette de Galilée se comporte théoriquement comme la lunette astronomique, dans le cas de $a > p$. Mais pratiquement elle lui est supérieure, la formation d'un foyer réel occasionnant toujours une perte très sensible de lumière [1]. A plus forte raison, est-elle beaucoup plus claire que la lunette terrestre avec toutes ses lentilles.

Détails de construction. — La construction de la lunette de Galilée est difficile. L'objectif et l'oculaire doivent être séparément

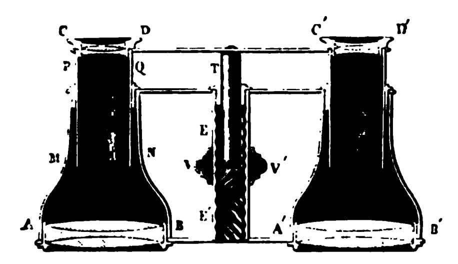


Fig. 422

aplanétiques et achromatiques. Dans les bonnes lunettes, ils se composent chacun d'un flint compris entre deux crowns; ce qui fait douze verres pour une *jumelle*. La figure ci-contre représente en coupe ce mode de lunette qui offre le grand avantage de permettre la vision binoculaire. On effectue aisément la mise au point en manœuvrant l'écrou EE' à l'aide de la molette VV' : l'écrou tournant sur lui-même fait monter ou descendre la vis *u* qui entraîne la tige T à laquelle sont attachés les deux oculaires.

Usages. — Par son peu de longueur et sa grande clarté, la lunette de Galilée convient parfaitement pour le spectacle et la cam-

on peut voir successivement différentes portions de l'espace, ce qui compense jusqu'à un certain point l'étroitesse du champ.

(1) BREWSTER, *Edinb. Encycloped.*, X; et *Phil. Trans.*, 1813-14.

pagne. Mais il est difficile d'atteindre de forts grossissements [1] sans aberrations; il est impossible d'adapter un réticule : elle se prête donc mal aux observations astronomiques, et cependant c'est avec cet instrument que Galilée a fait dans le ciel toutes ses admirables découvertes.

Loupe de Chevalier ou de Brücke. — On l'utilise au contraire très bien en guise de microscope, ainsi que Galilée lui-même l'avait reconnu. Chevalier en 1839, puis Brücke en 1851 rappelèrent l'attention sur cette application et la firent entrer dans la pratique. La loupe de Brücke comprend un oculaire de lorgnette et un objectif à court foyer mais à ouverture assez grande, formé de deux lentilles achromatiques plan-convexes opposées par leurs faces courbes [2]. Cet appareil, intermédiaire entre le microscope et la lunette, permet d'observer avec un grossissement quintuple ou décuple [3] les objets placés à plusieurs centimètres de l'objectif, ce qui est très commode pour la manipulation. Le grossissement [4] peut être exprimé par

$$G=[\Delta-(f-\varepsilon)]\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{f}+\frac{l}{F+f}\right),$$

et la distance de l'objet à l'objectif (plus exactement au premier plan principal de l'objectif) par

$$p=\frac{F}{1-\frac{F}{l+f}},$$

$(f-\varepsilon)$ étant la distance du centre de l'œil à l'oculaire et l la distance

[1] Le grossissement se mesure ainsi qu'il a été dit plus haut (446).

[2] Le système entier est géométriquement analogue à une loupe simple, plus puissante que l'objectif seul, mais dont les plans principaux seraient très écartés, le premier plan principal étant situé beaucoup en avant de l'objectif, le deuxième (avec le deuxième foyer) tombant entre l'objectif et l'oculaire, comme dans un doublet.

[3] Le tirage est assez long, de façon que l'on peut faire varier le grossissement dans des limites assez étendues.

[4] On trouve en effet immédiatement

$$G=\frac{\Delta-(f-\varepsilon)}{p'-l}\cdot\frac{p'}{p},$$

ou, p' différant très peu de $l+f$,

$$G=\frac{\Delta-(f-\varepsilon)}{f}\left(\frac{l+f}{F}-1\right),$$

ce qui est la valeur indiquée, à comparer avec celle qui se rapporte au doublet.

de l'objectif (plus exactement du deuxième plan principal de l'objectif) à l'oculaire.

Lunette retournée. — Tout le monde sait qu'en regardant par le gros bout d'une lorgnette on voit les objets rapetissés. Il est facile de s'expliquer ce phénomène. Un objet éloigné donne à travers la lentille L′ une image virtuelle située sensiblement au foyer F′ et qui est vue à travers la lentille L comme à travers une loupe. Le grossissement est donc pour un œil visant à l'infini

$$G = \frac{f}{F},$$

ou l'inverse du grossissement de la lunette employée normalement.

448. Télescopes. — *Principe.* — Un télescope (τῆλε loin, σκοπέω regarder) ne se distingue d'une lunette que par la substitution d'un miroir concave à la lentille servant d'objectif. Géométriquement, il y a équivalence entre les deux appareils. Physiquement, des différences existent qui ont fait choisir tantôt l'un, tantôt l'autre : si, en effet, un miroir est exempt d'aberration chromatique, il absorbe souvent une partie notable de la lumière. Selon le degré de perfection atteint par les fabricants, on a donc tour à tour préféré les miroirs ou les lentilles. D'ailleurs, les télescopes conviennent généralement mieux pour les observations et les lunettes pour les mesures.

Télescope de Newton. — L'image réelle produite par un miroir concave se formant du côté d'où vient la lumière, l'observateur ne pourrait pas l'examiner directement sans intercepter une partie des rayons incidents. Quand le miroir n'est pas très grand, il faut donc rejeter l'image latéralement. Le procédé le plus simple consiste, suivant l'exemple de Newton, à faire usage d'un petit miroir plan PQ, incliné à 45°, ou mieux d'un prisme à réflexion totale, qui renvoie l'image réelle $\alpha\beta$ (située au foyer) en $\alpha'\beta'$: on peut alors l'observer avec un oculaire placé en O et mobile dans un tube à tirage de façon à permettre la mise au point. Le grossissement pour un œil visant à l'infini est $\frac{F}{f}$ comme avec la lunette astronomique. L'anneau oculaire est l'image du miroir concave MM′ dans l'oculaire. Le champ est limité par le cône ayant pour sommet le centre du mi-

roir et pour base l'oculaire ramené sur l'axe dans une situation symétrique de celle qu'il occupe réellement par rapport au

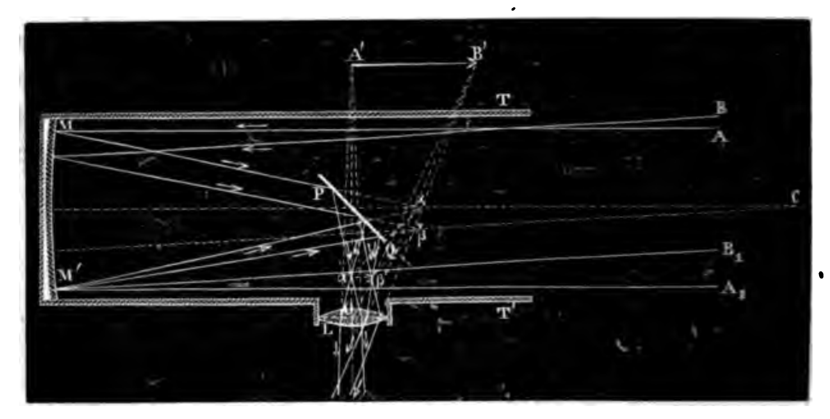


Fig. 423

miroir PQ. La clarté a, dans chaque cas, la valeur qu'elle aurait avec la lunette astronomique moins la perte résultant de la réflexion.

Télescope d'Herschell. — W. Herschell supprima le petit miroir

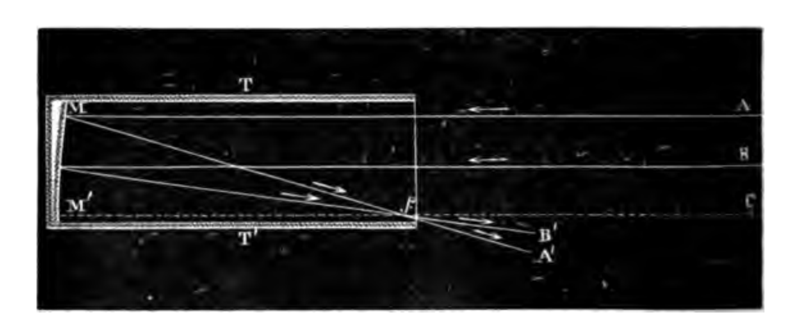


Fig. 424

plan PQ et inclina légèrement le miroir concave MM' (auquel il avait donné des dimensions considérables), de manière à amener le foyer f sur le bord du tube TT', où l'on venait l'observer.

Télescope de Gregory. — La combinaison peu avantageuse, indiquée par Gregory et figurée ci-contre, rappelle celle qu'avait imaginée Képler pour sa lunette terrestre (449), les deux premiers verres convergents étant remplacés par des miroirs concaves : l'image aérienne $\alpha\beta$, réfléchie par le grand miroir MM', tombe

entre le centre et le foyer du petit miroir NN' qui lui substitue une image $\alpha'\beta'$, réelle, amplifiée et redressée, en position convenable

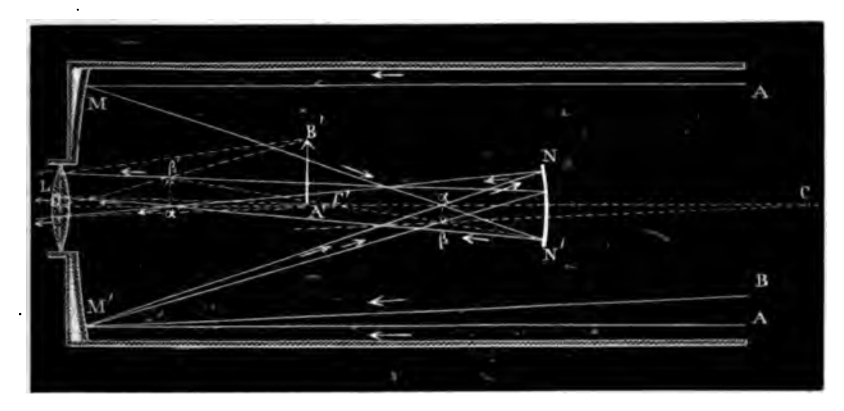


Fig. 425

pour être examinée par l'oculaire O; on met au point en déplaçant par une tige latérale le petit miroir NN'. Le grossissement est $\frac{F}{f}g$, g désignant le grossissement dû au miroir NN'.

Télescope de Cassegrain. — Le télescope de Cassegrain diffère de

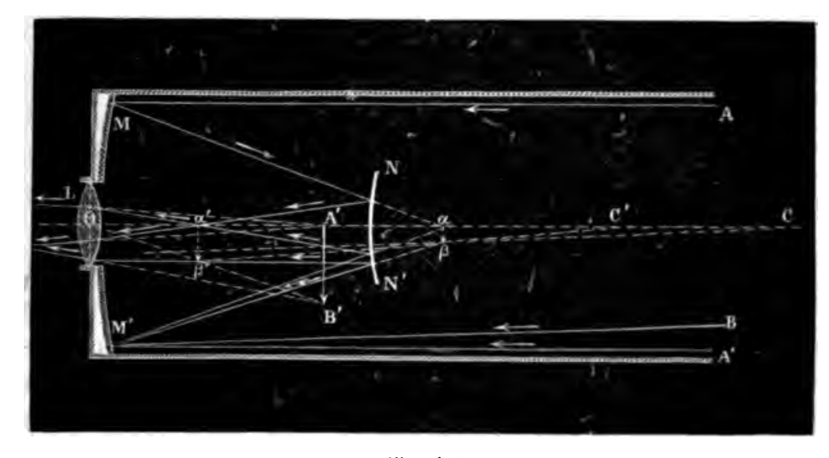


Fig. 426

celui de Gregory en ce que le petit miroir est convexe, système de beaucoup préférable parce qu'il réduit la longueur de l'appareil, détruit presque complètement les aberrations de sphéricité (les

courbures des deux miroirs agissant en sens inverse) et augmente la clarté par la suppression de l'image réelle au foyer du grand miroir. Le petit miroir NN′ est placé de façon que cette image $\alpha\beta$ tomberait entre sa surface et son foyer : elle joue alors le rôle d'un objet virtuel et donne en $\alpha'\beta'$ une image réelle, amplifiée et redressée. Le grossissement est encore $\frac{F}{f}g$.

Télescope de Foucault. — Nous avons dit 420) les perfectionne-

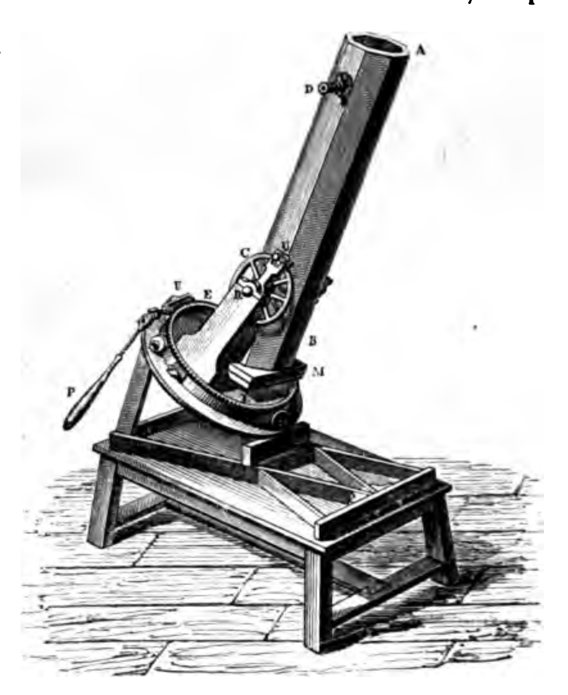


Fig. 427

ments remarquables apportés par Foucault à la construction des miroirs de télescope. La netteté et la clarté des images ([1]) obtenues avec ses miroirs paraboliques lui permirent de substituer à l'oculaire ordinaire, composé de deux verres, un oculaire bien plus puissant, à quatre verres, constituant un véritable oculaire terrestre très grossissant, qui fait de l'instrument de Foucault le meilleur télescope, à la fois astronomique et terrestre, et qui

([1]) L'argent a un pouvoir réflecteur très voisin de l'unité.

aboutit au même grossissement total avec des dimensions beaucoup moins encombrantes (1). La figure ci-jointe représente un petit appareil que Foucault avait construit pour lui-même. L'observatoire de Paris possède un grand télescope dont le miroir a $1^m,20$ de diamètre.

449. Histoire des instruments d'optique. — Les effets des lentilles sont très anciennement connus. Quatre cents ans avant J.-C., Aristophane (2) nous montre un débiteur qui se débarrasse d'un créancier en présentant au soleil la tablette enduite de cire sur laquelle est inscrit son compte et en faisant fondre la cire avec un de ces verres qui sont employés pour allumer le feu. Sénèque (3) dit que de petites lettres vues à travers une boule de verre pleine d'eau paraissent grossies. Du reste, les admirables pierres gravées de l'antiquité suffiraient pour attester l'usage de la loupe à ces époques reculées, quand même on n'en aurait pas retrouvé des spécimens parfaitement conservés (lentille de verre dans un très ancien tombeau romain, lentille plan-convexe en quartz dans les ruines de Ninive). Pline (4) rapporte que Néron (qui était myope) se servait d'une émeraude concave pour mieux voir les exercices du cirque. Mais on ne se rendait pas compte de ces faits. Aussi l'invention des besicles ne remonte-t-elle qu'au dernier tiers du treizième siècle (5).

Le microscope (6) fut un fruit prématuré des recherches qui

(1) Le grossissement total d'un télescope, comme d'une lunette, est Fp, p étant la puissance de l'oculaire. Si donc on augmente p, on pourra diminuer F sans changer le produit.

(2) Ἤδη παρὰ τοῖσι φαρμακοπώλαις τὴν λίθον
ταύτην ἑόρακας, τὴν καλήν, τὴν διαφανῆ,
ἀφ' ἧς τὸ πῦρ ἅπτουσι; Τὴν ὕαλον λέγεις;
Ἔγωγε. Φέρε,......................
ἀπωτέρω στὰς ὧδε πρὸς τὸν ἥλιον
τὰ γράμματ' ἐκτήξαιμι... Aristophane, *les Nuées*, 766 et seq.

(3) Literæ, quamvis minutæ et obscuræ, per vitream pilam aqua plenam majores clarioresque cernuntur. Sénèque, *Quest. nat.*, I, 6.

(4) Nero princeps gladiatorum pugnas spectabat in smaragdo. Pline, *Hist. nat.*, XXXVII, 5.

(5) On l'attribue ordinairement à Salvino degli Armati, noble florentin mort en 1317. (Voir Poggendorff, *Histoire de la physique* [traduction Bibart et de la Quesnerie], 54.)

(6) Sur l'histoire du microscope, consulter Harting, *Das Mikroskop*. Braunschweig; 1859 et édit. suiv.

conduisirent à la découverte de la longue-vue. D'après Pierre Borel, médecin de Louis XIII (1), on en serait redevable à un lunettier de Middelbourg, Zacharias Jansen, qui aurait établi vers 1590 le premier microscope composé. D'autre part, Galilée construisit de ses mains en 1612 un microscope composé qu'il envoya au roi de Pologne Sigismond. Ces appareils étaient sans doute fort imparfaits. Même après que Divini (vers 1660) y eut introduit plusieurs verres à l'objectif et à l'oculaire (il formait l'oculaire de deux verres plan-convexes se touchant par leurs convexités), c'étaient encore des instruments « monstrueux, aussi gros que la jambe d'un homme, avec des verres oculaires grands comme la paume de la main (2) ». Aussi usait-on encore plutôt du microscope simple, autrement dit de la loupe; et il est à remarquer que Leuwenhöck (3), à qui l'on doit de si belles découvertes microscopiques, fit toutes ses observations avec des loupes biconvexes qu'il façonnait lui-même et dont les plus puissantes, laissées par lui à la Société royale de Londres, ne comportent pas un grossissement supérieur à 160. Cependant Hooke (4) préférait employer un microscope composé qu'il s'était arrangé avec trois verres, le verre du milieu servant simplement à augmenter le champ et s'enlevant quand on voulait observer quelque partie en détail (5). Mais il fallut la réalisation de l'achromatisme et les progrès successifs effectués dans la fabrication et dans la taille des verres pour amener l'instrument au degré de perfection où nous le connaissons.

La première lunette pour voir de loin (6) paraît avoir été construite en 1608 par Hans Lippershey, lunettier à Middelbourg (7) :

(1) P. Borel, *De vero telescopii inventore*. Paris; 1655.

(2) Fischer, *Geschichte der Physik*, II, 98. Göttingen; 1801.

(3) Leuwenhoeck (surnommé l'oracle de Delphes, parce qu'il était né à Delft) a consigné ses découvertes dans une série de mémoires adressés à la Société royale de Londres (le premier est daté de 1673) et réunis depuis en quatre volumes qui parurent d'abord en hollandais, puis en latin à Leyde en 1724. Les *Arcana naturæ ope microscopiorum detecta* furent publiés en 1708.

(4) Hooke, *Micrographia, or philosophical description of minute bodies*. London; 1665.

(5) On reconnaît dans cette disposition l'oculaire négatif, imaginé dès 1656 par Huygens pour les longues-vues, et employé également vers la même époque à Rome, par Campani, le rival de Divini dans la construction des instruments d'optique.

(6) Voir Poggendorff, *loc. cit.*, p. 103.

(7) Borel en attribue l'invention à Zacharias Jansen, le même qui semble

elle était faite d'un objectif convexe et d'un oculaire concave, en cristal de roche. L'année suivante, Galilée ([1]) ayant entendu parler de la nouvelle invention, se mit à l'œuvre et fabriqua sur le même principe une lunette qui donnait des images très nettes bien que grossies environ 30 fois : elle lui permit de découvrir les satellites de Jupiter, les phases de Vénus et de Mars, les taches du Soleil, etc., etc.

Cependant pour l'observation du ciel cette lunette est très inférieure à celle de Képler ([2]) où l'oculaire consiste en une lentille convergente placée au delà de l'image fournie par l'objectif : cette image se produit alors réellement et peut être examinée en même temps qu'un réticule déterminant avec le centre optique de l'objectif une ligne de visée invariable. Toutefois Képler n'a pas indiqué cette propriété, si importante pour les mesures, surtout en physique. Il laissa même à d'autres le soin de construire l'appareil dont il avait posé le principe; et plusieurs années s'écoulèrent avant que le jésuite Scheiner établît une lunette astronomique d'après les idées de Képler. L'adjonction d'un réticule et l'adaptation de la lunette munie d'un réticule aux instruments de mesure sont d'une époque beaucoup plus récente ([3]).

Dans sa dioptrique, Képler constitue une lunette terrestre avec un oculaire comprenant deux lentilles convergentes dont la première a pour effet de remplacer l'image aérienne renversée provenant de l'objectif par une autre image aérienne redressée ([4]).

avoir découvert le microscope. Des combinaisons de lentilles avaient déjà été tentées avec succès en Italie. Un médecin de Vérone, Fracastoro (*Homocentricorum seu de stellis liber unus.* Venise; 1538) dit que l'on voit les objets plus grands et plus rapprochés à travers deux lentilles qu'à travers une seule. Le napolitain Porta, dans sa *Magie naturelle* (éd. de 1589), parle d'une combinaison de besicles convexes et concaves permettant de voir distinctement les objets rapprochés comme les objets éloignés.

([1]) Galilée, *Nuncius sidereus.* Venise ; 1610.

([2]) Kepler, *Dioptrice.* Augusta Vindelicorum (Augsbourg); 1611.

([3]) En 1634, Morin, professeur de mathématiques à Paris, remplaça sur un quadrant l'alidade par une lunette. En 1640-1641, l'anglais Gascoigne imagina le micromètre, dont les astronomes Auzout et Picard firent la première application importante en 1667, dans la mesure du degré entreprise par ordre de l'Académie.

([4]) Il y indique encore deux autres lunettes constituées l'une par un objectif convergent et deux oculaires concaves (ayant un grossissement double de celui que présente la lunette à un seul oculaire concave), l'autre par deux objectifs convergents et un oculaire convexe (ce qui réduit de moitié la longueur nécessaire avec un seul objectif).

Mais c'est au capucin Schyrl de Rheita (¹) qu'est due la lunette à quatre lentilles biconvexes, seule employée aujourd'hui.

Il y avait, dit-on, sur le phare d'Alexandrie un grand miroir au moyen duquel on pouvait voir les vaisseaux sortir des ports de la Grèce (²). Toute exagération mise de côté, cette légende doit contenir une certaine part de vérité : les propriétés des miroirs ardents furent très anciennement connues, et l'on a fort bien pu jadis les utiliser pour voir au loin (³).

En 1616, le jésuite Zucchi construisit un appareil grossier qui se composait d'un miroir creux dans lequel on regardait avec un verre concave tenu à la distance voulue (⁴). Le minime Mersenne (⁵) reprit et développa cette idée, mais sans la mettre en pratique, empêché bien à tort par Descartes. Vingt ans plus tard, James Gregory (⁶) proposa une combinaison analogue qu'il ne parvint pas à faire exécuter d'une manière satisfaisante, mais qui fut ensuite réalisée par Hooke (1674). A la même époque, Newton en Angleterre et Cassegrain en France établirent des télescopes qui sont restés les types des appareils modernes. Le premier télescope de Newton date de 1668 et, quoique n'ayant que 6 pouces de long, il valait une lunette de 6 pieds d'alors, grossissant 30 à 40 fois ; en 1671, Newton en fit un second, un peu plus grand, qui est conservé dans la bibliothèque de la Société royale et dont le dessin se trouve dans les *Philosophical Transactions* pour 1672. Peu après, Cassegrain, professeur au collège de Chartres, publia dans le *Journal des savants* la description d'un télescope qu'il dit avoir fait avant ceux de Newton et qu'il déclare à juste titre très supérieur. En effet, en remplaçant l'objectif par un miroir, Newton ne s'était proposé que d'éviter l'aberration chromatique ; Casse-

(¹) Rheita, *Oculus Enochii et Eliæ, seu Radius sidereomysticus*. Anvers ; 1645.

(²) Voir Libri, *Hist. des sc. math. en Italie*, I, 215, 229.

(³) Les miroirs conviennent aussi à l'observation des petits objets. Tout télescope peut servir de *microscope catadioptrique*, si on enlève l'oculaire et qu'on dispose l'objet vers l'endroit où se formait la dernière image réelle : le grand miroir donne alors une image réelle et amplifiée que l'on amènera aisément à une place (un peu au delà du centre) où l'on puisse commodément l'examiner avec un oculaire.

(⁴) Wilde, *Gesch. d. Optik*, I, 307.

(⁵) Mersenne, *Phænomena hydraulico-pneumatica*, p. 96. Paris ; 1644.

(⁶) J. Gregory, *Optica promota* ; 1663.

grain, par l'addition d'un deuxième miroir courbé en sens inverse, corrigeait l'aberration de sphéricité : en outre, son instrument était plus court et plus clair. Mais les avantages du système de Cassegrain n'ont été bien compris que de nos jours. C'est un télescope de Cassegrain que Warren de la Rue a fait fabriquer pour l'observatoire de Melbourne, où il rend les meilleurs services.

Tous ces premiers modèles étaient de petites dimensions et ne produisaient que des effets médiocres ([1]). Aussi furent-ils presque complètement abandonnés quand Dollond fut arrivé à construire des objectifs achromatiques (1717). Mais le besoin croissant de mieux étudier le ciel et la difficulté d'obtenir de grandes lentilles de bonne qualité ramenèrent bientôt aux miroirs, et en 1785 W. Herschell entreprit pour son observatoire de Slough (près Windsor) la fabrication d'un télescope dont le miroir, incliné de façon à éviter la perte de lumière qu'occasionne la réflexion sur le petit miroir plan dans le dispositif de Newton, avait 12 mètres de foyer et $1^m,50$ de diamètre ([2]). Ces proportions furent encore dépassées par lord Ross, qui installa en 1842 à Birr (Irlande) un télescope dont le miroir atteignait près de 17 mètres de foyer et $1^m,80$ de diamètre. Enfin Foucault porta le travail des miroirs à un degré de perfection inconnu jusqu'alors qui rendit possibles les forts grossissements par l'oculaire et permit ainsi d'avoir des appareils d'une puissance considérable avec des dimensions moins colossales ([3]). En 1864, Foucault construisit dans les ateliers de Sécrétan un grand télescope (le miroir a 80 centimètres de diamètre) qui est à l'observatoire de Marseille. Il avait commencé la construction d'un miroir de $1^m,20$ de diamètre lorsque la mort vint le frapper (1868); son œuvre fut exécutée par son élève, M. Martin; l'instrument fut fabriqué par Eichens sous la direction de M. Wolf

([1]) Cependant, en 1723, John Hadley présenta à la Société royale un télescope du système de Newton, dont le miroir avait 62 pouces et demi de foyer et qui produisait les mêmes résultats qu'une lunette d'Huygens de 123 pieds de foyer.

([2]) On avait établi, pour le soutenir et le mouvoir, un assemblage énorme de poutres, de cordes et de poulies, dont Montucla a donné le dessin dans son *Histoire des mathématiques*, III.

([3]) Les grands tubes ouverts sont souvent le siège de courants d'air qui déforment les images par les inégalités de réfraction qu'ils provoquent. Pour remédier à cet inconvénient, MM. Henry ferment le tube au moyen d'une lentille qui concourt à la production de l'image (*télescopes catadioptriques*).

et installé à l'observatoire de Paris en 1875. Le tube a 7m,30 de longueur. Le prisme et le microscope oculaire sont fixés à une alidade mobile dans un plan perpendiculaire à l'axe du télescope; cette alidade entraîne avec elle un chercheur coudé, dont l'oculaire se trouve à côté de celui du microscope. Tout l'appareil est monté sur un pied parallactique en fonte, de façon à suivre un astre dans sa marche. Mais la lutte entre les réflecteurs et les réfracteurs n'était pas finie; ceux-ci viennent de remporter un grand succès

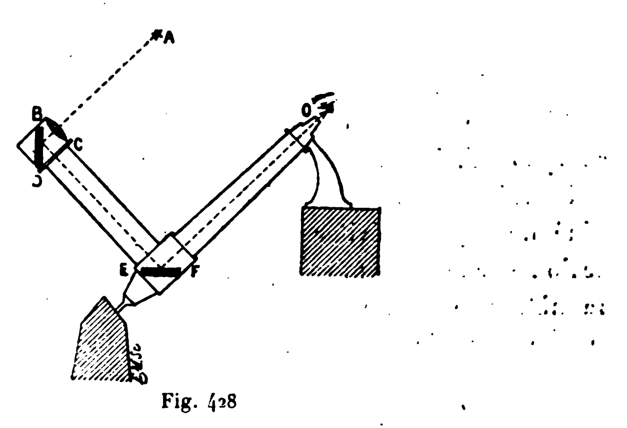


Fig. 428

avec la magnifique lunette coudée de M. Lœwy, récemment inaugurée à l'observatoire de Paris [1]. Elle se compose de deux parties : l'une, qui part de l'oculaire, est dirigée suivant l'axe du monde; l'autre, implantée à angle droit sur la première, se termine par une boîte contenant l'objectif. La figure 428 indique la marche des rayons, partis de l'étoile A, reçus par l'objectif BC, réfléchis successivement sur les deux miroirs BD, EF, pour arriver enfin à l'oculaire O; et elle montre comment, en faisant tourner l'instrument entier autour de l'axe du monde et l'objectif autour d'un axe perpendiculaire, l'observateur peut, sans changer de position, explorer tout l'espace céleste. Le dessin ci-joint représente l'ensemble de l'équatorial, qui a été construit avec une rare perfection pour la partie optique par MM. Henry, et pour la partie mécanique par M. Gautier. L'objectif a 60cm de diamètre et une longueur focale de 18m : son pouvoir optique répond

[1] Vior *La Nature* du 18 avril 1891.

entièrement à ces dimensions; les premiers essais ont donné

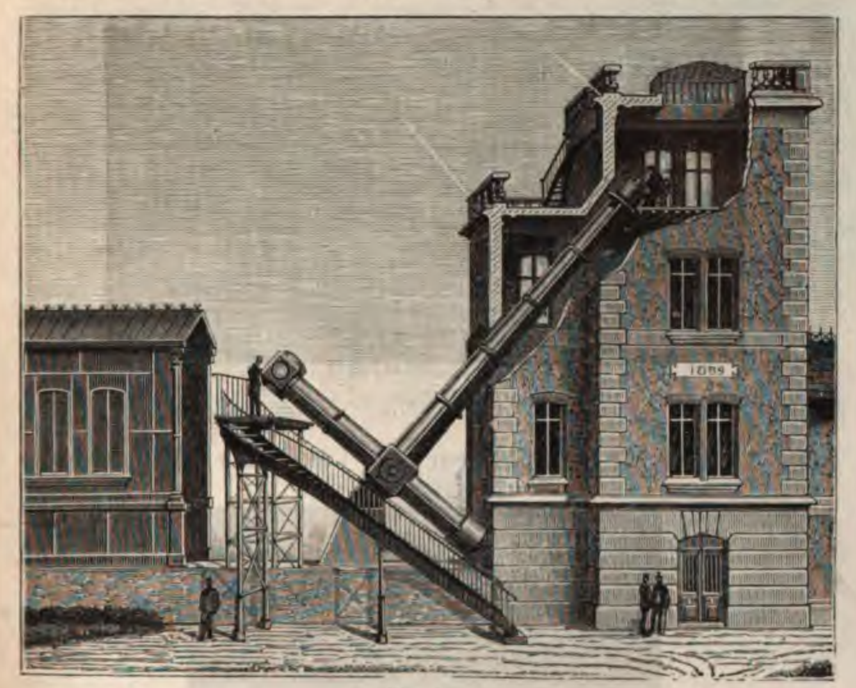


Fig. 429

des résultats tout à fait remarquables.

450. Appareils de projection et de photographie. — A côté des instruments d'optique proprement dits viennent se ranger une série d'appareils d'un usage fréquent.

Méthode générale de projection. — Ce sont d'abord les appareils de projection, qui ont pris dans les cours une place importante. La partie essentielle est un objectif (lentille ou système convergent), au moyen duquel on produit sur un écran éloigné une image réelle, agrandie et renversée de l'objet à projeter, convenablement éclairé. Pour obtenir l'éclairement nécessaire, qui doit être d'autant plus intense que l'on veut avoir un plus fort agrandissement, on a recours à un deuxième système convergent, nommé *accumulateur* ou *condenseur*, à l'aide duquel on concentre la lumière sur l'objet.

Microscope solaire. — Ainsi, dans le microscope solaire figuré ci-après, les rayons solaires, réfléchis sur le miroir MM' d'un

porte-lumière ou d'un héliostat situé en dehors de la chambre

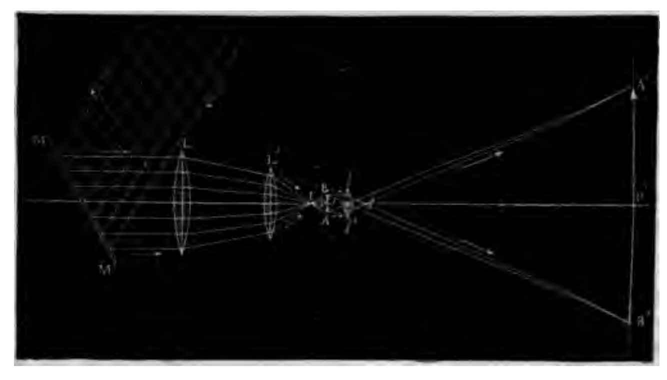


Fig. 430

noire, tombent sur le condenseur LL′ (¹) et de là sur l'objet trans-

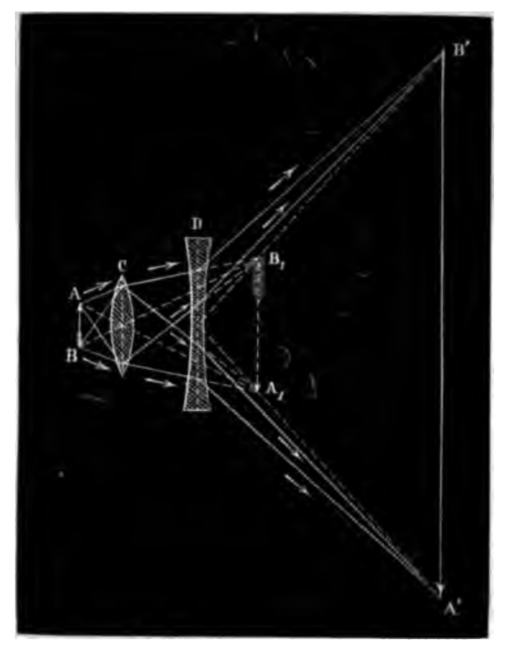


Fig. 431

parent AB, puis sur l'objectif ll' qui donne en A′B′ une image ren-

(¹) Si l'on employait une lumière artificielle, une lumière électrique par exemple, on la disposerait au foyer d'une lentille placée en avant du condenseur, de façon à recevoir toujours sur celui-ci des rayons sensiblement parallèles.

versée et amplifiée de l'objet. Celui-ci étant placé tout près du premier foyer de l'objectif, le grossissement est très sensiblement

$$G = \frac{d}{f},$$

d représentant la distance de l'écran à l'objectif.

La figure 431 montre une disposition que l'on emploie souvent pour obtenir un grossissement considérable, sans prendre des lentilles trop convergentes : on évite ainsi les aberrations de sphéricité, et, si les verres sont convenablement choisis, on corrige les aberrations chromatiques.

Appareils de projection de Duboscq. — Duboscq a construit pour la projection un appareil (fig. 433) qui se monte sur le volet de la



Fig. 432

chambre noire ou sur la *lanterne photogénique* représentée ci-dessus, et qui contient un large accumulateur formé d'une lentille

plan-convexe recevant les rayons incidents par sa face bombée (¹)



Fig. 433

et d'un objectif constitué par une lentille achromatique de moindre

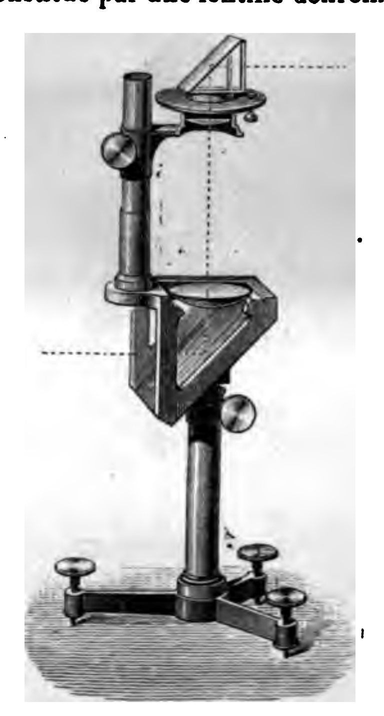


Fig. 434

diamètre. L'objet à projeter, qui doit être transparent, se met

(¹) Tel est du moins le condenseur pour rayons incidents parallèles (rayons solaires ou rayons sortant de la lanterne parallélisés par sa lentille). Mais avec une source artificielle, il est plus commode de supprimer la lentille de la lan-

presque immédiatement après l'accumulateur, dont le principal rôle est alors de transformer le faisceau incident cylindrique en un cône qui tombe entièrement sur l'objectif, et même sur une petite partie de l'objectif (situé à peu près au foyer de l'accumulateur), de façon à produire une image nette dans toutes ses parties [1].

On installe le même appareil verticalement (fig. 434) pour projeter les corps transparents disposés horizontalement. On met alors les objets directement sur le condenseur éclairé par-dessous au moyen d'une glace à 45°; l'objectif, placé au-dessus et muni d'un pignon mobile le long d'une crémaillère, envoie l'image au plafond ou sur un écran vertical par l'intermédiaire d'un prisme à 45°.

Duboscq a imaginé, en outre, un prisme redresseur que l'on établit vers le deuxième foyer de l'objectif et qui retourne le

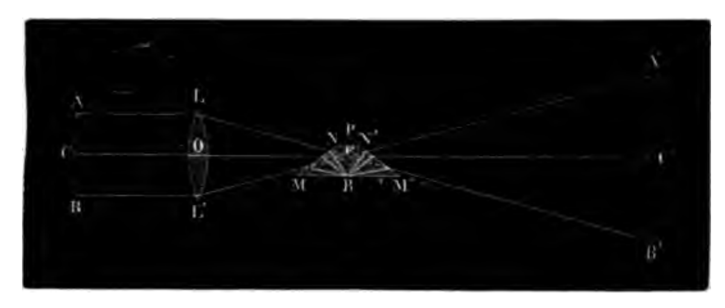


Fig. 435

faisceau par réflexion totale, comme l'indique la figure ci-jointe.

Ophtalmoscope. — La très faible quantité de lumière qui pénètre du dehors à travers la pupille est tout à fait insuffisante pour permettre de voir nettement le fond de l'œil. M. von Helmoltz a rendu un service inappréciable à l'ophtalmologie en créant l'ophtalmoscope. Sous sa forme la plus simple, c'est un miroir concave M, avec lequel l'observateur O concentre dans l'œil O' la lumière

terne et de faire usage d'un condenseur qui est formé de deux lentilles plan-convexes en contact par leurs faces courbes et qui se place de manière à donner toujours sur l'objectif l'image de la source.

[1] Cet appareil n'est, en somme, qu'une *lanterne magique* bien construite. Due à Porta et vulgarisée par le P. Kircher, la lanterne magique se compose, en effet, d'un accumulateur formé d'une seule lentille, placée à tort après l'objet, et d'un objectif constitué également par une seule lentille non achromatique, le bon marché étant habituellement la première qualité que l'on demande à ce jouet.

considérablement augmentée, et en même temps l'image d'un point se trouvait (théoriquement du moins) réduite à un point situé sur l'axe secondaire passant par le centre optique de la lentille. Il est manifeste qu'une lentille unique ne peut donner de bonnes images que dans un champ très restreint.

Objectifs photographiques. — On est arrivé aujourd'hui à obtenir d'excellentes images avec des ouvertures de 70° à 75°. Mais il a fallu constituer les objectifs de deux lentilles composées chacune

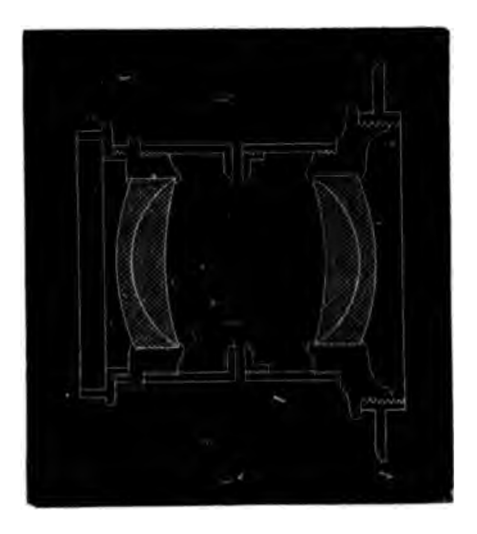


Fig. 438

de deux verres : on dispose alors de huit rayons et d'une distance, ce qui rend possible la réalisation de neuf conditions. D'abord, le conjugué d'un point situé sur l'axe principal doit être un point unique, placé à une distance déterminée, sans aberration ni de sphéricité ni d'achromatisme, ce qui représente trois conditions (440); en outre, pour une incidence I, le conjugué d'un point doit encore être un point et se trouver dans le même plan que le conjugué central. L'image sera alors sensiblement plane. Il faut enfin qu'elle soit semblable à l'objet. Chacune de ces trois dernières conditions compte pour deux, puisqu'elle doit être satisfaite pour deux couleurs. Rarement toutes ces conditions sont remplies. Quand le champ est un peu grand (objectifs à paysages), la similitude n'est généralement pas observée (les premiers plans sont avancés). Cette

condition est au contraire essentielle dans un objectif à portraits, qui d'autre part ne réclame pas beaucoup de champ. On y arrive au moyen des objectifs symétriques (antiplanat de Steinheil, rectilinéaire de Dallmeyer (fig. 438)). La similitude exige que les points nodaux soient sans aberration et que les axes des faisceaux passent par le milieu de l'interstice : le diaphragme occupera donc ce milieu, et le système sera symétrique par rapport à ce point.

Dès 1840, Ch. Chevalier à Paris, et Petzval, à Vienne, avaient construit des objectifs à portraits par la combinaison de deux sys-

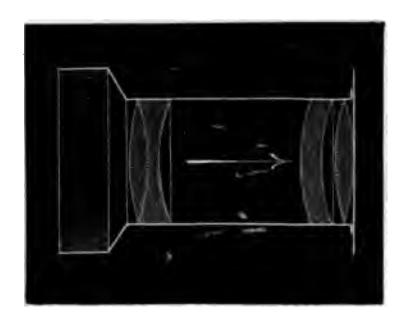


Fig. 439.

tèmes de lentilles. La figure ci-dessus représente l'objectif de Petzval, qui se compose d'un premier système achromatique et aplanétique sous une faible ouverture, suivi d'un deuxième système (ménisque divergent en flint et lentille biconvexe en crown), au moyen duquel on détruit les aberrations latérales et on donne de la profondeur au foyer.





